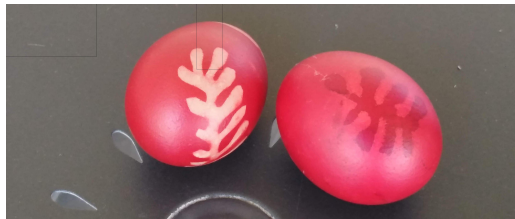


FIZIČKI FAKULTET
UNIVERZITET U BEOGRADU

Kvantovanje u zakrivljenom prostoru

2020, beleške iz karantina

MAJA BURIĆ



Sadržaj

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Uvod | 3 |
| 1.1 | Prolog: harmonijski oscilator u spoljašnjem polju | 5 |
| 2 | Kvantna teorija polja u ravnom prostoru | 7 |
| 2.1 | Skalarni proizvod | 7 |
| 2.2 | Kvantovanje | 8 |
| 2.3 | Green-ove funkcije | 9 |
| 2.4 | Termalne Green-ove funkcije | 13 |
| 3 | Kvantovanje u zakrivljenom prostoru | 15 |
| 3.1 | Struktura Riemann-ovog prostora i simetrije | 15 |
| 3.2 | Klasična polja | 18 |
| 3.3 | Kvantovanje skalarnog polja, opšti rezultati | 20 |
| 3.4 | Kosmološka kreacija čestica | 22 |
| 3.5 | Detektori čestica | 26 |
| 3.6 | Konformni vakuum | 29 |
| 4 | FLRW kosmologija | 32 |
| 4.1 | Ravni prostorni preseci, mode | 32 |
| 4.2 | Opšti slučaj, mode | 34 |
| 4.3 | Efektivni hamiltonijan | 35 |
| 4.4 | Kvantovanje | 37 |
| 4.5 | Trenutni vakuum | 39 |
| 4.6 | Pojam čestice i krivina | 40 |
| 4.7 | Kvantne fluktuacije | 41 |
| 5 | De Sitter-ov prostor | 42 |
| 5.1 | Sistemi koordinata | 42 |
| 5.2 | Kvantovanje, Bunch-Davies-ov vakuum | 45 |
| 5.3 | Green-ove funkcije | 47 |
| 6 | Unruh-ov efekat | 51 |
| 6.1 | Rindler-ov prostor | 51 |
| 6.2 | Kvantovanje u Rindler-ovom prostoru | 53 |
| 6.3 | Komentari | 57 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 7 | Hawking-ovo zračenje | 58 |
| 7.1 | Schwarzschild-ovo rešenje | 58 |
| 7.2 | Hawking-ovo zračenje, Hartle-Hawking-ov vakuum | 60 |
| 7.3 | Gravitacioni kolaps, Unruh-ov vakuum | 62 |

1 Uvod

1. Tema

Glavna tema kursa je kvantovanje polja u Riemann-ovom prostoru. Pre svega ćemo se baviti skalarnim poljem i operatorskim kvantovanjem. To znači, gledamo klasičnu jednačinu za skalarno polje

$$(\square + m^2 + \xi R)\Phi = 0, \quad (1.1)$$

i njena rešenja, a onda polje kvantujemo na standardni način: definišemo operatore kreacije i anihilacije, komutacione relacije, vakuum, Green-ove funkcije itd. To omogućava da se analiziraju i izračunaju razni efekti, a u kursu ćemo se uglavnom truditi da uvedemo osnovni tehnički nivo računa, kao i da razmotrimo karakteristične nove efekte koji se javljaju u zakrivljenom prostoru a ne vide se u ravnom. U principu, kada definišemo kvantno polje možemo da gledamo i njegove povratne efekte ('backreaction') na gravitaciono polje odnosno geometriju, semiklasično,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (1.2)$$

Samo kvantovanje kao i mnoge račune moguće je izvesti i za spinorsko i elektromagnetno polje, i po svoj prilici nije previše komplikovano: možda u budućnosti dodam i te delove u kurs. Dalje: polja se u krivom prostoru mogu kvantovati i preko funkcionalnog integrala i neki važni rezultati u oblasti dobijeni su na taj način; sem toga, u većini knjiga bar neki deo je posvećen funkcionalnom kvantovanju. Mi se držimo početnog nivoa.

Treba imati u vidu da su i kvantna teorija polja i opšta teorija relativnosti (kao i teorija diferencijalnih jednačina) matematički veoma razvijene oblasti, i lako se naleti na primenu težih teorema ili formalizma. Tako da nisam sigurna da je moguće da se sve teme obrade matematički precizno sa jedne strane, a opet na razumnom 'fizičarskom' nivou strogosti. Ipak razni efekti mogu da se vide, diskutuju, da se razvije intuicija, a za razradu, po želji, ima puno literature. Jedna od stvari je da se, pokušavajući da kvantujemo polje u krivom prostoru, zapravo vraćamo na kvantovanje u ravnom, da bismo shvatili šta je isto, šta može ili treba da se uopšti i prenese (npr. zbog principa ekvivalencije) a šta je drugačije.

2. Sadržaj

Glavni koncepti kroz koje ćemo proći, možda ne u ovom redosledu, su: pojam čestice i vakuuma; Unruh-ov efekat i detektori čestica; kvantovanje u kosmološkim i specijalno, de Sitter-ovom prostoru; Hawking-ovo zračenje. Motivacija za kurs je da se sa jedne strane upoznamo sa važnim idejama kao što su analiza pojma čestice u zakrivljenom prostoru i Hawking-ovo zračenje, a sa druge strane, danas aktuelnije, da se nauči kako se kvantuju polja u kosmologiji.

3. Literatura

Osnovne knjige za kurs su:

– Birrel & Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, CUP 1982

- Mukhanov & Winitzki, Quantum Effects in Gravity, CUP 2007
 - Wald, QFT in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics, Univ. Chicago 1994
- pa ću delove koji su napisani/predavani po nekoj od njih označavati sa B&D, M&W, W.

Dodatno, postoje odnosno korišćeni su:

- Parker & Toms, QFT in Curved Spacetime, CUP 2009
- Fulling, Aspects of QFT in Curved Spacetime, CUP 1989
- Bogoljubov, Logunov, Oksak i Todorov, Opšti principi KTP, Nauka 1987
- neki radovi

i naravno,

- Abramowitz & Stegun: Handbook of Mathematical Functions
- Erdelyi: Higher Transcendental Functions
- NIST Digital Library of Mathematical Functions

1.1 Prolog: harmonijski oscilator u spoljašnjem polju

M&W

Kvantovanje u zakrivljenom prostoru je u stvari problem kod koga se razmatra kretanje čestice, ili evolucija kvantnog sistema u spoljašnjem polju: to znači da se u principu ne održava energija, u slučaju polja ni broj čestica u sistemu. Jednostavan primer iz kvantne mehanike koji ovo ilustruje je kvantni pobuđeni harmonijski oscilator.

Posmatramo sistem zadat sa

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 - Jx. \quad (1.3)$$

Funkcija $J = J(t)$ definiše spoljašnju pobudu sistema, interakcioni član je najjednostavniji, 'monopolski', tipa struja \times polje, masa $m = 1$. Energija nije održana, a sistem kvantujemo u Heisenberg-ovoj slici. Uvodimo, pored $x(t)$ i $p(t)$, operatore kreacije i anihilacije

$$a(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x(t) + \frac{i}{\omega} p(t) \right), \quad a^\dagger(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x(t) - \frac{i}{\omega} p(t) \right). \quad (1.4)$$

U svakom trenutku važe kanonske komutacione relacije

$$[x(t), p(t)] = i, \quad \text{tj.} \quad [a(t), a^\dagger(t)] = 1. \quad (1.5)$$

Hamiltonijan (1.3) zavisi od vremena,

$$H(t) = \frac{1}{2} p(t)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x(t)^2 - J(t)x(t) = \frac{\omega}{2} (a(t)a^\dagger(t) + a^\dagger(t)a(t)) - \frac{a(t) + a^\dagger(t)}{\sqrt{2\omega}} J(t). \quad (1.6)$$

Jednačine kretanja

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\omega^2 x + J \quad (1.7)$$

postaju

$$\frac{da}{dt} = -i\omega a + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} J \quad (1.8)$$

a njihovo rešenje je

$$a(t) = e^{-i\omega t} \left(\text{const} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^t e^{i\omega t'} J(t') dt' \right). \quad (1.9)$$

Konstanta u poslednjoj jednačini je operator, početna vrednost od $a(t)$: $\text{const} = a(0) \equiv a_{in}$. Drugi član je funkcija, proporcionalan jediničnom operatoru, pa razume se imamo $[a_{in}, a_{in}^\dagger] = 1$.

Pretpostavimo sada da je $J(t) \neq 0$ samo za $t \in (0, T)$, tj. da je pre i posle ovog perioda oscilator slobodan. Tada je

$$a(t) = a_{in} e^{-i\omega t}, \quad t < 0 \quad (1.10)$$

gde je in -oblast $t < 0$ tj. period pre interakcije sa spoljašnjim poljem, i

$$a(t) = e^{-i\omega t} \left(a_{in} + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^T e^{i\omega t'} J(t') dt' \right) = e^{-i\omega t} a_{out}, \quad t > T. \quad (1.11)$$

Ovde je *out*-oblast $t > T$, a a_{out} i a_{in} se razlikuju za konstantu,

$$a_{out} = a_{in} + J_0, \quad J_0 = \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^T e^{i\omega t'} J(t') dt'. \quad (1.12)$$

Takođe, očigledno, važi

$$H = \omega (a_{in}^\dagger a_{in} + \frac{1}{2}), \quad t < 0, \quad (1.13)$$

$$H = \omega (a_{out}^\dagger a_{out} + \frac{1}{2}), \quad t > T. \quad (1.14)$$

Znači, u *in* i *out* oblastima imamo dva različita (a prirodno definisana!) operatora anihilacije koji definišu različite vakuume,

$$a_{in} |0_{in}\rangle = 0, \quad a_{out} |0_{out}\rangle = 0. \quad (1.15)$$

Možemo tačno i da vidimo međusobni odnos ovih vakuuma: Vakuum $|0_{in}\rangle$ je koherentno stanje za vakuum $|0_{out}\rangle$, jer zadovoljava jednačinu

$$a_{out} |0_{in}\rangle = J_0 |0_{in}\rangle \quad (1.16)$$

koja je karakteristična za koherentna stanja (J_0 je kompleksno, a_{out} nije hermitski).

Domaći 1 Pokazati da za koherentno stanje $a|z\rangle = z|z\rangle$ važi

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \langle z|x|z\rangle = \sqrt{\frac{2}{\omega}} \operatorname{Re} z, \quad \langle z|x|z\rangle = \sqrt{2\omega} \operatorname{Im} z, \quad |z\rangle = \alpha e^{za^\dagger} |0\rangle \quad (1.17)$$

i naći konstantu normiranja α .

U prethodnom zadatku eksitovana stanja $|n\rangle$, ili $|n_{out}\rangle$

$$|n_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{out}!}} (a_{out}^\dagger)^{n_{out}} |0_{out}\rangle \quad (1.18)$$

i vakuum $|0_{out}\rangle$ obrazuju Fock-ov prostor.

Iz (1.17) se vidi da u *out*-vakuumi imamo *in*-čestice, i to (sa ordeđenom verovatnoćom) proizvoljno mnogo: njih kreira polje koje je delovalo između 0 i T . Takođe, vidimo da je

$$\langle 0_{in}|H(t)|0_{in}\rangle = \frac{\omega}{2}, \quad t < 0, \quad \langle 0_{in}|H(t)|0_{in}\rangle = \frac{\omega}{2} + |J_0|^2, \quad t > T. \quad (1.19)$$

2 Kvantna teorija polja u ravnom prostoru

B&D

Razmatramo realno skalarno polje u 4-dimenzionalnom prostoru signature (+---). Da fiksiramo oznake. Dejstvo i lagranžijan su

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - m^2 \Phi^2), \quad (2.1)$$

generalisani impuls, $\pi = \dot{\Phi} = \partial_0 \Phi$, a jednačina kretanja – Klein-Gordon-ova jednačina,

$$(\square + m^2) \Phi = 0. \quad (2.2)$$

Tenzor energije-impulsa dat je sa

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.3)$$

odnosno

$$T^{00} = \frac{1}{2} (\partial^0 \Phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial^i \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2, \quad T^{0i} = \partial^0 \Phi \partial^i \Phi. \quad (2.4)$$

Partikularna rešenja Klein-Gordon-ove jednačine su ravni talasi, pozitivne energije

$$u_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} e^{-ikx}, \quad \omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}, \quad (2.5)$$

i negativne energije,

$$u_{\vec{k}}^* = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} e^{ikx}, \quad (2.6)$$

a skup $\{u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}}^*\}$ je kompletan skup rešenja. Opšte rešenje je

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} (\alpha_{\vec{k}} e^{-ikx} + \alpha_{\vec{k}}^* e^{ikx}) = \int d^3k (\alpha_{\vec{k}} u_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}^*). \quad (2.7)$$

2.1 Skalarni proizvod

Za dve funkcije tj. polja Φ_1 i Φ_2 uvodi se skalarni proizvod formulom

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int d^3x (\Phi_1 \dot{\Phi}_2^* - \dot{\Phi}_1 \Phi_2^*). \quad (2.8)$$

Ovaj skalarni proizvod se za rešenja Klein-Gordonove jednačine održava u vremenu. On se (kod realnog polja) svodi na simplektički proizvod dva polja,

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int d^3x (\Phi_1 \pi_2 - \pi_1 \Phi_2). \quad (2.9)$$

U naivnom kvantovanju relativističke čestice, prostor stanja bio bi kompleksifikovani prostor funkcija $\Phi(x)$, i kao što znamo, on sadrži i pozitivno i negativno-energetska rešenja. Ako se ograničimo samo na pozitivno-energetska rešenja, tj. talasne funkcije oblika

$$\Phi^+(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \alpha_{\vec{k}} e^{-ikx}, \quad \tilde{\Phi}^+(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} \tilde{\alpha}_{\vec{k}} e^{-ikx} \quad (2.10)$$

lako možemo proveriti da je na tom skupu (\cdot, \cdot) pravi skalarni proizvod jer važi

$$(\Phi^+, \tilde{\Phi}^+) = \int d^3k \alpha_{\vec{k}} \tilde{\alpha}_{\vec{k}}^*, \quad (2.11)$$

pa je $(\Phi^+, \Phi^+) \geq 0$, $(\Phi^+, \tilde{\Phi}^+) = (\tilde{\Phi}^+, \Phi^+)^*$. Gornji skup obrazuje jednočestični Hilbert-ov prostor za skalarno polje, ali nije zatvoren pri evoluciji.

Ortonormiranost skupa $\{u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}}^*\}$ omogućava da se lako odrede koeficijenti u opštem rešenju jer važi

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}^*) = 0, \quad (u_{\vec{k}}^*, u_{\vec{k}'}^*) = -\delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.12)$$

Zato je $\alpha_{\vec{k}} = (\Phi, u_{\vec{k}})$. Videćemo da se izraz za skalarni proizvod može uopštiti na zakrivljen prostor. Izbor da se skup bazisnih funkcija sastoji od $u_{\vec{k}}$ i njima kompleksno konjugovanih $u_{\vec{k}}^*$ je standardan i bitan, jer njime je određen i podskup $\{u_{\vec{k}}\}$ koji definiše prostor jednočestičnih stanja (pozitivne energije) – bez obzira na to da li su funkcije $u_{\vec{k}}$ eksponencijalne po vremenu ili ne, odnosno bez obzira na to kako je vreme definisano.

2.2 Kvantovanje

Kvantovanje skalarnog polja je standardno: definiše se kanonskim komutacionim relacijama

$$[\Phi(t, \vec{r}), \pi(t, \vec{r}')] = i\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \text{ostali komutatori nula}, \quad (2.13)$$

ili sa

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad \text{ostali komutatori nula}. \quad (2.14)$$

gde smo amplitude oscilatora zamenili operatorima kreacije i anihilacije, $\alpha_{\vec{k}} \rightarrow a_{\vec{k}}$, $\alpha_{\vec{k}}^* \rightarrow a_{\vec{k}}^\dagger$.

Vakuuum je zadat uslovom

$$\Phi^+(x)|0\rangle = 0, \quad \text{ili} \quad a_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \quad (2.15)$$

a prostor stanja je Fock-ov prostor.

Kao što znamo, energija vakuuma je beskonačna, ako se ne uvede način da se ova beskonačnost eliminiše. U ravnom prostoru to je moguće normalnim uređenjem. Divergentni deo dobija se iz izraza

$$\langle 0|H|0\rangle = \langle 0|\frac{1}{2}\int d^3k \omega (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger)|0\rangle = \frac{1}{2}\delta^3(0)\int_0^\infty \sqrt{k^2 + m^2} 4\pi k^2 dk. \quad (2.16)$$

Deo divergencije koji potiče od δ -funkcije tj. beskonačne zapremine prostora je IR divergencija. Drugi faktor u prethodnoj formuli je divergentan za velike impulse odnosno energije, pa je UV divergencija. U n -dimenzionom prostor-vremenu izraz bi bio sličan: umesto 4π imali bismo površinu sfere u $n - 2$ dimenzije,

$$S_{n-2} = \frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)}, \quad (2.17)$$

a umesto δ -funkcije možemo da zamenimo zapreminu prostora, $(2\pi)^{n-1} \delta^{n-1}(0) \rightarrow L^{n-1}$. Za energiju vakuuma se dobija

$$\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^{n-1} \int_0^\infty dk k^{n-2} \sqrt{k^2 + m^2} \frac{(n-1)\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2} + 1)} = \frac{m^n}{2} \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^{n-1} \int_0^\infty \left(1 + \frac{k^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k^2}{m^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} d\left(\frac{k^2}{m^2}\right).$$

Poslednji integral može da se kvantifikuje ako se formula

$$\int_0^\infty (1+t)^{-w} t^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w-z)}{\Gamma(w)}, \quad (2.18)$$

koja važi kada je $\text{Re} w > \text{Re} z > 0$, analitički produži. Tako dobijamo

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{m^n}{2} \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\Gamma(-\frac{n}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})}. \quad (2.19)$$

UV divergencija vidi se i pre integracije, u vrednosti tenzora energije-impulsa npr. u $\langle 0|\Phi(x)\Phi(x)|0\rangle$. Sam ovaj izraz je divergentan jer se uzima očekivana vrednost uopštene funkcije (tj. distribucije) na kvadrat, koja nije dobro definisano: ne možemo tačno da odredimo vrednost polja u tački. Alternativni način regularizacije energije (koji se koristi u zakrivljenom prostoru) je ‘point-splitting’: zamena

$$\langle 0|\Phi(x)\Phi(x)|0\rangle \rightarrow \lim_{x' \rightarrow x} \langle 0|\Phi(x)\Phi(x')|0\rangle. \quad (2.20)$$

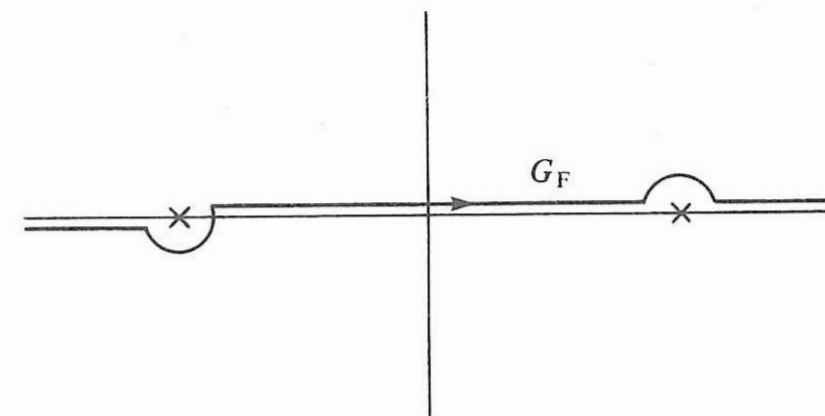
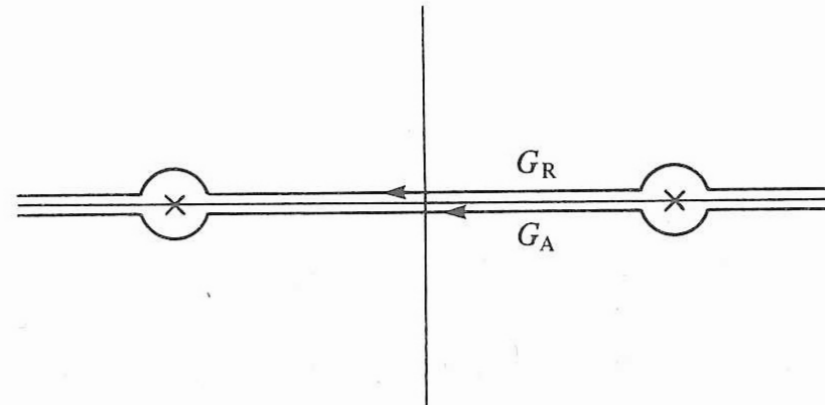
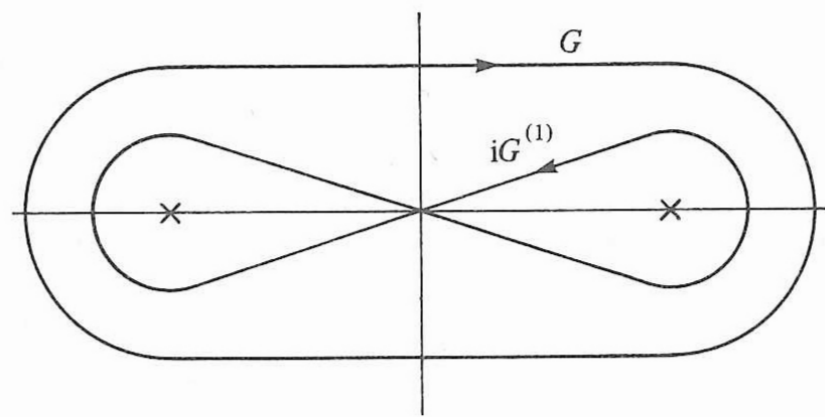
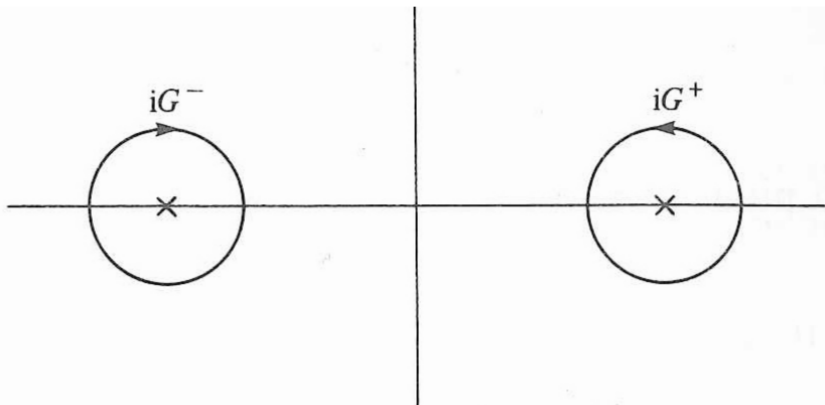
Poslednja vakuumska očekivana vrednost je Wightmann-ova funkcija koju uvodimo u sledećem odeljku; njeno divergentno ponašanje može precizno da se odredi i, samim tim, da se regularizuje.

2.3 Green-ove funkcije

Sve Green-ove funkcije mogu se izraziti kao konturni integrali,

$$\mathcal{G}(x; x') = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2 - m^2}, \quad (2.21)$$

a konture integracije date su na sledećoj strani (skenirana iz B&D).



Oznake koje se koriste su

| | |
|---|----------------|
| $G^+(x; x') = \langle 0 \Phi(x) \Phi(x') 0 \rangle$ | Wightman |
| $G^-(x; x') = \langle 0 \Phi(x') \Phi(x) 0 \rangle = G^+(x'; x)$ | Wightman |
| $iG(x; x') = \langle 0 [\Phi(x), \Phi(x')] 0 \rangle = G^+(x; x') - G^-(x; x')$ | Pauli – Jordan |
| $G^{(1)}(x; x') = \langle 0 \{ \Phi(x) \Phi(x') \} 0 \rangle = G^+(x; x') + G^-(x; x')$ | Hadamard |
| $G_R(x; x') = -\theta(t - t') G(x; x')$ | retarded |
| $G_A(x; x') = \theta(t' - t) G(x; x')$ | advanced |
| $iG_F(x; x') = \langle 0 T(\Phi(x) \Phi(x')) 0 \rangle = \theta(t - t') G^+(x; x') + \theta(t' - t) G^-(x; x')$ | Feynman |

Prve četiri Green-ove funkcije zadovoljavaju (homogenu) Klein-Gordon-ovu jednačinu (jer je i kvantno polje $\Phi(x)$ zadovoljava),

$$(\square_x + m^2) \mathcal{G}(x; x') = 0, \quad (2.22)$$

a preostale tri, koje se definišu preko step-funkcije $\theta(t - t')$, nehomogenu jednačinu,

$$(\square_x + m^2) G_F(x; x') = -\delta^4(x - x'), \quad (\square_x + m^2) G_{R,A}(x; x') = \delta^4(x - x'). \quad (2.23)$$

Domaći 2 Pretpostavljajući da Green-ove funkcije, zbog ivarijantnosti na Lorentz-ove transformacije, zavise samo od kvadrata rastojanja između tačaka x i x' , $\mathcal{G}(x; x') = \mathcal{G}(\sigma)$, uz

$$\sigma = \frac{1}{2} (x - x')^2, \quad (2.24)$$

naći opšte rešenje Klein-Gordon-ove jednačine $(\square_x + m^2) \mathcal{G}(\sigma) = 0$. Komentarisati neprekidnost rešenja i granične uslove npr. za funkciju Pauli-Jordana. Da li je, osim dobijenog, i $\epsilon(t - t') \delta(2\sigma)$ rešenje Klein-Gordon-ove jednačine?

Za Klein-Gordon-ovu jednačinu u n -dimenzija važi da se sva njena rešenja, uopštene funkcije $F(x)$, mogu razmatrati kao jednoparametarska familija $F(x)|_{x^0=t} = F_t(\vec{r})$ koja zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F_t(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} F_t(\vec{r}). \quad (2.25)$$

Dalje, može se pokazati da ova jednačina ima jednoznačno rešenje za proizvoljne početne uslove Cauchy-jevog prolema, tj. za svaki par uopštenih funkcija u_0, u_1 :

$$F_t(\vec{r})|_{t=0} = u_0(\vec{r}), \quad \frac{\partial}{\partial t} F_t(\vec{r})|_{t=0} = u_1(\vec{r}). \quad (2.26)$$

(Bogoljubov&L&O&T)

Razume se, obilazak konture definiše početne uslove. Da bismo ovo detaljnije videli, izračunaćemo eksplicitno Feynman-ov propagator, integracijom po konturi sa slike. Imamo

$$G_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_0t}}{k_0^2 - \omega^2} dk_0 \quad \left(\omega = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \right) \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \left(\theta(t) 2\pi i \frac{e^{-i\omega t}}{2\omega} + \theta(-t) \frac{e^{i\omega t}}{2\omega} \right) = \theta(t) G_{F+} + \theta(-t) G_{F-}.$$

Izračunaćemo jednu od ove dve funkcije, a trebalo bi da su iste,

$$\begin{aligned} G_{F+} &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{kdk}{\sqrt{k^2 + m^2}} (e^{ikr} - e^{-ikr}) e^{-i\sqrt{k^2 + m^2}t} \\ &= -\frac{i}{2(2\pi)^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ikr} e^{-i\sqrt{k^2 + m^2}t}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Koristićemo formulu (A&S, (9.1.25))

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-iz \cosh t - \nu\tau} d\tau, \quad -\pi < \text{Phase } z < 0. \quad (2.29)$$

Da bismo je primenili uvodimo dve smene: prvo, $k = m \sinh u$, pa integral postaje

$$G_{F+} = -\frac{i}{2(2\pi)^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^\infty e^{im \sinh u r - im \cosh u t} du. \quad (2.30)$$

Sledeća smena je $mr \sinh u - mt \cosh u = -z \cosh(u + B)$, $z^2 = m^2(t^2 - r^2) = 2m^2\sigma$. Ovde je $z > 0$ jer je $t > 0$; vrednost B je nebitna. Ako zamenimo $u \rightarrow u + B$, dobijamo

$$\begin{aligned} G_{F+} &= -\frac{i}{2(2\pi)^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_{-\infty}^\infty e^{-iz \cosh u} du = -\frac{i}{2(2\pi)^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (-\pi i) H_0^{(2)}(\sqrt{2m^2\sigma}) \\ &= -\frac{im^2}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{2m^2\sigma}} H_1^{(2)}(\sqrt{2m^2\sigma}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Oдавde se između ostalog vidi asimptotika. Za male vrednosti argumenta z Hankel-ova funkcija se ponaša kao $H_1^{(2)}(z) \sim \frac{2i}{\pi} \frac{1}{z}$, tj

$$G_F \sim \frac{1}{8\pi^2\sigma}. \quad (2.32)$$

Ova formula daje ponašanje propagatora na svetlosnom konusu, a takođe i (neprekidni) deo propagatora za bezmaseno polje (negde fali i) koji je

$$D_F(x; x') = \frac{i}{8\pi^2\sigma} - \frac{1}{8\pi} \delta(\sigma). \quad (2.33)$$

U drugoj asimptotskoj oblasti, za veliko i negativno σ npr. za $t = 0$, $\sigma = -\frac{r^2}{2}$, koristeći da je $H_1^{(2)} \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz}$, dobijamo da je

$$G_F \sim \sqrt{\frac{m}{32\pi^3}} r^{-\frac{3}{2}} e^{-mr}. \quad (2.34)$$

Pošto će nam nešto od ovoga možda trebati, a i radi potpunosti, prekucavam konačne izraze za neke Green-ove funkcije za skalarno polje iz Bogoljubova (nadam se da nema grešaka, notacija u knjigama je različita).

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi} \epsilon(t) \left(\delta(2\sigma) - \theta(2\sigma) \frac{m}{2\sqrt{2\sigma}} J_1(\sqrt{2m^2\sigma}) \right) \quad (2.35)$$

$$G^+(x) = \frac{m^2}{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{-2m^2\sigma}} K_1(\sqrt{-2m^2\sigma}). \quad (2.36)$$

U posljednjem izrazu vednost modifikovane Bessel-ove funkcije K_1 se uzima u limesu $\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow \frac{1}{2}} ((t - i\epsilon)^2 - r^2)$

N.B. Modifikovane Bessel-ove funkcije su (naravno rešenja odgovarajuće diferencijane jednačine, ali se mogu shvatiti i kao) analitička produženja Bessel-ovih funkcija; A&S kaže

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu(ze^{\frac{\pi i}{2}}), \quad -\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}, \quad I_\nu(z) = e^{\frac{3\nu\pi i}{2}} J_\nu(ze^{-\frac{3\pi i}{2}}), \quad \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{\pi i}{2}}), \quad -\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}, \quad K_\nu(z) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} H_\nu^{(2)}(ze^{-\frac{\pi i}{2}}), \quad \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$$

Još samo kratka napomena u vezi sa propagatorom. Iz integralne reprezentacije Feynman-ovog propagatora odnosno konture integracije vidi se da rezultat ostaje isti ako se kontura zarotira u pozitivnom matematičkom smeru, tako da se integrali po $\text{Im } k_0$, tj. od $-i\infty$ do $+i\infty$. To odgovara smeni $\kappa = -ik_0$, $\tau = -it$. Dobija se da je

$$G_F(t, \vec{r}; t', \vec{r}') = -iG_E(i\tau, \vec{r}; i\tau', \vec{r}') \quad (2.37)$$

gde euklidska Green-ova funkcija data sa

$$G_E = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint d\kappa d^{n-1}k \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}') + i\kappa(\tau-\tau')}}{\kappa^2 + \vec{k}^2 + m^2} \quad (2.38)$$

zadovoljava jednačinu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} - m^2 \right) G_E(x; x') = -\delta^n(x - x'). \quad (2.39)$$

2.4 Termalne Green-ove funkcije

Uvešćemo i termalne Green-ove funkcije. Naime, Green-ove funkcije su očekivane vrednosti proizvoda dva operatora polja u vakuumu, na primer

$$G^+(x; x') = \langle 0 | \Phi(x) \Phi(x') | 0 \rangle = \text{Tr } \Phi(x) \Phi(x') | 0 \rangle \langle 0 |. \quad (2.40)$$

Ako je polje u termodinamičkoj ravnoteži na nenultoj temperaturi, nisu tačno određeni ni njegova energija ni broj čestica. Polje je u mešanom stanju ρ opisanom velikim kanonskim ansamblom,

$$\rho = e^{\beta(\Omega + \mu N - H)} = \frac{e^{\beta(\mu N - H)}}{\text{Tr } e^{\beta(\mu N - H)}}. \quad (2.41)$$

U prethodnoj formuli operatori su hamiltonijan polja H i broj čestica N . β je $\beta = \frac{1}{k_B T}$, μ je hemijski potencijal a Ω termodinamički potencijal, funkcija koja se dobija iz normiranja $\text{Tr } \rho = 1$. Veličina

$$Z = \text{Tr } e^{-\beta(H-\mu N)} = e^{-\beta\Omega} \quad (2.42)$$

zove se (velika) particiona funkcija.

Očekivane vrednosti opservabli u termodinamičkoj ravnoteži su

$$\langle A \rangle_\beta = \text{Tr } \rho A. \quad (2.43)$$

U skladu sa tim definišu se termalne Green-ove funkcije, npr. gornja G^+ kao

$$G_\beta^+(x; x') = \langle \Phi(x)\Phi(x') \rangle_\beta = \text{Tr } \Phi(x)\Phi(x') e^{\beta(\Omega+\mu N-H)}. \quad (2.44)$$

Ako pretpostavimo da se broj čestica zanemarljivo menja tj. da je $\mu = 0$, važi na primer

$$G_\beta^\pm(t, \vec{r}; t', \vec{r}') = G_\beta^\mp(t + i\beta, \vec{r}; t, \vec{r}'). \quad (2.45)$$

Ova formula dokazuje se na sledeći način. Pošto je

$$\Phi(t, \vec{r}) = e^{iH(t-t_0)} \Phi(t_0, \vec{r}) e^{-iH(t-t_0)}, \quad (2.46)$$

imamo

$$\begin{aligned} G_\beta^+(t, \vec{r}; t', \vec{r}') &= \frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \text{Tr } e^{-\beta H} \Phi(t, \vec{r}) \Phi(t', \vec{r}') \\ &= \frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \text{Tr } e^{-\beta H} \Phi(t, \vec{r}) e^{\beta H} e^{-\beta H} \Phi(t', \vec{r}') \\ &= \frac{1}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \text{Tr } e^{-\beta H} \Phi(t + i\beta, \vec{r}) e^{-\beta H} \Phi(t', \vec{r}') = G_\beta^-(t + i\beta, \vec{r}; t', \vec{r}'). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Odavde, za termalnu funkciju Hadamard-a imamo

$$G_\beta^{(1)}(t, \vec{r}; t', \vec{r}') = G_\beta^{(1)}(t + i\beta, \vec{r}; t, \vec{r}'). \quad (2.48)$$

Sa druge strane, pošto je komutator polja funkcija, važi

$$iG_\beta(t, \vec{r}; t', \vec{r}') = \text{Tr } \rho [\Phi(t, \vec{r}), \Phi(t', \vec{r}')] = [\Phi(t, \vec{r}), \Phi(t', \vec{r}')] \text{Tr } \rho = iG(t, \vec{r}; t', \vec{r}'). \quad (2.49)$$

Termalne Green-ove funkcije se dosta koriste u diskusijama efekata kvantovanja u zakrivljenom prostoru; čini mi se da ih mi nećemo koristiti.

3 Kvantovanje u zakrivljenom prostoru

Osnovni formalizam kvantne teorije polja se može preneti iz ravnog u zakrivljeni prostor direktno i formalno. Osnovni korak koji obezbeđuje kvantovanje, za skalarno polje, je linearnost Klein-Gordon-ove jednačine i egzistencija kompletnog i ortonormiranog skupa njenih partikularnih rešenja. Za to je dovoljno da prostor bude globalno hiperbolički, tj. da ima Cauchy-jevu površ, hiperpovrš prostornog tipa na kojoj se mogu zadati početni uslovi, tako da se evolucijom površi unapred i unazad dobiju sve tačke prostora (i vrednosti polja u njima). To naravno ne znači da polje ne može da se kvantuje na prostorima koji nisu globalno hiperbolički, ali mi ćemo po pravilu razmatrati najjednostavniji slučaj.

Ispostaviće se da pojam čestice nije lako preneti u opštu teoriju relativnosti. U nekim slučajevima, kao što je statičko ili asimptotski ravno prostor-vreme, to je moguće; u drugim slučajevima kao što su prostori sa zatvorenim svetskim linijama, pojam čestice je besmislen. Osim formalno, B&D definišu pojam čestice i u operacionom smislu, uvodeći detektore čestica. To je svakako dobro jer daje odgovor na pitanje šta konkretni posmatrač meri; ali verovatno je često komplikovano. U svakom slučaju, po analogiji sa primerom oscilatora u spoljašnjem polju sa početka, jasno je da gravitacija može da kreira i anihilira čestice. Drugu važan aspekt kvantne teorije polja u zakrivljenom prostoru, koji ćemo na više načina razmatrati, je nepostojanje jednoznačno definisanog vakuuma polja.

3.1 Struktura Riemann-ovog prostora i simetrije

Prostor-vreme koje posmatramo je 4-dimenzionalni Riemann-ov prostor (neke formule ćemo, sledeći B&D, dati i u n dimenzija), sa signaturom $(+ - - -)$, koordinatama x^μ i metrikom $g_{\mu\nu}(x)$,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g = \det g_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Transformacije koordinata tj. *difeomorfizmi* ne menjaju geometrijske karakteristike prostora. Prostor je Riemann-ov, njegove osobine opisujemo pomoću Christoffel-ovih simbola $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$, Riemann-ovog tenzora krivine $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ itd, torzija je nula.

Karakteristike prostora kao i fizička polja opisana su tenzorima, koji se transformišu npr. po

$$A'_{\rho\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} A_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Tenzori se definišu na tenzorskim proizvodima tangentnog prostora (obrazovan vektorima ∂_μ) i kotangentnog prostora (obrazovan 1-formama dx^μ) koji su linearni. Simetrija tangentnog prostora je *lokalna Lorentz-ova simetrija*.

Specifični bazis u kotangentnom prostoru je lokalno-padajući, ili 'moving frame' bazis (tetrada): to je bazis 1-formi i vektora,

$$\theta^\alpha = \theta^\alpha_\mu(x) dx^\mu, \quad e_\alpha = e^\mu_\alpha(x) \partial_\mu, \quad (3.3)$$

u kome su komponente metrike konstantne,

$$g(\theta^\alpha, \theta^\beta) = \eta^{\alpha\beta}, \quad ds^2 = (\theta^0)^2 - (\theta^i)^2. \quad (3.4)$$

(B&D označava $\theta_\mu^\alpha \rightarrow V_\mu^\alpha$.) Važi

$$g^{\mu\nu} = e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \eta^{\alpha\beta}, \quad \eta^{\alpha\beta} = \theta_\nu^\alpha \theta_\nu^\beta g^{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

Pošto lokalno padajući sistem zavisi od tačke u prostoru, važi

$$[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma{}_{\alpha\beta} e_\gamma, \quad (3.6)$$

$C^\gamma{}_{\alpha\beta}$ su strukturne funkcije ili Ricci-jevi rotacioni koeficijenti.

U lokalno padajućem sistemu prirodno se definiše diferencijalna geometrija, a okvir je nešto širi, Riemann-Cartan-ov prostor. Kratko ću sumirati par formula koristeći i dalje notaciju koju koristi Madore, a slična je i u Nakahari. U linearnom prostoru formi spoljašnji izvod je dat sa

$$d = dx^\mu \partial_\mu = \theta^\alpha e_\alpha \quad (3.7)$$

pa imamo i $d\theta^\alpha = -\frac{1}{2} C^\alpha{}_{\beta\gamma} \theta^\beta \theta^\gamma$. Element zapremine dat je sa $dV = \sqrt{-g} dx^0 \dots dx^{n-1} = \theta^0 \theta^1 \dots \theta^{n-1}$, može da se definiše Hodge-dual, antisimetrični tenzor $\epsilon_{01\dots n-1}$ je, zapisan u frame-indeksima ima konstantne vrednosti 0, ± 1 , i tako dalje. Torzija Θ^α i krivina $\Omega^\alpha{}_\beta$ se definišu strukturnim jednačinama iz povezanosti tj. linearne (ili spinske) koneksije, 1-forme $\omega^\alpha{}_\beta = \omega^\alpha{}_{\delta\beta} \theta^\delta$. Imamo

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta \theta^\beta, \quad \Omega^\alpha{}_\beta = d\omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\gamma \omega^\gamma{}_\beta = \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \theta^\gamma \theta^\delta \quad (3.8)$$

a Bianchi-jevi identiteti glase

$$d\Theta^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta \Theta^\beta = \Omega^\alpha{}_\beta \theta^\beta, \quad d\Omega^\alpha{}_\beta + \omega^\alpha{}_\gamma \Omega^\gamma{}_\beta - \Omega^\alpha{}_\gamma \omega^\gamma{}_\beta = 0. \quad (3.9)$$

U ovim formulama podrazumeva se spoljašnji proizvod između 1-formi. Ako je torzija nula, koneksija može jednoznačno da se izrazi preko strukturnih funkcija $C^\alpha{}_{\beta\gamma}$,

$$\omega_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta\gamma} + C_{\gamma\alpha\beta} - C_{\beta\gamma\alpha}). \quad (3.10)$$

Vraćamo se u Riemann-ov prostor. Treća simetrija koja će biti važna su *konformne ili Weyl-ove transformacije*. One transformišu jedan prostor u drugi, odnosno metriku, na sledeći način

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}(x), \quad (3.11)$$

gde pretpostavljamo da je $\Omega(x)$ nesingularna funkcija. Pri konformnim transformacijama imamo, dalje

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} + \Omega^{-1} (\delta_\mu^\rho \Omega_{;\nu} + \delta_\nu^\rho \Omega_{;\mu} - g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \Omega_{;\sigma}) \quad (3.12)$$

$$R^\nu{}_\mu \rightarrow \bar{R}^\nu{}_\mu = \Omega^{-2} R^\nu{}_\mu - (n-2) \Omega^{-1} (\Omega^{-1})_{;\mu\rho} g^{\rho\nu} + \frac{1}{n-2} \Omega^{-n} (\Omega^{n-2})_{;\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \delta_\mu^\nu \quad (3.13)$$

$$R \rightarrow \bar{R} = \Omega^{-2} R + 2(n-1) \Omega^{-3} \Omega_{;\mu\nu} g^{\mu\nu} + (n-1)(n-4) \Omega^{-4} \Omega_{;\mu} \Omega_{;\nu} g^{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Pri tome se skalarno i spinorsko polje transformišu kao

$$\Phi \rightarrow \bar{\Phi} = \Omega^{\frac{2-n}{2}} \Phi, \quad \psi \rightarrow \Omega^{\frac{1-n}{2}} \psi, \quad (3.15)$$

a skalarni laplasijan,

$$\square \Phi = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} \Phi), \quad (3.16)$$

kao

$$\left(\square + \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) \Phi \rightarrow \left(\bar{\square} + \frac{n-2}{4(n-1)} \bar{R} \right) \bar{\Phi} = \Omega^{-\frac{n+2}{2}} \left(\square + \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) \Phi. \quad (3.17)$$

$\frac{2-n}{2}$ i $\frac{1-n}{2}$ su *konformne težine* skalarnog i spinorskog polja.

Videćemo da su neki važni prostori konformno ravni, i tada konformna transformacija omogućava da se Klein-Gordonova jednačina reši u konformno sličnom prostoru i da se onda rešenja vrate, što zapravo omogućava kvantovanje (određivanje Green-ovih funkcija itd.). Znamo od ranije da se pomoću konformne transformacije prostor-vreme može kompaktifikovati, i prikazati preko Penrose-Carter-ovog dijagrama, na kome se onda preglednije ili bolje vidi struktura asimptotskih oblasti i singulariteta; na Penrose-ovom dijagramu svetlosni konus je u originalnom i transformisanom prostoru isti, $ds^2 = 0 \Leftrightarrow d\bar{s}^2 = 0$.

Da nacrtamo Penrose-ov dijagram za 2d prostor Minkovskog. Element dužine

$$ds^2 = dt^2 - dx^2, \quad t, x \in (-\infty, \infty) \quad (3.18)$$

se preslikava, koordinatnom transformacijom

$$u = t - x, \quad v = t + x, \quad u, v \in (-\infty, \infty) \quad (3.19)$$

$$ds^2 = du dv. \quad (3.20)$$

Nova koordinatna transformacija daje

$$u' = 2 \arctan u, \quad v' = 2 \arctan v, \quad u', v' \in (-\pi, \pi) \quad (3.21)$$

$$ds^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{u'}{2} \cos^2 \frac{v'}{2}} du' dv'. \quad (3.22)$$

To znači da konformna transformacija sa

$$\Omega^{-2} = 4 \cos^2 \frac{u'}{2} \cos^2 \frac{v'}{2} \quad (3.23)$$

preslikava prostor Minkovskog, $ds^2 = du dv$, $u, v \in (-\infty, \infty)$, u prostor (sa metrikom Minkovskog) $d\bar{s}^2 = du' dv'$, $u', v' \in (-\pi, \pi)$. Penrose-ov dijagram koji odgovara ovom prostoru, tzv. 'diamond', kvadrat koji stoji na jednom svom temenu je svima poznat pa ga ipak neću crtati.

3.2 Klasična polja

Jednačine za klasična polja slede iz principa najmanjeg dejstva,

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (3.24)$$

a tenzor energije-impulsa je

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (3.25)$$

3.2.1 Skalarno polje

Lagranžijan skalarnog polja je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - (m^2 + \xi R) \Phi^2). \quad (3.26)$$

Ovde je ξ konstanta, parametar sprezanja skalarnog polja sa krivinom: pošto je u prostoru Minkovskog $R = 0$, i da postoji ovaj član se ne bi video u lagranžijanu. Vrednost $\xi = 0$ zovemo *minimal coupling*, a vrednost $\xi = \frac{n-2}{4(n-1)}$ je *conformal coupling*: u 4d konformno sprezanje je za $\xi = \frac{1}{6}$, u 2d za $\xi = 0$. Za konformno spregnuta polja dejstvo je invarijantno na konformne transformacije za $m = 0$; u skladu sa tim, jednačine kretanja za polje Φ i konformno transformisano $\bar{\Phi}$ su iste tj. imaju isti oblik.

Jednačina kretanja koja sledi iz lagranžijana (3.26) je

$$(\square + m^2 + \xi R) \Phi = 0. \quad (3.27)$$

U slučaju da je $m = 0$ i konformni kapling, imamo

$$\left(\square + \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) \Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\bar{\square} + \frac{n-2}{4(n-1)} \bar{R} \right) \bar{\Phi} = 0, \quad (3.28)$$

gde je transformisano polje $\bar{\Phi}$ dato u (3.15).

Skalarni proizvod dve funkcije Φ_1 i Φ_2 koji je u ravnom prostoru definisan sa (2.8), u zakrivljenom prostoru se uopštava na

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int_{\Sigma} d\Sigma^\mu \sqrt{-g_\Sigma} (\Phi_1 (\partial_\mu \Phi_2^*) - (\partial_\mu \Phi_1) \Phi_2^*). \quad (3.29)$$

U gornjem izrazu Σ je hiperpovrš prostornog tipa po kojoj se vrši integracija, $d\Sigma^\mu = d\Sigma \cdot n^\mu$, n^μ je ort normale na Σ orijentisan u budućnost, a $d\Sigma$ element (hiper)površine.

Tenzor energije-impulsa, u slučaju minimalnog kaplinga $\xi = 0$ je

$$T_{\mu\nu}|_{\xi=0} = \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \Phi_{;\rho} \Phi_{;\sigma} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \Phi^2 \quad (3.30)$$

a za $\xi \neq 0$,

$$T_{\mu\nu} = (1 - 2\xi) \Phi_{;\mu} \Phi_{;\nu} + \left(2\xi - \frac{1}{2}\right) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \Phi_{;\rho} \Phi_{;\sigma} + \left(\frac{1}{2} - 2\xi \frac{n-1}{n}\right) g_{\mu\nu} m^2 \Phi^2 - 2\xi \Phi_{;\mu\nu} \Phi + \frac{2\xi}{n} g_{\mu\nu} \Phi \square \Phi - \xi \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + 2\xi \frac{n-1}{n} g_{\mu\nu} R\right) \Phi^2. \quad (3.31)$$

3.2.2 Spinorsko polje

Spinorsko polje $\psi(x)$ je spinor u tangentnom/kotangentnom prostoru, odnosno, transformiše se kao spinor u odnosu na lokalne Lorentz-ove transformacije. U frame indeksima α, β, \dots , γ -matrice su konstantne,

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}, \quad S^{-1} \gamma^\alpha S = \Lambda^\alpha_\beta \gamma^\beta. \quad (3.32)$$

Gravitacioni kovarijantni izvod je dat sa

$$\nabla \psi = (\nabla_\alpha \psi) \theta^\alpha = (e_\alpha \psi + \Gamma_\alpha \psi) \theta^\alpha, \quad (3.33)$$

gde je

$$\Gamma_\alpha = -\frac{i}{2} \omega^\delta_{\alpha\gamma} M_{\delta\gamma} = \frac{1}{4} \omega^\delta_{\alpha\gamma} \gamma_\delta \gamma^\gamma. \quad (3.34)$$

a linearnu (spinsku) koneksiju smo uveli ranije. Iz osobine da je $\bar{\psi}\psi$ skalar, $\nabla_\alpha(\bar{\psi}\psi) = \partial_\alpha(\bar{\psi}\psi)$, a $\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi$ vektor (i Leibniz-ovog pravila) sledi

$$\nabla_\alpha \bar{\psi} = e_\alpha \bar{\psi} - \bar{\psi} \Gamma_\alpha, \quad \nabla_\alpha \gamma_\beta = \Gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \Gamma_\alpha - \omega^\delta_{\alpha\beta} \gamma_\delta. \quad (3.35)$$

Dirac-ov lagranžijan dat je sa

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \bar{\psi} (i\gamma^\alpha \nabla_\alpha - m) \psi, \quad (3.36)$$

ili u koordinatnim indeksima

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \bar{\psi} (i\gamma^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m) \psi, \quad (3.37)$$

gde je

$$\Gamma^\mu = e^\mu_\alpha \Gamma^\alpha, \quad \gamma^\mu = e^\mu_\alpha \gamma^\alpha, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

Dirac-ova jednačina glasi

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m) \psi = 0. \quad (3.39)$$

Tenzor energije-impulsa,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_{(\mu} (\nabla_{\nu)} \psi) - (\nabla_{(\mu} \bar{\psi}) \gamma_{\nu)} \psi). \quad (3.40)$$

3.3 Kvantovanje skalarnog polja, opšti rezultati

Pod pretpostavkom da je prostor globalno hiperbolički, jednačina

$$(\square + m^2 + \xi R) \Phi = 0 \quad (3.41)$$

ima kompletan ortogonalnih skup rešenja $\{u_i(x), u_i^*(x)\}$ koji se u odnosu na skalarni proizvod (3.29) može normirati na sledeći način

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad (u_i^*, u_j^*) = -\delta_{ij}, \quad (u_i, u_j^*) = 0. \quad (3.42)$$

Indeksi, razume se, mogu biti i kontinualni, kao kod ravnih talasa. Opšte rešenje jednačine je

$$\Phi(x) = \sum_i a_i u_i(x) + a_i^* u_i^*(x), \quad (3.43)$$

a koeficijenti su dati sa $a_i = (\Phi, u_i)$, $a_i^* = -(\Phi, u_i^*)$.

Kovarijantno kvantovanje skalarnog polja je pravolinijska generalizacija standardne procedure: kvantno polje $\Phi(x)$ je izraz (3.43) u kome su amplitude a_i, a_i^* zamenjene operatorima anihilacije i kreacije a_i, a_i^\dagger koji zadovoljavaju *algebru*

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad \text{ostali komutatori su } 0. \quad (3.44)$$

Prostor stanja je *Fock-ov prostor*: pretpostavljamo da postoji jedan tj. jedinstveni vakuum, vektor $|0\rangle$ za koji važi

$$a_i |0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (3.45)$$

Višečestična stanja definišu se sa

$$|n_1, \dots, n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! \dots n_j!}} (a_1^\dagger)^{n_1} \dots (a_j^\dagger)^{n_j} |0\rangle \quad (3.46)$$

a ukupni prostor stanja je linearni prostor nad (3.45-3.46).

U ovoj konstrukciji, međutim, postoji ‘inherent ambiguity’ kako kažu B&D: ona je tu zato što, u kontekstu opšte relativnosti, nema preferiranog sistema koordinata x^μ u kojima rešavamo jednačinu kretanja (3.41), kao ni preferiranog izbora vremena x^0 u odnosu na koje su partikularna rešenja pozitivno ili negativno-energetska. U prostoru Minkovskog rukovodimo se Lorentz-invarijantnošću: preferirani izbor koordinata su Descartes-ove koordinate t, x, y, z koje se linearno transformišu pod dejstvom Lorentz-ove grupe, ravni talasi $e^{\pm ikx}$ su invarijantne funkcije, a ako suzimo transformacije na ortohrone, ni znak nulte komponente vektora (energije, vremena) se ne menja. U prostoru Minkovskog, $i \frac{\partial}{\partial t}$ je Killing-ov vektor a mode $u_k^- = e^{-ikx}$ su njegove svojstvene funkcije za pozitivne svojstvene vrednosti ω . Jedna od posledica je da je vakuum invarijantan na Lorentz-ove transformacije, kao i Green-ove funkcije. Doduše, iz ovoga ne sledi jednoznačnost vakuuma: ona sledi iz prirodno definisanih graničnih uslova.

U proizvoljnom zakrivljenom prostoru stvari su drugačije. U principu grupa simetrije prostora ne postoji, specijalno, ni Killing-ov vektor vremenskog tipa, tako da nemamo prirodno definisano vreme. Samim tim nemamo preferirani izbor koordinata, pa su rešenja jednačine kretanja

(3.41) u različitim koordinatama ravnopravna, kao i kvantovanje koje iz njih sledi. U opštem slučaju, vakuumi definisani uslovima (3.45) koji su dobijeni različitim izborima moda $u_{\vec{k}}$ nisu isti. Ovo možemo da vidimo i konkretnije.

Pretpostavimo da, pored ortonormiranih moda $u_i(x)$ u odnosu na koje su polje i njegovo vakuumsko stanje dati/označeni sa

$$\Phi(x) = \sum_i a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x), \quad a_i |0\rangle_a = 0, \quad (3.47)$$

imamo i drugi, takođe ortonormiran i kompletan skup rešenja $v_i(x)$. Za polje i odgovarajući vakuum pišemo

$$\Phi(x) = \sum_i b_i v_i(x) + b_i^\dagger v_i^*(x), \quad b_i |0\rangle_b = 0. \quad (3.48)$$

Pošto su oba skupa rešenja kompletna, jedne funkcije možemo da razvijemo po drugima,

$$v_j = \sum_i \alpha_{ji} u_i + \beta_{ji} u_i^*, \quad (3.49)$$

$$u_i = \sum_j \alpha_{ji}^* v_j - \beta_{ji} v_j^*. \quad (3.50)$$

Lako se može proveriti da druga formula sledi iz prve, i da je $\alpha_{ij} = (v_i, u_j)$, $\beta_{ij} = -(v_i, u_j^*)$. Iz ovih formula (i razvoja polja) sledi da su operatori kreacije i anihilacije povezani *Bogoljubovljevima transformacijama*,

$$a_i = \sum_j \alpha_{ji} b_j + \beta_{ji} b_j^\dagger, \quad (3.51)$$

$$b_j = \sum_i \alpha_{ji}^* a_i - \beta_{ji}^* a_i^\dagger, \quad (3.52)$$

kao i relacije

$$\sum_k \alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^* = \delta_{ij}, \quad \sum_k \alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk} = 0. \quad (3.53)$$

Sada možemo da proverimo delovanje operatora anihilacije a_i na vakuum $|0\rangle_b$: imamo

$$a_i |0\rangle_b = \sum_j \beta_{ji}^* b_j^\dagger |0\rangle_b = \sum_j \beta_{ji}^* |1_j\rangle_b \neq 0, \quad (3.54)$$

$$\langle 0|_b N_{i,a} |0\rangle_b = \langle 0|_b a_i^\dagger a_i |0\rangle_b = \sum_j |\beta_{ji}|^2. \quad (3.55)$$

Odavde vidimo da vakuumi $|0\rangle_a$ i $|0\rangle_b$ nisu isti: u vakuumu $|0\rangle_b$ su jednočestična stanja kreirana operatorima a_i^\dagger , i obrnuto. Vakuumi su isti samo ako je $\beta_{ij} = 0$, odnosno ako je podela na pozitivno i negativno-energetska stanja ista za oba bazisa.

Primetimo da je za računanje efekata prelaza iz jednog u drugi vakuum, npr. (3.55), dovoljno da razvijemo jedan ortonormirani bazis po drugom i odredimo koeficijente, (3.49). Način izbora vakuuma i efekte tj. fenomene vezane za Bogoljubovljeve transformacije bolje ćemo razumeti na primerima, koji upravo slede.

3.4 Kosmološka kreacija čestica

B&D

Kao prvi primer, analogan primeru kreacije ekscitacija harmonijskog oscilatora u spoljašnjem polju iz uvodnog poglavlja, analiziraćemo kvantovanje skalarnog polja u $2d$ kosmologiji, prostoru sa metrikom

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 = a^2(t) (d\eta^2 - dx^2) \quad (3.56)$$

gde je *konformno vreme* η definisano sa $dt = a(t) d\eta$. U dve dimenzije uvek postoji koordinatna transformacija koja prostor preslikava u konformno ravan prostor.

U 2d minimalno i konformno sprezanje je isto i odgovara vrednosti $\xi = 0$, pa ćemo uzeti da je skalarno polje minimalno spregnuto sa gravitacijom. Dalje, pretpostavićemo da faktor skaliranja ima oblik

$$a^2(\eta) = A + B \tanh \rho\eta, \quad (3.57)$$

tj. da u asimptotskoj prošlosti i budućnosti postaje konstantan, $a^2(\eta) \rightarrow A \pm B$, $\eta \rightarrow \pm\infty$. (Sličica je u nastavku.)

Klein-Gordon-ova jednačina

$$(\square + m^2) \Phi = 0 \quad (3.58)$$

se u ovom slučaju svodi na

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi + m^2 a^2(\eta) \Phi = 0. \quad (3.59)$$

Partikularna rešenja dobijaju se razdvajanjem promenljivih,

$$u_k(\eta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \chi_k(\eta), \quad u_k^*(\eta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \chi_k^*(\eta), \quad (3.60)$$

$k \in (-\infty, \infty)$. Za χ_k dobijamo jednačinu Schrödinger-ovog tipa,

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + k^2 + m^2(A + B \tanh \rho\eta) \right) \chi_k(\eta) = 0. \quad (3.61)$$

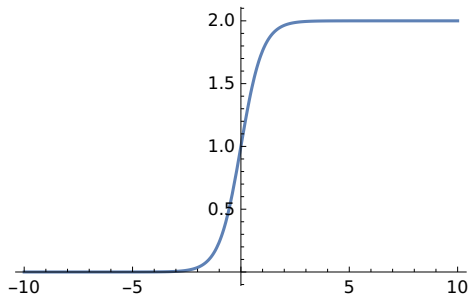
Gornja jednačina može da se reši eksplicitno. Pre nego što to uradimo, da ispitamo asimptotiku rešenja. U asimptotskim oblastima rešenja su ravni talasi,

$$\begin{aligned} \eta \rightarrow -\infty : \quad & \chi_k = e^{\pm i\omega_{in}\eta}, \quad \omega_{in}^2 = k^2 + m^2(A - B), \\ \eta \rightarrow +\infty : \quad & \chi_k = e^{\pm i\omega_{out}\eta}, \quad \omega_{out}^2 = k^2 + m^2(A + B). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Prema tome, imamo asimptotska *in*- i *out*-stanja, i vidimo da su, kao kod harmonijskog oscilatora, prirodno različito definisana, energijama ω_{in} i ω_{out} .

Jednačina (3.61) može da se reši egzaktno u *Mathematici*; da uprostimo, fiksiraćemo da je $A = B = 1$, $\rho = 1$: za ovaj izbor, $\omega_{in}^2 = k^2$, $\omega_{out}^2 = k^2 + 2m^2$.

In[1]:= Plot[1 + Tanh[eta], {eta, -10, 10}]



Out[1]=

In[2]:= Simplify[
 DSolve[chi''[eta] + (k^2 + m^2 + m^2 Tanh[eta]) chi[eta] == 0, chi[eta], eta]]

$$\text{Out[2]= } \left\{ \left\{ \text{chi}[eta] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-\text{Sech}[eta]^2}} \right. \right.$$

$$\left. \left(\begin{aligned} & C[1] \text{Hypergeometric2F1} \left[\frac{\sqrt{-k^2 - m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\sqrt{-k^2 - m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{\sqrt{2}}, \right. \right. \\ & 1 + \sqrt{2} \sqrt{-k^2 - m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}} + \\ & \left. \frac{(k^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}) \sqrt{-2 k^2 - 2 m^2 + 2 \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{2 m^2}, \frac{1}{2} (1 - \text{Tanh}[eta]) \right] + \\ & i \frac{(k^2 + 2 m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}) \sqrt{-2 k^2 - 2 m^2 + 2 \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{m^2} \frac{(k^2 + 2 m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}) \sqrt{-2 k^2 - 2 m^2 + 2 \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{2 m^2} C[2] \\ & \text{Hypergeometric2F1} \left[-\frac{(k^2 + m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}) \sqrt{-2 k^2 - 2 m^2 + 2 \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{2 m^2}, 1 - \right. \\ & \left. \frac{\sqrt{-k^2 - m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{\sqrt{2}} - \frac{(k^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}) \sqrt{-2 k^2 - 2 m^2 + 2 \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{2 m^2}, \right. \\ & 1 - \sqrt{2} \sqrt{-k^2 - m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}} - \\ & \left. \frac{(k^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}) \sqrt{-2 k^2 - 2 m^2 + 2 \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{2 m^2}, \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (1 - \text{Tanh}[eta]) \right] (1 - \text{Tanh}[eta]) - \frac{\sqrt{-k^2 - m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}} (k^2 + 2 m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2})}{\sqrt{2} m^2} \end{aligned} \right)$$

$$\left. \left(\begin{aligned} & (-1 + \text{Tanh}[eta]) \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-k^2 - m^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{\sqrt{2}} + \frac{(k^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}) \sqrt{-2 k^2 - 2 m^2 + 2 \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{4 m^2} \right. \right. \\ & \left. \left. (1 + \text{Tanh}[eta]) \frac{1}{2} - \frac{(k^2 + \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}) \sqrt{-2 k^2 - 2 m^2 + 2 \sqrt{k^4 + 2 k^2 m^2}}}{4 m^2} \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

U gornjem outprintu pokazano je rešenje koje daje *Mathematica*. Kao što treba, dobili smo dva linearno nezavisna rešenja; ona su hipergeometrijske funkcije. Da bismo ih malo uprostiti uvešćemo još dodatnih oznaka, kao u B&D. Već smo rekli,

$$\omega_{in} = k, \quad \omega_{out} = \sqrt{k^2 + 2m^2}, \quad \omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_{out} \pm \omega_{in}), \quad 2\omega_+\omega_- = m^2. \quad (3.63)$$

Iz ovih definicija možemo da prepoznamo različite izraze koji figurišu gore

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\omega_{out}^2 + \omega_{in}^2) &= k^2 + m^2 & \omega_{out}^2 - \omega_{in}^2 &= 4\omega_+\omega_- = 2m^2 \\ \sqrt{k^4 + 2k^2m^2} - k^2 - m^2 &= -2\omega_-^2 & \sqrt{k^4 + 2k^2m^2} + k^2 + m^2 &= 2\omega_+^2 \\ \sqrt{k^4 + 2k^2m^2} + k^2 &= 2\omega_{in}\omega_+ & \sqrt{k^4 + 2k^2m^2} + k^2 + 2m^2 &= 2\omega_{out}\omega_+ \end{aligned} \quad (3.64)$$

i da ih onda pažljivo ispišemo. Dobijamo

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \text{const} \cdot (-1 + \tanh \eta)^{\frac{i\omega_{out}}{2}} (1 + \tanh \eta)^{-\frac{i\omega_{in}}{2}} F\left(i\omega_-, 1 + i\omega_-; 1 + i\omega_{out}; \frac{1 - \tanh \eta}{2}\right) \\ \chi_2 &= \text{const} \cdot (-1 + \tanh \eta)^{-\frac{i\omega_{out}}{2}} (1 + \tanh \eta)^{-\frac{i\omega_{in}}{2}} F\left(i\omega_+, 1 - i\omega_+; 1 - i\omega_{out}; \frac{1 - \tanh \eta}{2}\right) \end{aligned}$$

gde je

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (3.65)$$

hipergeometrijska funkcija. Red je konvergentan za $|z| < 1$, a $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$. Hipergeometrijska funkcija se može napisati na mnogo načina tj. postoji mnogo relacija koje povezuju funkcije za različite vrednosti parametara a, b, c i argumenta z : iscrpan skup formula dat je u A&S. Nas će pre svega zanimati oblik rešenja u asimptotskim oblastima $\eta \rightarrow \pm\infty$, tj. $\tanh \eta \rightarrow \pm 1$. Njega je najlakše odrediti ako preslikamo argument z hipergeometrijske funkcije u 0, jer se iz gornje formule vidi da je $F(a, b; c; 0) = 1$.

Dakle, da bismo fiksirali bazis rešenja (3.60), za svako $k \in (-\infty, \infty)$ nam trebaju dve (linearno nezavisne) funkcije, $\chi_k(\eta)$ i $\chi_k^*(\eta)$. Rešenja koja je *Mathematica* dobila nisu jedno drugom kompleksno konjugovana, tako da bismo mogli npr. da uzmemo χ_1 i χ_1^* (koji je linearna kombinacija χ_1 i χ_2). Očigledno, imamo kontinualno mnogo mogućnosti. Jedan način da prirodno da fiksiramo bazis u_k je zahtevom da u asimptotskoj prošlosti $\eta \rightarrow -\infty$ rešenje postaje *in*-talas, $\chi_k \rightarrow e^{-i\omega_{in}\eta}$, $\chi_k^* \rightarrow e^{i\omega_{in}\eta}$: ovim uslovom je definisan *in-vakuum*. Slično, ako zahtevamo da rešenje asimptotski teži *out*-talasu, $\chi_k \rightarrow e^{-i\omega_{out}\eta}$, $\chi_k^* \rightarrow e^{i\omega_{out}\eta}$ u asimptotskoj budućnosti $\eta \rightarrow +\infty$, definisali smo *out-vakuum*.

Gore dobijena rešenja zavise od promenljive $(1 - \tanh \eta)/2$, pa se njihove osobine lako vide u asimptotskoj budućnosti, $1 - \tanh \eta \rightarrow 0$. Imamo

$$\frac{1 + \tanh \eta}{1 - \tanh \eta} = e^{2\eta} \quad (3.66)$$

pa je za $\eta \rightarrow \infty$

$$\chi_1 \sim e^{-i\omega_{out}\eta}, \quad \chi_2 \sim e^{i\omega_{out}\eta}. \quad (3.67)$$

Dobijena rešenja bi mogla da posluže za definisanje *out*-vakuuma, da su međusobno kompleksno konjugovana. Za ispitivanje asimptotike u prošlosti može se npr. iskoristiti formula

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) \quad (3.68)$$

$$+ (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c) \Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z).$$

Domaći 3 Proverite, sa svim detaljima, asimptotsko ponašanje rešenja χ_1 i χ_2 u prošlosti i budućnosti, kao i ponašanje rešenja u_k^{in} i u_k^{out} datih u nastavku.

Umesto da tražimo linearne kombinacije nađenih rešenja koje tačno zadovoljavaju asimptotske uslove, prepisascemo rešenja koja daju B&D i analizirati ih. Prostor rešenja je generisan ili bazisom $\{u_k^{in}, u_k^{in*}\}$,

$$u_k^{in} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{in}}} e^{ikx-i\omega_+\eta} (2 \cosh \eta)^{-i\omega_-} F\left(1+i\omega_-, i\omega_-; 1-i\omega_{in}; \frac{1+\tanh \eta}{2}\right), \quad (3.69)$$

koji u $\eta \rightarrow -\infty$ ima asimptotiku *in*-talasa pa definiše *in*-vakuum, ili bazisom *out*-stanja $\{u_k^{out}, u_k^{out*}\}$,

$$u_k^{out} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{out}}} e^{ikx-i\omega_+\eta} (2 \cosh \eta)^{-i\omega_-} F\left(1+i\omega_-, i\omega_-; 1+i\omega_{out}; \frac{1-\tanh \eta}{2}\right). \quad (3.70)$$

Ovi skupovi definišu različite vakuume. Njihove osobine i odnos možemo da vidimo ako jedan skup rešenja razvijemo po drugom kao u (3.50),

$$u_k^{in} = \int_{-\infty}^{\infty} dk' (\alpha_{kk'} u_{k'}^{out} + \beta_{kk'} u_{k'}^{out*}). \quad (3.71)$$

Iz oblika rešenja vidimo da je

$$\alpha_{kk'} = \alpha_k \delta(k-k'), \quad \beta_{kk'} = \beta_k \delta(k+k'), \quad (3.72)$$

tako da zapravo treba da odredimo koeficijente u jednačini/identitetu između hipergeometrijskih funkcija

$$u_k^{in} = \alpha_k u_k^{out} + \beta_k u_{-k}^{out*}. \quad (3.73)$$

Kada se zamene vrednosti za u_k^{in} i u_k^{out} , jednačina postaje

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{in}}} e^{ikx-i\omega_+\eta-i\omega_- \log(2 \cosh \eta)} F\left(1+i\omega_-, i\omega_-; 1-i\omega_{in}; \frac{1+\tanh \eta}{2}\right)$$

$$= \frac{\alpha_k}{\sqrt{4\pi\omega_{out}}} e^{ikx-i\omega_+\eta-i\omega_- \log(2 \cosh \eta)} F\left(1+i\omega_-, i\omega_-; 1+i\omega_{out}; \frac{1-\tanh \eta}{2}\right)$$

$$+ \frac{\beta_k}{\sqrt{4\pi\omega_{out}}} e^{ikx+i\omega_+\eta+i\omega_- \log(2 \cosh \eta)} F^*\left(1+i\omega_-, i\omega_-; 1+i\omega_{out}; \frac{1-\tanh \eta}{2}\right).$$

Važi, razume se, $F^*(a, b; c; z) = F(a^*, b^*; c^*; z^*)$.

Ako sada iskoristimo relaciju (3.68), kao i $F(a, b; c; z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b; c; z)$, dobijamo

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{\omega_{in} \omega_{out}}}{\omega_+} \frac{\Gamma(-i\omega_{in}) \Gamma(-i\omega_{out})}{\Gamma(-i\omega_+)^2}, \quad \beta_k = -\frac{\sqrt{\omega_{in} \omega_{out}}}{\omega_-} \frac{\Gamma(-i\omega_{in}) \Gamma(i\omega_{out})}{\Gamma(i\omega_-)^2}. \quad (3.74)$$

Pošto je $\Gamma(iy) \Gamma(-iy) = \pi / (y \sinh \pi y)$, imamo

$$|\alpha_k|^2 = \frac{\sinh^2 \pi \omega_+}{\sinh \pi \omega_{in} \sinh \pi \omega_{out}}, \quad |\beta_k|^2 = \frac{\sinh^2 \pi \omega_-}{\sinh \pi \omega_{in} \sinh \pi \omega_{out}}. \quad (3.75)$$

To znači da, ako je sistem u početnom trenutku $\eta = -\infty$ (i svakom drugom, Heisenberg-ova slika) bio u vakuumu $|0_{in}\rangle$, u konačno trenutku $\eta = +\infty$ posmatrač će detektovati *out*-čestice, koje su se kreirale tokom širenja svemira:

$$\langle 0_{in} | N_{k,out} | 0_{in} \rangle = |\beta_k|^2. \quad (3.76)$$

Domaći 4 Rešiti isti problem i odrediti koeficijente α_k i β_k pretpostavljajući da, umesto $a^2(\eta)$ datog formulom (3.57), imamo step-funkciju, $a^2(\eta) = 2\theta(\eta)$.

3.5 Detektori čestica

B&D

U prethodnom primeru pojam čestice smo definisali pomoću asimptotskih stanja za $t \rightarrow \pm\infty$ (odnosno $\eta \rightarrow \pm\infty$): bazis rešenja koji je u asimptotskoj oblasti $\eta \rightarrow \infty$ prešao u bazis ravnih talasa $u_k \sim e^{-i\omega_{in}\eta + ikx}$ definisao je *in*-vakuum, analogno za *out*-vakuum. Asimptotika je dakle jedan, veoma standardan i koristan, način da definišemo čestice i vakuum. Međutim, u principu tj. u eksperimentu mi prostor-vreme ne poznajemo globalno nego uglavnom lokalno, i ima smisla razmatrati i druge načine. U kosmologiji, videćemo kasnije, definiše se ‘trenutni vakuum’. Što se čestica tiče, možda je najbolje, sa stanovišta fizičke intuicije, da ih definišemo pomoću detektora, a ne izborom bazisa ili koordinatnog sistema.

Model detektora koji se često koristi su predložili Unruh i de Witt. Detektor je tačkasta čestica, kvantnomehantički sistem koji ima svoja (unutrašnja) stanja karakterisana energetske nivoima E , a kreće se po trajektoriji $x^\mu(\tau)$. On interaguje sa skalarnim poljem $\Phi(x)$ interakcionim lagranžijanom

$$L = c m(\tau) \Phi(x(\tau)). \quad (3.77)$$

Interakcija je lokalna; c je mala konstanta interakcije a m je kvantnomehantički operator (vezan za detektor) koji opisuje interakciju: pretpostavili smo da je ona najjednostavnija, ‘monopol-skog’ tipa. Radimo u ravnom prostoru Minkovskog, tako da je vakuum $|0\rangle \equiv |0_M\rangle$ jedinstven, a mode skalarnog polja su ravni talasi (2.7).

Pretpostavimo da je u početnom trenutku detektor u osnovnom stanju $|E_0\rangle$ a polje u vakuumu $|0\rangle$, tj. da je početno stanje sistema $|0, E_0\rangle = |0\rangle \otimes |E_0\rangle$. Kasnije, u toku interakcije, detektor prelazi u stanje više energije $|E\rangle$ a polje u stanje $|\phi\rangle$, pa je ukupno stanje $|\phi\rangle \otimes |E\rangle$. Pošto je c malo, amplitudu verovatnoće prelaza p dobićemo iz teorije perturbacija,

$$p = ic \langle \phi, E | \int_{-\infty}^{\infty} m(\tau) \Phi(x(\tau)) d\tau | 0, E_0 \rangle. \quad (3.78)$$

Ovde je τ sopstveno vreme detektora, $m(\tau)$ je

$$m(\tau) = e^{iH_0\tau} m(0) e^{-iH_0\tau}, \quad H_0|E\rangle = E|E\rangle, \quad (3.79)$$

a H_0 slobodni, ili neperturbovani hamiltonijan detektora. Prema tome, imamo

$$p = ic \langle E | m(0) | E_0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E-E_0)\tau} \langle \phi | \Phi(x(\tau)) | 0 \rangle d\tau. \quad (3.80)$$

Ako polje razvijemo po ravnim talasima,

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3} 2\omega} \left(a_{\vec{k}} e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right), \quad (3.81)$$

vidimo da se zbog oblika interakcije prelazi vrše samo u jednočestična stanja, $|\phi\rangle = |\vec{k}\rangle$,

$$\langle \vec{k} | \Phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3} 2\omega} e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.82)$$

pa je

$$p = ic \langle E | m(0) | E_0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3} 2\omega} e^{i(E-E_0)\tau} e^{i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\tau. \quad (3.83)$$

Kada se detektor kreće po pravoj liniji konstantnom brzinom \vec{v} ,

$$ds^2 = d\tau^2 = dt^2 - \vec{v}^2 dt^2 = (1 - v^2) dt^2, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t = \vec{r}_0 + \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \tau, \quad (3.84)$$

za amplitudu verovatnoće dobijamo

$$p = ic \langle E | m(0) | E_0 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3} 2\omega} e^{i(E-E_0)\tau} e^{i\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)\tau} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} d\tau \quad (3.85)$$

$$= ic \langle E | m(0) | E_0 \rangle \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{2\omega}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_0} \delta\left(E - E_0 + \frac{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right). \quad (3.86)$$

Pošto je $E > E_0$, $\omega > k$ i $v < 1$, vidi se da je verovatnoća prelaza nula: u prostoru Minkovskog, inercijalni detektor u vakuumu ne detektuje čestice.

Međutim, ako se detektor kreće drugačije dobićemo drugačiji rezultat. Izračunajmo, pre svega, ukupnu verovatnoću prelaza P iz vakuuma $|0, E_0\rangle$ u proizvoljno stanje $|E, \phi\rangle$. Imamo

$$P = \sum_{E, \phi} |p|^2 = \sum_{E, \phi} |c|^2 \langle E | m(0) | E_0 \rangle \langle E_0 | m(0) | E \rangle \quad (3.87)$$

$$\times \iint d\tau d\tau' e^{-i(E-E_0)\tau} \langle 0 | \Phi(x) | \phi \rangle \langle \phi | \Phi(x') | 0 \rangle e^{i(E-E_0)\tau'}.$$

Izraz u sredini je jedinica, $\sum_{\phi} |\phi\rangle \langle \phi| = I$, tako da ostaje

$$P = \sum_{E, \phi} |c|^2 |\langle E | m(0) | E_0 \rangle|^2 \mathcal{F}(E - E_0), \quad (3.88)$$

gde smo definisali *funkciju odziva* detektora, \mathcal{F}

$$\mathcal{F}(E - E_0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' e^{-i(E-E_0)(\tau-\tau')} G^+(x(\tau), x(\tau')). \quad (3.89)$$

Odziv detektora zavisi od Wightman-ove funkcije $G^+(x, x') = \langle 0 | \Phi(x) \Phi(x') | 0 \rangle$ izračunate duž putanje detektora.

Ako Wightman-ova funkcija zavisi samo od razlike, $G^+(x(\tau), x(\tau')) = G^+(\tau - \tau') = G^+(\Delta\tau)$, u gornjem integralu možemo da izvršimo smenu promenljivih, $(\tau, \tau') \rightarrow (\tau + \tau', \Delta\tau)$. Integral po $\tau + \tau'$ daće ukupno (beskonačno) vreme \mathcal{T} , pa je funkcija odziva

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{\mathcal{T}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-iE\Delta\tau} G^+(\Delta\tau). \quad (3.90)$$

Izračunaćemo funkciju odziva za detektor u bezmasenom skalarnom polju, čija je Wightman-ova funkcija data sa

$$D^+(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{(t - t' - i\epsilon)^2 - (\vec{r} - \vec{r}')^2}. \quad (3.91)$$

Za kretanje konstantnom brzinom \vec{v} , (3.84),

$$(t - t' - i\epsilon)^2 - (\vec{r} - \vec{r}')^2 = (\Delta\tau - i\epsilon)^2, \quad (3.92)$$

tako da imamo

$$\frac{\mathcal{F}(E - E_0)}{\mathcal{T}} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-i(E-E_0)\Delta\tau} \frac{1}{(\Delta\tau - i\epsilon)^2} = 0 \quad (3.93)$$

jer se, zbog znaka $E - E_0 > 0$, kontura zatvara u donjoj poluravni a pol $\Delta\tau = i\epsilon$ je u gornjoj. Dobili smo rezultat kao i ranije: inercijalni detektor u prostoru Minkovskog ne detektuje čestice.

Međutim, ako se detektor kreće konstantnim ubrzanjem $\vec{a} = a \vec{e}_x$,

$$t = \frac{1}{a} \sinh a\tau, \quad x = \frac{1}{a} \cosh a\tau, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad (3.94)$$

imamo

$$t - t' = \frac{2}{a} \sinh \frac{a\Delta\tau}{2} \cosh a \frac{\tau + \tau'}{2}, \quad x - x' = \frac{2}{a} \sinh \frac{a\Delta\tau}{2} \sinh a \frac{\tau + \tau'}{2}, \quad (3.95)$$

pa je

$$(t - t' - i\epsilon)^2 - (\vec{r} - \vec{r}')^2 = \frac{4}{a^2} \sinh^2 \left(\frac{a\Delta\tau}{2} - i\epsilon a \right), \quad (3.96)$$

$$D^+(\Delta\tau) = -\frac{a^2}{16\pi^2} \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{a\Delta\tau}{2} - i\epsilon a \right)}. \quad (3.97)$$

Da bismo izračunali funkciju odziva, prepisaćemo Wightman-ovu funkciju koristeći

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+b)^n} = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}} \cot b\pi, \quad (3.98)$$

odnosno

$$\frac{1}{\sin^2 \pi x} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-k)^2} \quad (3.99)$$

i $\sinh x = -i \sin ix$. Dobijamo da je

$$D^+(\Delta\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\Delta\tau - 2i\epsilon + \frac{2\pi i}{a} k)^2}. \quad (3.100)$$

Prema tome, funkcija odziva

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{\mathcal{T}} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\tau e^{-iE\Delta\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\Delta\tau - 2i\epsilon + \frac{2\pi i}{a} k)^2} \quad (3.101)$$

liči na (3.93) koju smo prethodno računali, samo što sada imamo polove drugog reda u tačkama $\Delta\tau = \frac{2\pi i}{a} k$, $k \in \mathbb{Z}$ i reziduumi u donjoj poluravnini nisu nula. Dobijamo

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{\mathcal{T}} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} -iE e^{-iE(-\frac{2\pi i}{a})k} = -\frac{E}{2\pi} \frac{1}{e^{\frac{2\pi E}{a}} - 1}. \quad (3.102)$$

Dobili smo Boltzmann-ovu raspodelu: konstantno ubrzani detektor vidi tj. meri ansambl čestica u termodinamičkoj ravnoteži na temperaturi $T = a/2\pi k_B$.

3.6 Konformni vakuum

Videli smo u ranijem odeljku na primeru da se vakuum relativno jednostavno može izabrati u prostoru koji se konformnom transformacijom preslikava u ravan prostor. Izvešćemo sada

ovaj rezultat opštije, za *bezmaseno konformno invarijantno* skalarno polje koje propagira kroz *konformno ravan* n -dimenzioni prostor.

U tom slučaju metrika prostora je $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}$, $\sqrt{-g} = \Omega^n$, a jednačina kretanja za skalarno polje

$$\left(\square + \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) \Phi = 0. \quad (3.103)$$

Pri konformnoj transformaciji

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad \Phi \rightarrow \bar{\Phi} = \Omega^{\frac{n-2}{2}} \Phi, \quad (3.104)$$

(obratite pažnju da je u odnosu na formule iz 3.1, Ω ovde ‘zamenjeno’ sa Ω^{-1}) skalar krivine se preslikava u nulu, $R \rightarrow \bar{R} = 0$, pa je konformno preslikana jednačina kretanja

$$\left(\bar{\square} + \frac{n-2}{4(n-1)} \bar{R} \right) \bar{\Phi} = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \left(\Omega^{\frac{n-2}{2}} \Phi \right) = 0, \quad (3.105)$$

a x^μ su koordinate Minkovskog. Ova jednačina može lako da se reši: bazis $\{\bar{u}_{\vec{k}}, \bar{u}_{\vec{k}}^*\}$ od $\bar{\Phi}$,

$$\bar{u}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n-1} 2\omega}} e^{-ikx}, \quad (3.106)$$

daje rešenja i za polje Φ i razvoj

$$\Phi(x) = \Omega(x)^{\frac{2-n}{2}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \bar{u}_{\vec{k}}(x) + a_{\vec{k}}^\dagger \bar{u}_{\vec{k}}^*(x). \quad (3.107)$$

Vakuum definisan uslovom $a_{\vec{k}}|0\rangle = 0$ naziva se *konformni vakuum*.

Na sličan način mogu da se analiziraju Green-ove funkcije. Feynman-ov propagator npr. treba da zadovoljava jednačinu

$$\left(\square_x + \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) D_F(x-x') = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \delta^n(x-x') = -\Omega^{-n} \delta^n(x-x'). \quad (3.108)$$

Od ranije znamo da se \square i skalarno polje Φ pri konformnoj transformaciji transformišu kao

$$\left(\square + \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) \Phi \rightarrow \left(\bar{\square} + \frac{n-2}{4(n-1)} \bar{R} \right) \bar{\Phi} = \Omega^{\frac{n+2}{2}} \left(\square + \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) \Phi, \quad (3.109)$$

odnosno

$$\left(\square + \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) \Phi = \Omega^{-\frac{n+2}{2}} \left(\bar{\square} + \frac{n-2}{4(n-1)} \bar{R} \right) \Omega^{\frac{n-2}{2}} \Phi, \quad (3.110)$$

pa jednačina (3.108) postaje

$$\left(\square_x + \frac{n-2}{4(n-1)} R \right) D_F(x-x') = \Omega^{-\frac{n+2}{2}}(x) \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Omega^{\frac{n-2}{2}}(x) D_F(x-x') = -\Omega^{-n}(x) \delta^n(x-x'),$$

to jest

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \Omega^{\frac{n-2}{2}}(x) D_F(x-x') = -\Omega^{\frac{2-n}{2}}(x) \delta^n(x-x'). \quad (3.111)$$

Rešenje ove jednačine je

$$D_F(x; x') = \Omega^{\frac{2-n}{2}}(x) \bar{D}_F(x; x') \Omega^{\frac{2-n}{2}}(x'), \quad (3.112)$$

gde je bezmaseni propagator za skalarno polje u prostoru Minkovskog

$$\bar{D}_F(x; x') = \frac{i}{8\pi^2\sigma} - \frac{1}{8\pi} \delta(\sigma), \quad \sigma = \frac{1}{2}(x - x')^2. \quad (3.113)$$

Slični rezultati važe i za ostale Green-ove funkcije.

Možemo na primer da izračunamo Wightman-ovu funkciju u konformno ravnom FLRW prostoru u 4 dimenzije,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(dx^i)^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - (dx^i)^2), \quad (3.114)$$

u konformnom vakuumu dobijenom posle konformne transformacije sa $\Omega^2 = a^2$. Dobijamo, za bezmaseno polje,

$$D^+(x; x') = -\frac{1}{a(\eta)} \frac{1}{4\pi^2(x - x')^2} \frac{1}{a(\eta')}. \quad (3.115)$$

Na osnovu ovog rezultata možemo da analiziramo da li *slobodno-padajući* posmatrač (detektor) detektuje čestice u svemiru koji se širi ili ne. Pošto gledamo comoving-geodezike, $x^{i'} = x^i$, $d\tau = a(\eta) d\eta$, $\tau = \int a(\eta) d\eta$. Wightmann-ova funkcija postaje

$$D^+(\eta - \eta') = -\frac{1}{a(\eta)} \frac{1}{4\pi^2(\eta - \eta' - i\epsilon)^2} \frac{1}{a(\eta')}. \quad (3.116)$$

odavde se za funkciju odziva dobija

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(E) &= -\frac{1}{4\pi^2} \iint d\eta d\eta' a(\eta)a(\eta') \frac{1}{a(\eta)(\eta - \eta' - i\epsilon)^2 a(\eta')} e^{-iE \int_{\eta'}^{\eta} a(\eta'') d\eta''} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \iint d\eta d\eta' \frac{e^{-iE \int_{\eta'}^{\eta} a(\eta'') d\eta''}}{(\eta - \eta' - i\epsilon)^2} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

U principu, u FLRW prostorima u vakuumu *slobodno-padajući* pomatrač detektuje čestice.

4 FLRW kosmologija

Verovatno najvažnija primena kvantne teorije polja u zakrivljenom prostoru je u kosmologiji, jer se rezultati koje ona daje mogu povezati sa merenjima spektra i fluktuacija u CMB zračenju, kao i sa modelima inflacije.

Prostorno-vremenski modeli kosmologije obično se baziraju na *kosmološkom principu*, koji kaže da, na velikim skalama, svemir svim posmatračima izgleda isto. Ovaj princip se matematički prevodi kao homogenost i izotropnost: izotropnost svemira (gledanog sa Zemlje) sledi iz astronomskih merenja, i tačna je do 10^{-5} (na ugaonoj skali). Homogenost sa druge strane znači pretpostavku da položaj Zemlje (Sunca, Mlečnog puta) u svemiru nije ni po čemu specijalan, izdvojen.

Najopštiji homogeni i izotropni prostori u 4d su opisani Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-ovom metrikom,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad (4.1)$$

$$= dt^2 - a^2(t) \left(\frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right) = a^2(\eta) \left(d\eta^2 - d\mathcal{X}^2 - f^2(\mathcal{X}) d\Omega^2 \right). \quad (4.2)$$

FLRW metrika zavisi od vremena, i ta zavisnost data je *faktorom skaliranja* $a(t)$ ili $a(\eta)$: obe ove funkcije označavaju istu veličinu (a ne istu funkcionalnu zavisnost od argumenta), $a(\eta) = a(\eta(t))$. Konformno vreme η smo već ranije uveli, $\eta = \int^t \frac{dt}{a(t)}$; t se nekada zove kosmičko vreme. $d\Omega^2$ je element dužine na jediničnoj sferi, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. U metrici (4.2) osim vremena kao promenljivu imamo i diskretni parametar K koji opisuje prostorne preseke, tj. je prostor: on je *ravan* za $K = 0$, *zatvoren* za $K = 1$ i *otvoren*, hiperbolički, za $K = -1$. Radijalna promenljiva je ili r , definisana tako da daje površinu sfere $4\pi r^2$, ili \mathcal{X} koja jednaka radijusu sfere. Ove dve promenljive su iste u ravnom prostoru, ali su u zakrivljenom prostoru različite:

$$r = f(\mathcal{X}) = \begin{cases} \sin \mathcal{X}, & 0 \leq \mathcal{X} \leq 2\pi, & K = 1 \\ \mathcal{X}, & 0 \leq \mathcal{X} < \infty, & K = 0 \\ \sinh \mathcal{X}, & 0 \leq \mathcal{X} \leq \infty, & K = -1 \end{cases}. \quad (4.3)$$

4.1 Ravni prostorni preseci, mode

B&D

Za $K = 0$ prostorni deo FLRW prostora je ravan, a celo prostor-vreme je konformno ravno. Činjenica da je prostor ravan znači da će rešenja jednačina kretanja za klasično polje u prostornom delu biti ravni talasi $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, ali treba precizno da se vidi uticaj faktora skaliranja odnosno krivine. Već smo videli da je u konformno-ravnom prostoru polje jednostavno kvantovati: ovde ćemo ponoviti odgovarajuće korake za opšte (masivno, proizvoljno ξ) skalarno polje u n dimenzija.

Ravan FLRW prostor je definisan metrikom

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - (dx^i)^2), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \sqrt{-g} = a^n, \quad (4.4)$$

a jednačina kretanja za skalarno polje spregnuto sa krivinom je

$$(\square + m^2 + \xi R) \Phi = 0, \quad (4.5)$$

odnosno

$$(\square + \xi(n)R) \Phi + (m^2 + (\xi - \xi(n))R) \Phi = 0, \quad \xi(n) = \frac{n-2}{4(n-1)}. \quad (4.6)$$

Da bismo iskoristili činjenicu da je prostor konformno ravan, treba da izvršimo konformnu transformaciju metrike, $g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}$; pri ovoj transformaciji $\Phi \rightarrow \bar{\Phi} = a^{\frac{n-2}{2}} \Phi$. Videli smo u (3.110) kako se deo jednačine kretanja sa laplasijanom transformiše:

$$(\square + \xi(n)R) \Phi = \Omega^{-\frac{n+2}{2}} (\bar{\square} + \xi(n)\bar{R}) \bar{\Phi}. \quad (4.7)$$

Pošto je $\bar{R} = 0$, jednačina (4.6) postaje

$$a^{-\frac{n+2}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \partial_i^2 \right) a^{\frac{n-2}{2}} \Phi(x) + (m^2 + (\xi - \xi(n))R) \Phi(x) = 0. \quad (4.8)$$

Pošto faktor skaliranja zavisi samo od vremena, $a = a(\eta)$, $R = R(\eta)$, u poslednjoj jednačini možemo da razdvojimo prostorne i vremensku promenljivu. Partikularna rešenja su

$$u_{\vec{k}}(x) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{(2\pi)^{n-1}}} a(\eta)^{\frac{2-n}{2}} \chi_{\vec{k}}(\eta). \quad (4.9)$$

Zamenom ovog rešenja u (4.8) dobijamo jednačinu za $\chi_{\vec{k}}(\eta) = \chi_k(\eta)$,

$$\frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + k^2 \chi_k + (m^2 + (\xi - \xi(n))R) a^2 \chi_k = 0. \quad (4.10)$$

U 4d je $\xi(4) = 1/6$ a skalar krivine u FLRW prostoru je

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a^3} + \frac{K}{a^2} \right), \quad (4.11)$$

gde je $\dot{a} = \frac{da}{d\eta}$. U našem slučaju, $K = 0$, $R = 6\ddot{a}/a^3$, pa jednačina za χ_k postaje

$$\ddot{\chi}_k + \left(k^2 + m^2 a^2 + (6\xi - 1) \frac{\ddot{a}}{a} \right) \chi_k = 0. \quad (4.12)$$

Njena konkretna rešenja zavise razume se od funkcije skaliranja $a(\eta)$.

Još da prodiskutujemo normiranje,

$$(u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) = \delta^{n-1}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (4.13)$$

Skalarni proizvod može da se računa na hiperpovršni Σ konstantnog vremena, $\eta = \text{const}$,

$$\sqrt{-g_\Sigma} = a^{n-1}, \quad d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma = n^\mu dx^1 \dots dx^{n-1}, \quad (4.14)$$

a jedinični vektor ortogonalan na Σ je $n^\mu = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \eta}$. Kada se gornje relacije i rešenja (4.9) uvrste u skalarni proizvod, dobijamo

$$\begin{aligned} (u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}'}) &= \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^{n-1}} \iint dx^1 \dots dx^{n-1} a^{n-2} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} \left(a^{\frac{2-n}{2}} \chi_k \frac{d}{d\eta} (a^{\frac{2-n}{2}} \chi_{k'}^*) - a^{\frac{2-n}{2}} \chi_{k'}^* \frac{d}{d\eta} (a^{\frac{2-n}{2}} \chi_k) \right) \\ &= -i (\chi_k \dot{\chi}_{k'}^* - \dot{\chi}_k \chi_{k'}^*). \end{aligned}$$

Poslednji izraz je vronskijan funkcija χ_k i χ_k^* , pa se uslov normiranja rešenja $u_{\vec{k}}$ svodi na uslov za vronskijan vremenski zavisnih funkcija χ_k ,

$$\chi_k \dot{\chi}_k^* - \dot{\chi}_k \chi_k^* = i. \quad (4.15)$$

4.2 Opšti slučaj, mode

B&D

I u opštem slučaju FLRW prostora mogu se naći mode skalarnog polja, samo što umesto laplasijana u ravnom prostoru $\Delta_{K=0}^{(n-1)}$ imamo laplasijan $\Delta_{K=\pm 1}^{(n-1)}$ na sferi ili hipersferi, a umesto ravnih talasa imamo (hiper)sferne harmonike. Ispisaćemo rešenja u $n = 4$ dimenzije. Jednačina za skalarno polje je

$$a^{-3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \Delta^{(3)} \right) a \Phi(x) + \left(m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right) \Phi(x) = 0, \quad (4.16)$$

gde je R dato formulom (4.11), a laplasijan je $\Delta^{(3)}$ je

$$\Delta^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_i \sqrt{h} h^{ij} \partial_j \quad (4.17)$$

h_{ij} je prostorni deo metrike iz (4.1). Svojtstveni bazis od $\Delta^{(3)}$ označićemo sa $\mathcal{Y}_k(\vec{r})$,

$$\Delta^{(3)} \mathcal{Y}_k(\vec{r}) = -(k^2 - K) \mathcal{Y}_k(\vec{r}). \quad (4.18)$$

Na 3-sferi bazisne funkcije su (uopšteni) sferni harmonici a bazis je diskretan; na hiperboličkom prostoru bazis hipersfernih harmonika je kontinualan. Harmonici su ortonormirani,

$$\int d^3r \sqrt{h} \mathcal{Y}_k(\vec{r}) \mathcal{Y}_{k'}^*(\vec{r}) = \delta(\vec{k}, \vec{k}'), \quad (4.19)$$

gde je δ -funkcija definisana u odnosu na meru integracije na (hiper)sferi $d\mu$,

$$\int d\mu f(\vec{k}') \delta(\vec{k}, \vec{k}') = f(\vec{k}), \quad (4.20)$$

$$d\mu = \begin{cases} d^3k & K = 0 \\ \sum_{k,J,M} & K = 1, \quad J = 0, 1, \dots, k-1, \quad M = -J, -J+1, \dots, J \\ \int_0^\infty dk \sum_{J,M} & K = -1, \quad J = 0, 1, \dots, \quad M = -J, -J+1, \dots, J. \end{cases} \quad (4.21)$$

Eksplicitno, (hiper)sferni harmonici za $K = \pm 1$ su

$$\mathcal{Y}_k(\vec{r}) = \Pi_{kJ}^\pm(\mathcal{X}) Y_J^M(\theta, \varphi), \quad (4.22)$$

gde je $\Pi_{kJ}^+(\mathcal{X}) = \Pi_{-ik,J}^-(-i\mathcal{X})$ i

$$\Pi_{kJ}^-(\mathcal{X}) = \sqrt{\frac{2}{\pi k^2(k^2+1)\dots(k^2+J^2)}} \sinh^J \mathcal{X} \left(\frac{d}{d \cosh \mathcal{X}} \right)^{J+1} \cos k\mathcal{X}. \quad (4.23)$$

Opšte rešenje za skalarno polje je

$$\Phi(x) = \int d\mu (a_{\vec{k}} u_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger u_{\vec{k}}^*), \quad (4.24)$$

gde je

$$u_{\vec{k}} = a^{-1}(\eta) \mathcal{Y}_k(\vec{r}) \chi_k(\eta), \quad (4.25)$$

a vremenski deo funkcije $\chi_k(\eta)$ zadovoljava jednačinu (4.12).

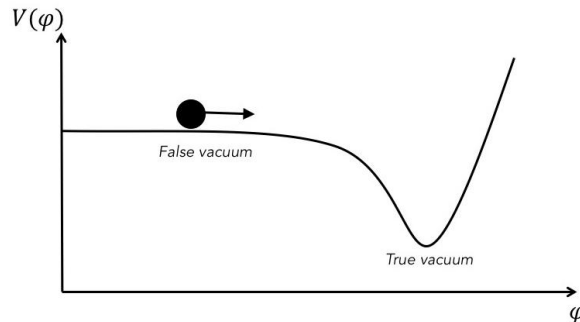
4.3 Efektivni hamiltonijan

M&W

Pre nego što pređemo na kvantovanje i definiciju vakuuma, da izvedemo na drugi način jednačinu kretanja za skalarno polje. Iako je razmatranje specijalnih slučajeva (konformno ili minimalno sprezanje, bezmaseno polje itd.) koji su egzaktno rešivi važno i u principu (kao uvek u fizici), a i da se tačno razumeju novi fenomeni u zakrivljenom prostoru, skalarno polje u kosmologiji nema specijalne osobine: obično se razmatra dejstvo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - V(\Phi) \right), \quad (4.26)$$

gde je najjednostavniji potencijal koji može da objasni inflaciju dat na sličici dole.



Onda se razmatraju karakteristične oblasti promene vrednosti polja, npr. oblast koja je na slici označena sa ‘false vacuum’ gde je $\Phi \sim \text{const}$, ili okolina minimuma gde je $V(\Phi) \sim \Phi^2$.

Dalje, sa velikom eksperimentalnom tačnošću prostor je ravan (ravan prostorni presek FLRW svemira). Zato se M&W fokusiraju na kvantovanje minimalno kuplovanog masivnog polja u prostorno ravnoj FLRW kosmologiji,

$$ds^2 = a^2(\eta) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad x^0 = \eta. \quad (4.27)$$

Klasične jednačine smo već napisali za opšte ξ , sada ćemo razmatrati $\xi = 0$ i izvesti ih malo drugačije. Ako u dejstvo skalarnog polja zamenimo FLRW metriku (4.27), dobijamo

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x a^2 (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - m^2 a^2 \Phi^2). \quad (4.28)$$

Kao ranije, jednostavnije i prirodno je umesto Φ uvesti polje $\chi = \bar{\Phi}$,

$$\chi(x) = a(\eta) \Phi(x). \quad (4.29)$$

Koristeći da je

$$a^2 \dot{\Phi}^2 = \dot{\chi}^2 + \chi^2 \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{d}{d\eta} \left(\chi^2 \frac{\dot{a}}{a} \right), \quad (4.30)$$

dobijamo da je, do na površinski član, dejstvo jednako

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left(\dot{\chi}^2 - (\nabla \chi)^2 - \left(m^2 a^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right) \chi^2 \right). \quad (4.31)$$

Jednačina kretanja koja se dobija za polje χ ,

$$\ddot{\chi} - \Delta \chi + \left(m^2 a^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right) \chi = 0 \quad (4.32)$$

zove se (u nekoj varijanti, obično u njoj figuriše potencijal V) Mukhanov-Sasaki-jeva jednačina. Ona je razume se ista kao (4.8) za $\xi = 0$, $n = 4$. I partikularna rešenja su ista – ravni talasi u prostornom delu,

$$\mathcal{U}_{\vec{k}}(x) = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{(2\pi)^3}} u_k(\eta), \quad (4.33)$$

s tim što u ovoj formuli nemamo kao u (4.9) faktor $a(\eta)$, jer pišemo mode polja χ . Opšte rešenje je

$$\chi(x) = \int d^3k \left(a_{\vec{k}} \mathcal{U}_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger \mathcal{U}_{\vec{k}}^* \right) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left(a_{\vec{k}} u_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{k}}^\dagger u_k^*(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right). \quad (4.34)$$

(U nastavku ću pokušati da upodobim M&W oznake, da budu analogne dosad korišćenim, B&D. Ako uočite greške, javite! trebalo bi da se svodi na $v_k^* \rightarrow \sqrt{2} u_k$.)

Pri tome, mode $u_k(\eta)$ zadovoljavaju jednačinu za oscilator

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2(\eta) u_k = 0, \quad (4.35)$$

gde je frekvenca data sa

$$\omega_k^2 = k^2 + m_{eff}^2 = k^2 + m^2 a^2 - \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (4.36)$$

a *efektivna masa* m_{eff} zavisi od vremena. Funkcije u_k takođe normiramo pomoću vronskijana,

$$W(u_k, u_k^*) = u_k \dot{u}_k^* - \dot{u}_k u_k^* = i. \quad (4.37)$$

Sa dejstva i lagranžijana za polje χ može se preći na hamiltonijan. Generalisani impuls je $\pi = \dot{\chi}$, pa se za hamiltonijan dobija

$$H(\eta) = \frac{1}{2} \int d^3r (\pi^2 + (\nabla\chi)^2 + m_{eff}^2 \chi^2). \quad (4.38)$$

4.4 Kvantovanje

U sledećem koraku kanonski kvantujemo polje χ : ili postuliranjem komutatora $[\chi(\eta, \vec{r}), \pi(\eta, \vec{r}')] = i\delta(\vec{r} - \vec{r}') +$ ostali nula, ili pomoću $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') +$ ostali komutatori nula. Međutim, ostaje netrivialan izbor vakuuma, jer umesto funkcija u_k, u_k^* za linearno nezavisna rešenja jednačine (4.35) možemo da uzmemo njihovu linearnu kombinaciju,

$$v_k = \alpha_k u_k + \beta_k u_k^*, \quad v_k^* = \beta_k^* u_k + \alpha_k^* u_k^*, \quad (4.39)$$

pri čemu normiranje $W(v_k, v_k^*) = i$ daje uslov

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (4.40)$$

Novi bazis daje i novi razvoj za polje tj. druge operatore kreacije i anihilacije,

$$\chi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} (b_{\vec{k}} v_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + b_{\vec{k}}^\dagger v_k^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} (b_{\vec{k}} v_k + b_{-\vec{k}}^\dagger v_k^*) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (4.41)$$

jer funkcija v_k , kao i u_k , zavisi samo od $k = |\vec{k}|$. Izjednačavanjem

$$a_{\vec{k}} u_k + a_{-\vec{k}}^\dagger u_k^* = b_{\vec{k}} v_k + b_{-\vec{k}}^\dagger v_k^* \quad (4.42)$$

dobijamo Bogoljubovljevu transformaciju analognu sa (3.51-3.52),

$$a_{\vec{k}} = \alpha_k b_{\vec{k}} + \beta_k^* b_{-\vec{k}}^\dagger, \quad b_{\vec{k}} = \alpha_k^* a_{\vec{k}} - \beta_k^* a_{-\vec{k}}^\dagger. \quad (4.43)$$

Pri tome, $\alpha_k = -iW(v_k, u_k^*)$, $\beta_k = iW(v_k, u_k)$. Kao i ranije, možemo da definišemo različite vakuume $|0\rangle_a$ i $|0\rangle_b$,

$$a_{\vec{k}} |0\rangle_a = 0, \quad \text{odnosno} \quad b_{\vec{k}} |0\rangle_b = 0, \quad (4.44)$$

i važi

$$\langle 0|_b N_{a,\vec{k}} |0\rangle_b = |\beta_k|^2 \delta(0), \quad (4.45)$$

a pošto je $\beta_k = \beta_{|\vec{k}|}$ raspodela je izotropna.

U stvari, u ovom slučaju možemo tačno da izrazimo jedan vakuum preko drugog: ispostavlja se npr. da je $|0\rangle_b$ ‘squeezed state’, eksponent kvadratne kombinacije kreacionih operatora $a_{\vec{k}}^\dagger$,

$$|0\rangle_b = \prod_{\otimes \vec{k}} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_k|}} e^{\frac{\beta_k^*}{2\alpha_k^*} a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger} |0\rangle_a = \prod_{\otimes \vec{k}} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_k|}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_k^*}{2\alpha_k^*} \right)^n |n, \vec{k}; n, -\vec{k}\rangle_a. \quad (4.46)$$

Da bismo dokazali gornju jednakost, posmatraćemo samo jedan pravac \vec{k} ; konačni rezultat je proizvod po svim pravcima. Označimo odgovarajući vektor u tenzorskom proizvodu sa $|0\vec{k}\rangle_b$. Njega možemo da razvijemo po višečestičnim stanjima $|m, \vec{k}; n, -\vec{k}\rangle_a \equiv |m, n\rangle_a$

$$|0\vec{k}\rangle_b = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{c_{mn}}{\sqrt{m!n!}} a_{\vec{k}}^{\dagger m} a_{-\vec{k}}^{\dagger n} |0\rangle_a = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} |m, n\rangle_a, \quad (4.47)$$

i važi

$$b_{\vec{k}} |0\vec{k}\rangle_b = (\alpha_k^* a_{\vec{k}} - \beta_k^* a_{-\vec{k}}^\dagger) |0\vec{k}\rangle_b = 0, \quad (4.48)$$

$$b_{-\vec{k}} |0\vec{k}\rangle_b = (\alpha_k^* a_{-\vec{k}} - \beta_k^* a_{\vec{k}}^\dagger) |0\vec{k}\rangle_b = 0. \quad (4.49)$$

Ako ispišemo relaciju (4.48) dobijamo

$$\begin{aligned} 0 = b_{\vec{k}} |0\vec{k}\rangle_b &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{c_{mn}}{\sqrt{m!n!}} (\alpha_k^* a_{\vec{k}} - \beta_k^* a_{-\vec{k}}^\dagger) a_{\vec{k}}^{\dagger m} a_{-\vec{k}}^{\dagger n} |0\rangle_a \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_k^* c_{mn} \sqrt{m} |m-1, n\rangle_a - \beta_k^* \sqrt{n+1} c_{mn} |m, n+1\rangle_a \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \alpha_k^* c_{m+1,n} \sqrt{m+1} |m, n\rangle_a - \beta_k^* \sqrt{n} c_{m,n-1} |m, n\rangle_a, \end{aligned} \quad (4.50)$$

odnosno

$$c_{m+1,n} = \sqrt{\frac{n}{m+1}} \frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*} c_{m,n-1}. \quad (4.51)$$

Slično, iz relacije (4.49) sledi

$$c_{m+1,n} = \sqrt{\frac{m+1}{n}} \frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*} c_{m,n-1}, \quad (4.52)$$

odnosno, $c_{m+1,n} \neq 0$ samo ako je $m+1 = n$, to jest

$$c_{mn} = \delta_{mn} c_{nn}, \quad c_{nn} = \frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*} c_{n-1,n-1}. \quad (4.53)$$

Stanje $|0\vec{k}\rangle_b$ je izotropno, sadrži isti broj $-\vec{k}$ i \vec{k} -čestica. Iz uslova da je norma stanja $|0\vec{k}\rangle_b$,

$$|0\vec{k}\rangle_b = C_k e^{\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*} a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger} |0\rangle_a \quad (4.54)$$

jednaka jedinici, dobijamo da je $C_k = \sqrt{1 - \frac{|\beta_k|^2}{|\alpha_k|^2}} = \frac{1}{|\alpha_k|}$.

Da bismo dobili ukupni vakuum treba da izmnožimo sva stanja, $\prod_{\otimes, \vec{k}} |0\vec{k}\rangle_b$; ali stanje $|0\vec{k}\rangle_b$ ćemo dobiti duplo, za vrednosti \vec{k} i $-\vec{k}$. Zato je vakuum $|0\rangle_b$ u stvari ‘koren’ proizvoda po svim \vec{k} ,

$$|0\rangle_b = \prod_{\otimes \vec{k}} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_k|}} e^{\frac{\beta_k^*}{2\alpha_k} a_k^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger} |0\rangle_a . \quad (4.55)$$

Domaći 5 Izvesti ovaj dokaz precizno, sa svim detaljima.

4.5 Trenutni vakuum

M&W

Iz prethodne i ranijih diskusija je jasno da se izbor vakuuma svodi na izbor skupa ortonormiranih moda polja. Taj skup nekad možemo na prirodan način da identifikujemo na osnovu asimptotike, tj. ponašanja polja u beskonačno udaljenoj prošlosti i budućnosti; nekada postoji prirodan izbor koordinata ili tetrade koji implicira i vakuum. U kosmologiji u principu ne znamo celu evoluciju svemira tj. ne poznajemo globalne osobine prostora: onda ima smisla da vakuum izaberemo lokalno odnosno trenutno. U momentu η_0 *trenutni vakuum* je stanje najniže energija hamiltonijana, $H(\eta_0)$.

Da bismo našli ovo stanje, treba da izračunamo očekivanu vrednost $\langle H \rangle = \langle 0|H(\eta_0)|0\rangle$ i da je minimizujemo izborom funkcija $u_k(\eta)$ tj. vakuuma $|0\rangle$. Imamo

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \iiint \frac{d^3r d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}} (\dot{u}_k \dot{u}_{k'} - (\vec{k} \cdot \vec{k}') u_k u_{k'} + m_{eff}^2 u_k u_{k'}) \right. \\ &\quad a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}'}^\dagger e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}} (\dot{u}_k^* \dot{u}_{k'}^* - (\vec{k} \cdot \vec{k}') u_k^* u_{k'}^* + m_{eff}^2 u_k^* u_{k'}^*) \\ &\quad \left. a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'}^\dagger e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} (\dot{u}_k \dot{u}_{k'}^* + (\vec{k} \cdot \vec{k}') u_k u_{k'}^* + m_{eff}^2 u_k u_{k'}^*) + \text{h.c.} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3k \left(a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}} F_k + a_{\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger F_k^* + ((2a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \delta^3(0)) E_k \right), \end{aligned} \quad (4.56)$$

gde je

$$F_k = \dot{u}_k^2 + \omega_k^2(\eta) u_k^2, \quad E_k = |\dot{u}_k|^2 + \omega_k^2(\eta) |u_k|^2. \quad (4.57)$$

Za vakuum $|0\rangle_a$ definisan sa $a_{\vec{k}}|0\rangle_a = 0$ imamo

$$\langle 0|_a H(\eta_0) |0\rangle_a = \frac{1}{2} \delta(0) \int d^3k E_k(\eta_0) = \frac{1}{2} \delta(0) \varepsilon(\eta_0), \quad (4.58)$$

pa treba da minimizujemo

$$\varepsilon(\eta_0) = \int d^3k \left(|\dot{u}_k(\eta_0)|^2 + \omega_k^2(\eta_0) |u_k(\eta_0)|^2 \right). \quad (4.59)$$

Pošto je u poslednjoj jednačini podintegralni izraz pozitivan, treba da minimizujemo energiju svake mode u_k . Ako razdvojimo amplitudu i fazu,

$$u_k = r_k e^{i\alpha_k}, \quad \dot{u}_k = (\dot{r}_k + ir_k \dot{\alpha}_k) e^{i\alpha_k}, \quad (4.60)$$

iz normiranja $u_k \dot{u}_k^* - \dot{u}_k u_k^* = i$ imamo $\dot{\alpha}_k = -1/(2r_k^2)$, pa je

$$|\dot{u}_k|^2 + \omega_k^2 |u_k|^2 = \dot{r}_k^2 + \frac{1}{4r_k^2} + \omega_k^2 r_k^2. \quad (4.61)$$

Minimum energije odgovara uslovu $\dot{r}_k(\eta_0) = 0$, $r_k(\eta_0) = 1/\sqrt{2\omega_k(\eta_0)}$, odnosno

$$u_k(\eta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k(\eta_0)}} e^{i\alpha_k(\eta_0)}, \quad \dot{u}_k(\eta_0) = -i \sqrt{\frac{\omega_k(\eta_0)}{2}} e^{i\alpha_k(\eta_0)} = -i \omega_k u_k(\eta_0). \quad (4.62)$$

Primetimo da, ako je

$$\omega_k^2 = k^2 + m_{eff}^2 = k^2 + m^2 a^2 - \frac{\ddot{a}}{a} < 0 \quad (4.63)$$

energija nema minimum.

Ako vratimo uslove (4.62) u definicije (4.57) vidimo da, osim što je u trenutku η_0 , vrednost $E_k(\eta_0)$ minimalna, i $F_k(\eta_0) = 0$. To znači da je u vakuumu određenom sa (4.62) *hamiltonijan (trenutno) dijagonalan*.

Domaći 6 Pokažite sledeće: trenutni vakuum ne zavisi od vremena samo ako je $F_k(\eta) = 0$ za sve η . Taj uslov ima rešenje

$$u_k(\eta) = C e^{\pm i \int \omega_k d\eta}. \quad (4.64)$$

Međutim, (4.64) se poklapa sa rešenjem jednačine (4.35) samo ako je $\omega_k \neq \omega_k(\eta)$, konstanta.

4.6 Pojam čestice i krivina

U kvantnoj mehanici u ravnom prostoru pod pojmom čestice obično se podrazumeva talasni paket koji je dobro lokalizovan oko određene vrednosti impulsa k , odnosno oko rešenja $e^{ikx - i\omega t}$: to znači da je neodređenost impulsa $\Delta k \ll k$. Pošto je, iz relacija neodređenosti, dimenzija talasnog paketa $l \sim (\Delta k)^{-1}$, uslov za čestičnu interpretaciju je $l \gg k^{-1}$.

Međutim, ako je prostor zakrivljen i u oblasti dimenzije l geometrija značajno fluktuiraju, ravni talasi nisu rešenja jednačina za polje, pa samim tim nemamo uobičajenu čestičnu interpretaciju. Ona je moguća samo ako je skala krivine l_R (skala na kojoj je prostor približno ravan), $l_R > k^{-1}$. Drugim rečima, u prostorno ravnim FLRW prostorima vakuum i čestice neće biti uvek dobro definisani, odnosno nisu definisani za sve vrednosti k . To se vidi i iz formule (4.63) za frekvencu, čiji kvadrat može da bude negativan i tada odgovarajuća rešenja nisu oscilatorna po vremenu nego eksponencijalna. Sa druge strane, treba da uočiti da, koliko god da je l_R malo, za dovoljno velike impulse k koncept čestice ima smisla, i važiće $\omega_k^2 \approx k^2$, $u_k(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{k}} e^{ik\eta}$.

4.7 Kvantne fluktuacije

Za kosmologiju su, osim očekivanih vrednosti skalarnog polja, bitne i njegove fluktuacije: očekivana vrednost kvadrata polja i njegova zavisnost od k . Ovo je jedan od podataka koji se meri, odnosno može izvesti iz raspodele CMB zračenja. Zato ćemo izračunati ove fluktuacije, prvo u ravnom prostoru. Imamo

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \Phi(t, \vec{r}) \Phi(t, \vec{r}') | 0 \rangle &= \\
&= \iint \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega\omega'}} \langle 0 | (a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{ikx}) (a_{\vec{k}'} e^{-ik'x'} + a_{\vec{k}'}^\dagger e^{ik'x'}) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega} \frac{\sin(k|\vec{r}-\vec{r}'|)}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{4.65}
\end{aligned}$$

Fluktuacije polja u tački dobićemo u limesu $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$. Uobičajeno je da se spektar fluktuacija definiše tako što se izdvoji bezdimenzioni diferencijal, $d \log k = \frac{dk}{k}$,

$$\lim_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} \langle 0 | \Phi(t, \vec{r}) \Phi(t, \vec{r}') | 0 \rangle = \int_0^\infty d \log k \Delta_\Phi^2, \tag{4.66}$$

pa je spektar fluktuacija u ravnom prostoru

$$\Delta_\Phi^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{k^3}{\omega_k}. \tag{4.67}$$

U FLRW prostoru, za očekivanu vrednost kvadrata polja $\chi(x)$ u trenutnom vakuumu imamo

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \chi(\eta, \vec{r}) \chi(\eta, \vec{r}') | 0 \rangle &= \\
&= \iint \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^3} \langle 0 | (a_{\vec{k}} u_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a_{\vec{k}}^\dagger u_k^*(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}) (a_{\vec{k}'} u_{k'}(\eta) e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} + a_{\vec{k}'}^\dagger u_{k'}^*(\eta) e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}) | 0 \rangle \\
&= \frac{2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k^2 |u_k(\eta)|^2 \frac{\sin(k|\vec{r}-\vec{r}'|)}{k|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{4.68}
\end{aligned}$$

Za spektar kvantnih fluktuacija polja χ dobijamo

$$\Delta_\chi^2 = \frac{1}{2\pi^2} k^3 |u_k(\eta)|^2, \tag{4.69}$$

dok je spektar fluktuacija polaznog skalarnog polja $\Phi = \chi/a$,

$$\Delta_\Phi^2 = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{a^2(\eta)} k^3 |u_k(\eta)|^2. \tag{4.70}$$

5 De Sitter-ov prostor

Deo računa u kosmologiji koristi pretpostavku da je svemir (u određenom periodu svoje evolucije, npr. u toku inflacije ili danas) de Sitter-ov prostor. Za analizu nehomogenosti u CMB zračenju bitna je teorija klasičnih i kvantnih fluktuacija u de Sitter-ovom prostoru: kao korak ka razumevanju ovih rezultata, razmatramo kvantovanje skalarnog polja.

De Sitter-ov prostor je prostor maksimalne simetrije sa pozitivnom kosmološkom konstantom. Ako se u Einstein-ovim jednačinama kosmološki član prebaci na desnu stranu (gde su izvori polja), on se može interpretirati kao tenzor energije-impulsa idealnog fluida sa jednačinom stanja

$$T^\mu{}_\nu = \rho_\Lambda \delta^\mu{}_\nu, \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda \quad \text{tj.} \quad w = -1. \quad (5.1)$$

Iz Friedmann-ove jednačine

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (5.2)$$

gde je H Hubble-ov parametar (ovde, konstanta), sledi da je faktor skaliranja za de Sitter-ov prostor $a(t) = a_0 e^{Ht}$, što odgovara koordinatama u kojima su prostorni preseki ravni. Pošto je u de Sitter-ovom prostoru gustina energije konstantna, svaka površ je površ konstantne energije, i možemo izabrati različite familije prostornih hiperpovrši, tj. različite koordinatne sisteme: de Sitter-ov prostor može da se prikaže kao prostor sa ravnim, zatvorenim ili otvorenim prostornim presecima.

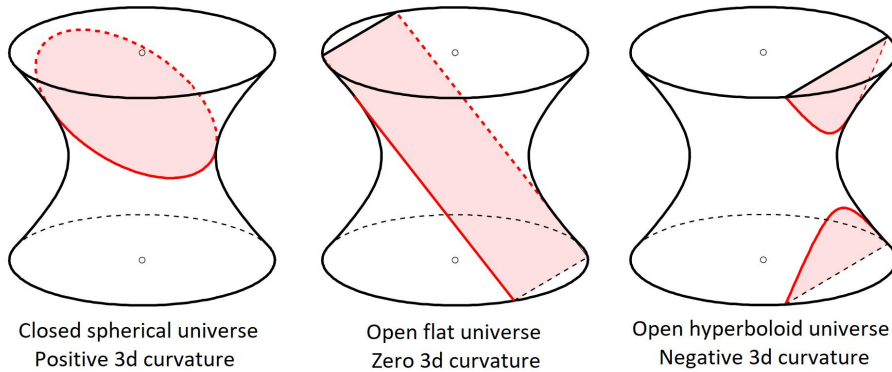
5.1 Sistemi koordinata

Izlistaćemo različite sisteme koordinata u de Sitter-ovom prostoru. On se obično uvodi kao potprostor topologije $R^1 \times S^3$:

$$X^{02} - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 = -\alpha^2 = -\frac{3}{\Lambda}, \quad H = \frac{1}{\alpha}, \quad R = 4\Lambda = \frac{12}{\alpha^2} \quad (5.3)$$

u ravnom 5d prostoru,

$$ds^2 = d(X^0)^2 - d(X^1)^2 - d(X^2)^2 - d(X^3)^2 - d(X^4)^2. \quad (5.4)$$



Ravan presek de Sitter-ovog prostora, $K = 0$, dobija se uvođenjem koordinata

$$X^0 = \alpha \sinh \frac{t}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{\alpha}} r^2 \quad (5.5)$$

$$X^4 = \alpha \cosh \frac{t}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{\alpha}} r^2 \quad (5.6)$$

$$X^i = e^{\frac{t}{\alpha}} x^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (x^i)^2 = r^2, \quad -\infty < t, x^i < \infty. \quad (5.7)$$

Ovaj sistem koordinata pokriva *pola de Sitter-ovog prostora*, $X^0 + X^4 > 0$, a element dužine u kosmičkom ili konformnom vremenu je

$$ds^2 = dt^2 - e^{\frac{2t}{\alpha}} (dx^i)^2 \quad (5.8)$$

$$= \frac{\alpha^2}{\eta^2} (d\eta^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad \eta = -\alpha e^{-\frac{t}{\alpha}}, \quad \eta \in (-\infty, 0). \quad (5.9)$$

Preostala polovina de Sitter-ovog prostora može da se opiše ili smenom (5.5-5.7) u kojoj je X^μ zamenjeno sa $-X^\mu$, ili ako se u izrazu (5.9) oblast promene η proširi u $\eta \in (-\infty, \infty)$: tada metrika u $\eta = 0$ ima koordinatni singularitet (B&D).

Zatvorene prostorne sekcije, $K = 1$, date su globalnim koordinatama koje pokrivaju ceo de Sitter-ov prostor,

$$X^0 = \alpha \sinh \frac{\tilde{t}}{\alpha} \quad -\infty < \tilde{t} < \infty \quad (5.10)$$

$$X^4 = \alpha \cosh \frac{\tilde{t}}{\alpha} \cos \tilde{\chi} \quad 0 \leq \tilde{\chi} \leq \pi \quad (5.11)$$

$$X^3 = \alpha \cosh \frac{\tilde{t}}{\alpha} \sin \tilde{\chi} \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (5.12)$$

$$X^2 = \alpha \cosh \frac{\tilde{t}}{\alpha} \sin \tilde{\chi} \sin \theta \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (5.13)$$

$$X^1 = \alpha \cosh \frac{\tilde{t}}{\alpha} \sin \tilde{\chi} \sin \theta \cos \varphi \quad (5.14)$$

a element dužine je

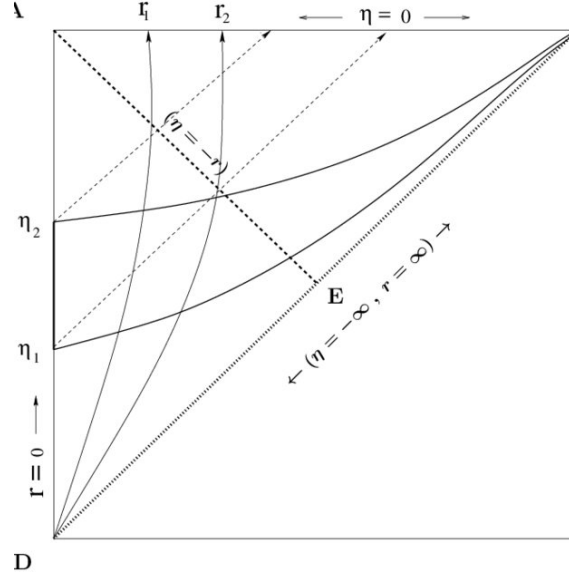
$$ds^2 = d\tilde{t}^2 - \alpha^2 \cosh^2 \frac{\tilde{t}}{\alpha} (d\tilde{\chi}^2 + \sin^2 \tilde{\chi} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \quad (5.15)$$

$$= \frac{\alpha^2}{\sin^2 \tilde{\eta}} (d\tilde{\eta}^2 - d\tilde{\chi}^2 - \sin^2 \tilde{\chi}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)), \quad \tilde{\eta} = 2 \arctan e^{\frac{\tilde{t}}{\alpha}}, \quad \tilde{\eta} \in (0, \pi) \quad (5.16)$$

Ove koordinate daju konformni dijagram za de Sitter-ov prostor koji prikazan na sledećoj strani. Vidimo i hiperboloid sa prethodne slike: prostor se od beskonačne zapremine u početnom trenutku $\tilde{\eta}=0$, $a(\tilde{\eta}) = \alpha/\sin \tilde{\eta}$, skuplja do minimalne zapremine u $\tilde{\eta} = \pi/2$, a zatim ponovo širi do krajnjeg trenutka, $\tilde{\eta} = \pi$.

M&W daju i formule prelaza iz koordinata sa ravnim u koordinate sa zatvorenim preseccima,

$$\eta = \frac{\sin \tilde{\eta}}{\cos \tilde{\eta} + \cos \tilde{\chi}}, \quad r = \frac{\sin \tilde{\chi}}{\cos \tilde{\eta} + \cos \tilde{\chi}}. \quad (5.17)$$



Carter-Penrose-ov dijagram za de Sitter-ov prostor je $(\tilde{\chi}, \tilde{\eta})$ -dijagram: gornji levi trougao označen na slici opisan je smenom (5.5-5.7) koja daje ravne preseke. Svaka tačka u de Sitter-ovom prostoru ima čestični horizont i horizont događaja. *Horizont događaja* se odnosi na budućnost, i predstavlja granicu skupa događaja koje posmatrač neće moći da vidi (ni da na njih utiče). Na gornjoj slici vidi se da posmatrač u tački $\tilde{\chi}=0$ (bilo kojoj tački) nikada ne može da vidi ceo prostor: u trenutku $\tilde{\eta}=0$ njegov horizont događaja je dijagonala kvadrata nacrtana na slici. Najdalje što posmatrač u $\tilde{\chi}=0$ u trenutku $\tilde{\eta}$ može da vidi rastojanje (duž nul-geodezika), $d_{event} = a(\tilde{\eta}) \tilde{\chi}_{event}(\tilde{\eta}) = \alpha \tilde{\eta} / \sin \tilde{\eta}$. *Čestični horizont*, sa druge strane, je granica skupa svih događaja tj. čestica koje je posmatrač mogao da opservira, i odnosi se na prošlost.

Hiperboličke koordinate, $K = 0$ u de Sitter-ovom prostoru su date sa

$$X^0 = \alpha \sinh \frac{\tau}{\alpha} \cosh \psi \quad (5.18)$$

$$X^4 = \alpha \cosh \frac{\tau}{\alpha} \quad (5.19)$$

$$X^3 = \alpha \sinh \frac{\tau}{\alpha} \sinh \psi \cos \theta \quad (5.20)$$

$$X^2 = \alpha \sinh \frac{\tau}{\alpha} \sinh \psi \sin \theta \sin \varphi \quad (5.21)$$

$$X^1 = \alpha \sinh \frac{\tilde{t}}{\alpha} \sinh \psi \sin \theta \cos \varphi \quad (5.22)$$

a element dužine je

$$ds^2 = d\tau^2 - \alpha^2 \sinh^2 \frac{\tau}{\alpha} (d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)). \quad (5.23)$$

Statičke koordinate u de Sitter-ovom prostoru dobijaju se smenom

$$X^0 = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \sinh \frac{\hat{t}}{\alpha}, \quad X^4 = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \cosh \frac{\hat{t}}{\alpha} \quad (5.24)$$

$$X^3 = r \cos \theta, \quad X^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad X^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad (5.25)$$

$r > 0$, i pokrivaju pola de Sitter-ovog prostora, $X^0 + X^4 > 0$. Element dužine je

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r^2}{\alpha^2}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.26)$$

Drugi sistemi koordinata koji se koriste, kao i izvođenja nekih osobina skalarnog polja u de Sitter-ovom prostoru dati su u preglednom radu sa arXiv-a: Spradlin, Strominger and Volovich, *Les Houches Lectures on de Sitter Space*.

5.2 Kvantovanje, Bunch-Davies-ov vakuum

M&W

Skalarno polje u de Sitter-ovom prostoru je najjednostavnije kvantovati koristeći konformno ravne koordinate: opšte formule smo već izveli za proizvoljni FLRW prostor. Doduše, ovim izborom koordinata kvantujemo polje u delu tj. u polovini prostora: M&W argumentuju da je period u kome je svemir de Sitter-ov ionako samo mala oblast u gornjem levom trouglu Carter-Penrose-ovog dijagrama za de Sitter-a, tako da je to u redu. B&D vrše produženje smene (5.5-5.7) na interval $\eta \in (-\infty, \infty)$ kroz koordinatni singularitet u $\eta=0$.

U ravnim koordinatama faktor skaliranja je

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}, \quad (5.27)$$

svemir se širi od početnog trenutka $\eta = -\infty$, $a(-\infty) = 0$. Za frekvencu dobijamo

$$\omega_k^2 = k^2 + m^2 a^2 - \frac{\ddot{a}}{a} = k^2 + \left(\frac{m^2}{H^2} - 2\right) \frac{1}{\eta^2}, \quad (5.28)$$

tako da jednačina za vremenski deo moda skalarnog polja postaje

$$\ddot{u}_k + \left(k^2 + \left(\frac{m^2}{H^2} - 2\right) \frac{1}{\eta^2}\right) u_k = 0. \quad (5.29)$$

Rešenja ove jednačine se izražavaju preko Bessel-ovih funkcija i mogu se lako dobiti npr. u *Mathematici*. Ako označimo

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2}}, \quad (5.30)$$

rešenje je oblika

$$u_k(\eta) = \sqrt{-k\eta} (A_k J_\nu(-k\eta) + B_k Y_\nu(-k\eta)). \quad (5.31)$$

J_ν i Y_ν su Bessel-ove funkcije. U rešenju, razume se, umesto funkcija $J_\nu(-k\eta)$, $Y_\nu(-k\eta)$ mogli smo da uzmemo $J_\nu(k\eta)$ i $Y_\nu(k\eta)$: to bi promenilo vrednosti konstanti i kasnije, granični uslov. Sledeći kosmologe izabrala sam oblik (5.31) ($-k\eta = |k\eta|$ je pozitivno).

Pošto je argument Bessel-ovih funkcija realan, vrednosti J_ν i Y_ν su realne: u ravnom prostoru gornji razvoj bi odgovarao razvoju polja po sinusima i kosinusima. U kontekstu kvantovanja prirodnije je da se koriste Hankel-ove funkcije

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + iY_\nu, \quad H_\nu^{(2)} = J_\nu - iY_\nu. \quad (5.32)$$

Za realne vrednosti argumenta, $H^{(1)*} = H^{(2)}$. U asimptotskoj oblasti $\eta \rightarrow -\infty$ važi (A&S)

$$H_\nu^{(1,2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad \text{tj.} \quad H_\nu^{(1,2)}(-k\eta) \sim \sqrt{\frac{1}{-k\eta}} e^{\mp i k\eta}, \quad (5.33)$$

pa rešenja u_k postaju harmonijska a $u_{\vec{k}}$ ravni talasi. Doduše ovo se lako vidi i direktno iz jednačine (5.29): u limesu $\eta^2 \rightarrow \infty$ dobijamo $\omega_k^2 = k^2$, i $u_k = e^{\pm i k\eta}$. Za pozitivno-frekventno rešenje biramo

$$u_k(\eta) = C_k \sqrt{-k\eta} H_\nu^{(1)}(-k\eta). \quad (5.34)$$

Konstanta normiranja C_k određuje se iz uslova $W(u_k, u_k^*) = i$. Koristeći da je vronskijan

$$W(H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)) = -\frac{4i}{\pi z}, \quad (5.35)$$

dobijamo

$$C_k = \sqrt{\frac{\pi}{4k}}, \quad u_k(\eta) = \frac{\sqrt{\pi|\eta|}}{2} H_\nu^{(1)}(-k\eta). \quad (5.36)$$

Zbog razlike u pretpostavljenom obliku rešenja (5.31) i graničnom uslovu, B&D dobijaju funkciju $H_\nu^{(2)}(k\eta)$ umesto $H_\nu^{(1)}(-k\eta)$: rešenje je isto i za neminimalno sprezanje uz

$$\nu^2 = \frac{9}{4} - \frac{m^2}{H^2} - 12\xi. \quad (5.37)$$

Vakuu definisan ovim modama skalarnog polja zove se *Bunch-Davies-ov vakuum*.

Zadržimo se još malo na ovim rešenjima. Hankel-ove funkcije, asimptotski, za $|k\eta| \rightarrow \infty$, postaju ravni talasi tj. izgledaju kao čestice. Rekli smo ranije da čestična interpretacija ima smisla za frekvence za koje je $k_{phys}^{-1} \ll l_R$. Skala krivine za de Sitter-ov prostor je

$$l_R \sim \frac{1}{\sqrt{R}} \sim \frac{1}{H}, \quad \frac{1}{k_{phys}} = \frac{\lambda_{phys}}{2\pi} = \frac{a(\eta)\lambda}{2\pi} = \frac{1}{H\eta} \frac{1}{k}, \quad (5.38)$$

pa je uslov da mode impulsa k interpretiramo kao čestice $k\eta \gg 1$: ove mode se zovu 'subhorizon modes' i u početku evolucije, za velike vrednosti $|\eta|$, skoro sve mode su 'subhorizon' odnosno dobro lokalizovane. Kako vreme odmiče, $|\eta|$ se smanjuje i karakteristična dužina moda postaje velika u odnosu na skalu krivine, ali i na dimenzije horizonta događaja: mode se 'zamrzavaju' prelazeći horizont: $|k\eta| \ll 1$ su 'superhorizon modes'. Ovo se vidi i iz rešenja: za male vrednosti argumenta, $|z| \rightarrow 0$, Hankel-ove funkcije su asimptotski

$$H_\nu^{(1,2)}(z) \sim \frac{\mp i \Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad u_k(\eta) \sim (-k\eta)^{\frac{1}{2}-\nu}, \quad (5.39)$$

i nemamo oscilatorno ponašanje.

Još jedan komentar u vezi formule (5.28),

$$\omega_k^2 = k^2 + \frac{1}{H^2 \eta^2} (m^2 - 2H^2). \quad (5.40)$$

Iako se odnosi na energiju konformno preslikanog polja χ , ona sugerira da je masa skalarnog polja Φ , $m_0^2 = m^2 - 2H^2$. To sledi i iz teorije reprezentacija: polje σ spina s u de Sitter-ovom prostoru zadovoljava Klein-Gordon-ovu jednačinu (koja sledi iz uslova za kvadratni Casimir-ov operator de Sitter-ove grupe, Baumann, *TASY Lectures on Primordial Cosmology*), oblika

$$(\square - m_s^2) \sigma = 0, \quad \text{za} \quad m_s^2 = m^2 - (s^2 - 2s - 2) H^2. \quad (5.41)$$

Konačno, da odredimo spektar fluktuacija skalarnog polja u de Sitter-ovom prostoru. Iz (4.70) dobijamo

$$\Delta_\Phi^2 = \frac{H^2 |k\eta|^3}{8\pi} |H_\nu^{(1)}(-k\eta)|^2 = \begin{cases} \frac{H^2 |k\eta|^2}{4\pi^2} = \frac{k_{phys}^2}{4\pi^2}, & |k\eta| \gg 1, \text{ subhorizon}, \\ \frac{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu)}{8\pi^3} H^2 |k\eta|^{3-2\nu}, & |k\eta| \ll 1, \text{ superhorizon}. \end{cases} \quad (5.42)$$

Domaći 7 Odredite mode i Bunch-Davies-ov vakuum za bezmaseno polje, $m=0$, a takođe i fluktuacije vakuuma bezmasenog polja. Dobijeni rezultat uporedite sa (5.42) u limesu $m \rightarrow 0$.

5.3 Green-ove funkcije

Da izračunamo Wightman-ovu funkciju $G^+(x; x')$ u Bunch-Davies-ovom vakuumu. Imamo

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Phi(x) \Phi(x') | 0 \rangle &= \frac{1}{a(\eta)a(\eta')} \iint \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi^3)^2} \langle 0 | a_{\vec{k}} u_k(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} a_{\vec{k}'}^\dagger v_{k'}(\eta') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} | 0 \rangle \\ &= H^2 \eta \eta' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} \frac{\pi \sqrt{\eta\eta'}}{4} H_\nu^{(1)}(-k\eta) H_\nu^{(2)}(-k\eta') \\ &= \frac{H^2}{8\pi} (\eta\eta')^{3/2} \int_0^\infty k^2 dk H_\nu^{(1)}(-k\eta) H_\nu^{(2)}(-k\eta') \frac{\sin k\Delta r}{k\Delta r} \\ &= -\frac{H^2}{8\pi} (\eta\eta')^{3/2} \frac{1}{\Delta r} \frac{d}{d\Delta r} \int_0^\infty H_\nu^{(1)}(-k\eta) H_\nu^{(2)}(-k\eta') \cos k\Delta r dk, \end{aligned}$$

gde je $\Delta r = |\Delta\vec{r}| = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Poslednji integral može da se izračuna koristeći formulu

$$\int_0^\infty H_\nu^{(1)}(ax) H_\nu^{(2)}(bx) \cos cx dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \sec \nu\pi P_{\nu-\frac{1}{2}} \left(-\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right), \quad (5.43)$$

iz rada Schomblond-a & Spindel-a, Ann. Inst. H. Poincaré 1976, gde je $P_\nu^\mu(z)$ Legendre-ova funkcija. (U radu je formula data sa $i\epsilon$ preskripcijom.) Kod nas je $a = -\eta > 0$, $b = -\eta' > 0$, $c = \Delta r$,

$$p = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1 + \frac{2\sigma}{2\eta\eta'}, \quad (5.44)$$

gde je kao i ranije $2\sigma = (\eta - \eta')^2 - \Delta r^2$, pa dobijamo

$$G^+(x; x') = -\frac{H^2}{8\pi} \sec \nu\pi P'_{\nu-\frac{1}{2}}(-p). \quad (5.45)$$

Koristeći vezu između Legendre-ove i hipergeometrijske funkcije,

$$P_\nu(z) = F\left(-\nu, \nu + 1; 1; \frac{1-z}{2}\right), \quad \text{i} \quad \frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z), \quad (5.46)$$

dobijamo formulu iz B&D,

$$G^+(x; x') = \frac{H^2}{16\pi} \sec \nu\pi \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right) F\left(\frac{3}{2} - \nu, \frac{3}{2} + \nu; 2; \frac{1+p}{2}\right). \quad (5.47)$$

Za bezmaseno konformno spregnuto polje je $m = 0$, $\xi = \frac{1}{6}$, $\nu = \frac{1}{2}$. Koristeći da je

$$F(a, b; b; z) = (1-z)^{-a}, \quad \text{tj.} \quad F(1, 2; 2, z) = \frac{1}{1-z}, \quad (5.48)$$

kao specijalan slučaj dobijamo

$$D^+(x; x') = -\frac{H\eta H\eta'}{4\pi^2((\Delta\eta - i\epsilon)^2 - (\Delta\vec{r})^2)} = \frac{1}{a(\eta)} D_{Mink}^+(x; x') \frac{1}{a(\eta')} \quad (5.49)$$

u skladu sa (3.116). Ako poslednji izraz zamenimo u formulu (3.90) za funkciju odziva slobodno padajućeg detektora čestica, $\Delta\vec{r} = 0$, i integralimo po $\eta \in (-\infty, 0)$, dobijamo

$$\frac{\mathcal{F}(E)}{\mathcal{T}} = \frac{E}{2\pi} \frac{1}{e^{2\alpha\pi E} - 1}, \quad (5.50)$$

$\alpha = 1/H$. Prema tome, *slobodno padajući posmatrač u de Sitter-ovom prostoru detektuje čestice u termodinamičkoj ravnoteži na temperaturi $T = 1/2\pi k_B \alpha$.*

Domaći 8 Izračunajte $(\sec \nu\pi) (\nu^2 - \frac{1}{4})$ za $\nu = \frac{1}{2} + \epsilon$, i proverite da iz (5.47) sledi (5.49). Zatim dokažite i formulu za funkciju odziva detektora (5.50).

Izbor Bunch-Davies-ovog vakuuma identifikacijom *in*-stanja je prirodan: ima i drugih argumenata koji sugerišu ovaj izbor. Međutim, znamo da vakuum nije jednoznačan, i postavlja se pitanje, da li je moguće dodati neki uslov koji bi ga jednoznačno odredio? U ovom konkretnom slučaju imamo prostor sa velikom grupom simetrije, pa bi uslov mogao da bude invarijantnost vakuuma na de Sitter-ovu grupu. Ispostavlja se da invarijantnost vakuuma ne odezbeđuje njegovu jednoznačnost, ako u grupu simetrije nije uključena vremenska inverzija.

Invarijantnost vakuuma u odnosu na de Sitter-ovu grupu ne može da se vidi direktno iz izbora ortonormiranog bazisa polja. Međutim ako je vakuum invarijantan, invarijantne će biti i sve

Green-ove funkcije (jer su vakuumske očekivane vrednosti proizvoda polja), a to znači da će zavisiti samo od *geodezijskog rastojanja* $P(x, x')$ između tačaka, npr.

$$G^{(1)}(x; x') = G^{(1)}(P(x, x')). \quad (5.51)$$

U nastavku ćemo razmatrati Hadamard-ovu funkciju koja je važna za renormalizaciju tenzora energije-impulsa; zadovoljava istu jednačinu (5.54) kao i funkcije Wightman-a i Pauli-Jordan-a.

Geodezijsko rastojanje između tačaka x i x' se u de Sitter-ovom prostoru može se dobiti iz odgovarajućeg rastojanja u 5d ravnom prostoru posle suženja na podmnogostrukost,

$$P(x, x') = \cos D = \frac{1}{\alpha^2} \eta_{ab} X^a X'^b, \quad (5.52)$$

i nekada se (možda prirodnije) izražava kao ugao D između tačaka X i X' na hipersferi. U konformno ravnim koordinatama geodezijsko rastojanje je

$$\begin{aligned} P(x, x') &= \frac{1}{\alpha^2} (X^0 X'^0 - X^i X'^i - X^4 X'^4) \\ &= - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\eta'}{\eta} + \frac{\eta}{\eta'} \right) - \frac{(x^i - x'^i)^2}{2\eta\eta'} \right) = - \left(\frac{(\Delta\eta)^2 - (\Delta\vec{r})^2}{2\eta\eta'} + 1 \right) = -p, \end{aligned} \quad (5.53)$$

i vidimo da je Wightman-ova funkcija (5.47) koju smo dobili za Bunch-Davies-ov vakuum de Sitter-invarijantna.

Svi vakuumi minimalno spregnutog skalarnog polja zadovoljavaju jednačinu

$$(\square_x + m^2) G^{(1)}(x; x') = 0. \quad (5.54)$$

Ako pretpostavimo da je vakuum de Sitter invarijantan, $G^{(1)}(x; x') = G^{(1)}(p)$, ova jednačina se u de Sitter-ovom prostoru svodi na

$$(p^2 - 1) \frac{d^2 G^{(1)}(p)}{dp^2} - 4p \frac{dG^{(1)}(p)}{dp} + \frac{m^2}{H^2} G^{(1)}(p) = 0. \quad (5.55)$$

Domaći 8 Proverite da se (5.55) dobija iz (5.54).

Jednačina (5.55) se jednostavnom smenom svodi na hipergeometrijsku jednačinu

$$z(1-z)w''(z) + (c - (a+b+1)z)w'(z) - abw(z) = 0. \quad (5.56)$$

Njena dva linearno nezavisna rešenja u okolini singularne tačke $z = 0$ (pod uslovom da c , $c - a - b$, $a - b$ nisu celi brojevi), su hipergeometrijske funkcije $w_1 = F(a, b; c; z)$ i $w_2 = z^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)$. Naravno, zbog velikog broja relacija koje zadovoljava hipergeometrijska funkcija, rešenja se mogu prikazati i u drugom obliku. Naša jednačina se smenom

$$\frac{1+p}{2} = z, \quad p^2 - 1 = -4z(1-z) \quad (5.57)$$

svodi na hipergeometrijsku jednačinu sa vrednostima parametara

$$a = \frac{3}{2} + \nu, \quad b = \frac{3}{2} - \nu, \quad c = 2, \quad (5.58)$$

tako da je, očigledno, funkcija G^+ koju smo ranije dobili jedno rešenje. Zapravo to je rešenje i za $G^{(1)}(x; x') = G^+(x; x') + G^+(x'; x)$, jer Green-ove funkcije zavise samo od geodezijskog rastojanja $P(x, x') = P(x', x) = -p$. Kao drugo linearno nezavisno rešenje hipergeometrijske jednačine može se uzeti, kako sugeriše Allen-a u radu iz Phys. Rev. D 82, 1985,

$$\tilde{w}_2 = F\left(\frac{3}{2} + \nu, \frac{3}{2} - \nu; 2; -\frac{1+p}{2}\right). \quad (5.59)$$

Opšte rešenje za $G^{(1)}$ je

$$G^{(1)}(p) = a F\left(\frac{3}{2} + \nu, \frac{3}{2} - \nu; 2; \frac{1+p}{2}\right) + b F\left(\frac{3}{2} + \nu, \frac{3}{2} - \nu; 2; -\frac{1+p}{2}\right) \quad (5.60)$$

i ono odgovara Bogoljubov-transformisanim modama skalarnog polja

$$v_k = \cosh \alpha u_k + e^{i\beta} \sinh \alpha u_k^* \quad (5.61)$$

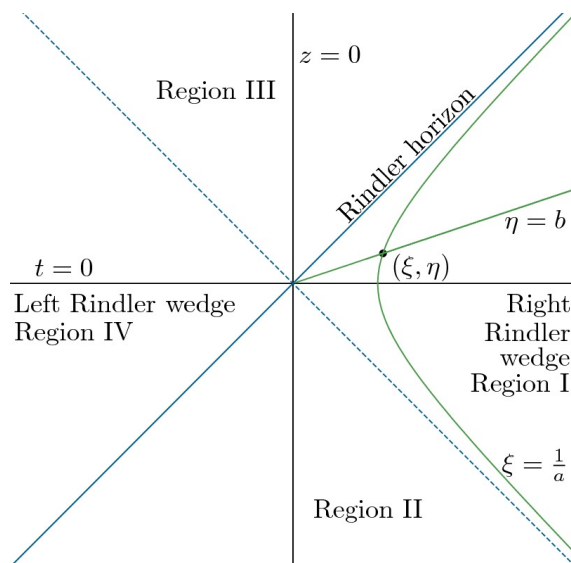
gde su u_k funkcije koje smo ranije uveli u (5.36). Ovo su tzv. α -vakuumi, a $\alpha = 0$ je Bunch-Davies-ov. Ispostavlja se da uslov da je $G^{(1)}$ invarijantna na (odgovarajuće definisanu) vremensku inverziju jednoznačno izdvaja Bunch-Davies-ov vakuum.

Domaći 9 Rešite jednačinu (5.54) u prostoru Minkovskog pretpostavljajući da Green-ove funkcije zavise samo od invarijantnog rastojanja σ i diskutujte jednoznačnost rešenja. Da li, osim σ , postoje druge invarijante Poincaré-ove grupe od kojih rešenje može da zavisi? Uporedite sa poznatim izrazima za Green-ove funkcije iz literature.

6 Unruh-ov efekat

Unruh-ovo efekat daje odgovor na pitanje: kako kvantno polje u prostoru Minkovskog izgleda ubrzanom posmatraču? Međutim ima i drugih interesantnih pitanja koja smo već pominjali: da li prostor vidimo (tj. možemo da merimo) samo u svojoj okolini, na 'lokalnoj karti', odnosno da li treba da ga maksimalno analitički produžimo? Jednostavan i koristan primer za ovakve diskusije je Rindler-ov prostor koji je deo dvodimenzionog prostora Minkovskog.

6.1 Rindler-ov prostor



Razmatramo prostor Minkovskog u dve dimenzije,

$$ds^2 = dt^2 - dx^2, \quad -\infty < t, x < \infty. \quad (6.1)$$

Koordinatna transformacija

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta, \quad x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta \quad (6.2)$$

preslikava deo prostora Minkovskog u konformno ravan, tzv *Rindler-ov prostor*,

$$ds^2 = e^{2a\xi}(d\eta^2 - d\xi^2), \quad -\infty < \eta, \xi < \infty. \quad (6.3)$$

Koji deo prostora Minkovskog je Rindler-ov prostor se bolje vidi u nul-koordinatama. Ako uvedemo

$$\begin{aligned} u = t - x = -\frac{1}{a} e^{-a\bar{u}}, & \quad v = t + x = \frac{1}{a} e^{a\bar{v}}, & \quad u < 0, v > 0 \\ \bar{u} = \eta - \xi, & \quad \bar{v} = \eta + \xi, & \quad -\infty < \bar{u}, \bar{v} < \infty \end{aligned} \quad (6.4)$$

vidimo da oblasti $-\infty < \bar{u}, \bar{v} < \infty$ tj. Rindler-ovom prostoru odgovara kriška, četvrtina prostora Minkovskog, $u < 0, v > 0$. Ova oblast je na gornjoj slici označena sa I ('right Rindler wedge'). Koordinatne linije $\xi = \text{const}$ odnosno $x^2 - t^2 = \text{const}$ su hiperbole, a $\eta = \text{const}$ tj. $t/x = \text{const}$ su prave kroz koordinatni početak. Jakobijan koordinatne transformacije

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = e^{2a\xi} \quad (6.5)$$

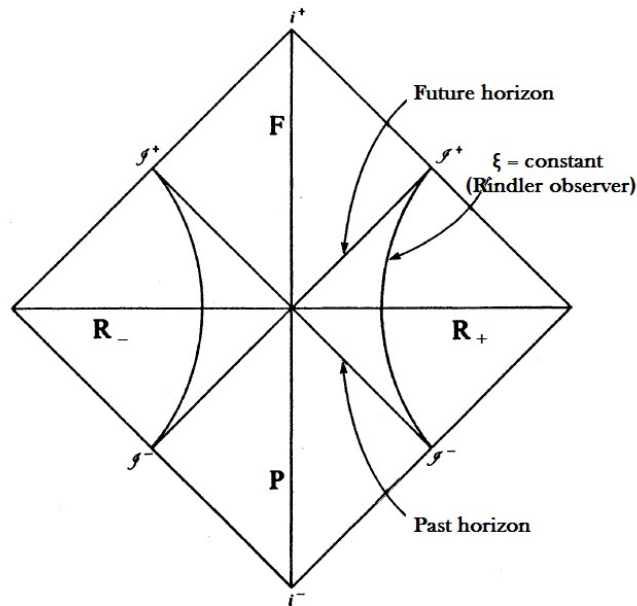
je singularan za $\xi = -\infty$ tj. za $u = 0$ i $v = 0$, pa je tu transformacija singularna: to se uostalom vidi i iz oblika metrike (6.3).

Domaći 10 Pokazati da slobodna čestica za konačno sopstveno vreme stigne do Rindler-ovog horizonta tj. do granice Rindler-ovog prostora. To znači da je $\xi = -\infty$ koordinatni singularitet metrike, a prostor je nepotpun i može se analitički produžiti.

Levi Rindler-ov prostor odnosno oblast IV može se dobiti iz prostora Minkovskog koordinatnom transformacijom u kojoj vreme ima obrnut smer:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta, & x &= -\frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta \\ u &= \frac{1}{a} e^{-a\bar{u}}, & v &= -\frac{1}{a} e^{a\bar{v}}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Desni i levi Rindler-ov prostor su nisu uzročno povezani. Svaka Cauchy-jeva površ tj. linija u prostoru Minkovskog se može podeliti na dva dela, tako da je jedan Cauchy-jeva linija za oblast I a drugi za oblast IV. Carter-Penrose-ov dijagram prostora Minkovskog podeljenog na četiri Rindler-ove kriške prikazan je dole.



Osim rotacija i translacija, simetrija prostora Minkovskog su i bustovi. U dve dimenzije vektor busta je

$$b = a \left(x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (6.7)$$

On je u oblasti I vremenskog tipa (u oblasti IV takođe, ali zapravo $-b$ opisuje protok vremena u smeru porasta t). Iz Penrose-ovog dijagrama se vidi da je Rindler-ov prostor globalno hiperbolički; osim toga, pošto je generator simetrije i vremenski vektor, možemo uzeti da b generiše vremenske translacije. To daje jedan izbor koordinata i odgovarajuću definiciju energije.

Domaći 11 Pokazati da b generiše izometriju u dvodimenzionom prostoru Minkovskog i naći njegovu normu: gde je b nul-vektor? Pokazati da je u oblasti I, $b \sim \frac{\partial}{\partial \eta}$.

Značaj koordinata ξ i η je u tome što opisuju ubrzanog posmatrača. Naime, rešenje jednačina kretanja posmatrača koji se u prostoru Minkovskog kreće konstantnim ubrzanjem a je (uz odgovarajuće početne uslove)

$$t = \frac{1}{a} \sinh a\tau, \quad x = \frac{1}{a} \cosh a\tau, \quad (6.8)$$

gde je τ sopstveno vreme. Jednačina trajektorije konstantno ubrzanog posmatrača je

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{a^2} \quad \text{tj.} \quad \xi = \text{const}, \quad (6.9)$$

a njegov lokalno padajući sistem odnosno ‘comoving frame’

$$\theta^0 = e^{a\xi} d\eta, \quad \theta^1 = e^{a\xi} d\xi. \quad (6.10)$$

Prema tome, $\xi = \text{const}$ daje položaj ubrzanog posmatrača a η opisuje protok vremena.

6.2 Kvantovanje u Rindler-ovom prostoru

M&W

Razmatramo, zbog jednostavnosti, minimalno spregnuto bezmaseno skalarno polje. Problem njegovog kvantovanja možemo da postavimo na više načina: jedan je da kvantujemo polje u prostoru Minkovskog, standardno, u Descartes-ovim koordinatama, i nestandardno, u (η, ξ) koordinatama ubrzanog posmatrača i uporedimo njihova merenja. U ovom pristupu (B&D) smena koordinata je neanalitička duž Rindler-ovog horizonta, pa su mode polja u levom i desnom Rindler-ovom prostoru nezavisne i zapravo njihova unija daje ukupni bazis. M&W imaju uprošćenu varijantu izvođenja u kojoj se polje kvantuje samo u Rindler-ovom, a ne u celom prostoru Minkovskog. Videćemo u nastavku da je Rindler-ov prostor analogan spoljašnjosti crne rupe, a Rindler-ov horizont horizontu crne rupe. Tako da, iako na prvi pogled deluje da nije u redu da polje kvantujemo samo u delu prostora a znamo da nije potpun, na primeru sa crnom rupom nije sve tako očigledno. Odnosno, postavlja se pitanje: da li možemo da kvantujemo polje u prostor-vremenu koji ne znamo globalno, u prošlosti i budućnosti i do prostornih granica? Na primer, da li možemo da kvantujemo polje van crne rupe, ne znajući

da li je ona nastala kolapsom zvezde, ili je večita crna rupa (maksimalno analitičko produženje Schwarzschild-ovog rešenja)? U tom kontekstu pristup M&W je unekoliko opravdan. Videćemo da je izbor vakuuma jedan od načina da razlikujemo prostore sa različitim globalnim osobinama.

Dakle, klasična jednačina kretanja za polje je

$$\square\Phi = 0, \quad \text{tj.} \quad \partial_u \partial_v \Phi = 0. \quad (6.11)$$

Pošto je polje bezmaseno i konformno spregnuto, jednačina ima isti oblik i u Rindler-ovim koordinatama,

$$\partial_{\bar{u}} \partial_{\bar{v}} \Phi = 0. \quad (6.12)$$

Opšte rešenje jednačine (6.11) je zbir dve proizvoljne funkcije, desnog $A(u)$ i levog $B(v)$ polja (funkcija $A(u)$ je talas koji se brzinom c kreće nadesno, pa definiše *right-moving sector*),

$$\Phi(u, v) = A(u) + B(v). \quad (6.13)$$

Ako Φ napišemo tj. razvijemo na uobičajeni način, koristeći $\omega = |k|$ imamo

$$\Phi(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega}} (a_k e^{-i\omega t + ikx} + a_k^\dagger e^{i\omega t - ikx}) \quad (6.14)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} (a_\omega e^{-i\omega u} + a_\omega^\dagger e^{i\omega u}) + \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} (a_{-\omega} e^{-i\omega v} + a_{-\omega}^\dagger e^{i\omega v}). \quad (6.15)$$

Drugim rečima, možemo da razdvojimo desni i levi sektor teorije kao nezavisne. Uvodeći

$$a_\omega \equiv a_k, \quad a'_\omega \equiv a_{-k}, \quad k > 0, \quad (6.16)$$

za levi i desni sektor teorije dobijamo

$$A(u) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} (a_\omega e^{-i\omega u} + a_\omega^\dagger e^{i\omega u}), \quad B(v) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} (a'_\omega e^{-i\omega v} + a'^\dagger_\omega e^{i\omega v}). \quad (6.17)$$

U nastavku ćemo razmatrati samo *right-moving* polja $A(u)$, a rezultati za $B(v)$ su analogni.

Polje možemo da kvantujemo u inercijalnim koordinatama t, x odnosno u, v pretpostavljajući kanonske komutacione relacije između operatora kreacije i anihilacije i definišući vakuum Minkovskog relacijom

$$a_\omega |0\rangle_M = 0, \quad a'_\omega |0\rangle_M = 0. \quad (6.18)$$

Druga mogućnost je da koristimo *moving frame* ubranog posmatrača i koordinate \bar{u}, \bar{v} . Klasične jednačine (6.11) i (6.12) izgledaju isto, pa se desno i levo polje A i B mogu na isti način izraziti i u \bar{u}, \bar{v} koordinatama,

$$A(\bar{u}) = \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} (b_\Omega e^{-i\Omega\bar{u}} + b_\Omega^\dagger e^{i\Omega\bar{u}}), \quad B(\bar{v}) = \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} (b'_\Omega e^{-i\Omega\bar{v}} + b'^\dagger_\Omega e^{i\Omega\bar{v}}). \quad (6.19)$$

Pošto je $u = -\frac{1}{a} e^{-a\bar{u}}$ ovi ravni talasi nisu isti; nisu isti ni vakuumi, Rindler-ov vakuum je definisan sa

$$b_\Omega |0\rangle_R = 0, \quad b'_\Omega |0\rangle_R = 0. \quad (6.20)$$

Mode $e^{-i\omega u}$, $e^{i\omega u}$ i $e^{-i\omega v}$, $e^{i\omega v}$ definisane su u celom prostoru Minkovskog, pa se $e^{-i\Omega\bar{u}}$, $e^{-i\Omega\bar{v}}$ mogu razviti po njima. Slično, imamo

$$b_\Omega = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega} a_\omega - \beta_{\Omega\omega} a_\omega^\dagger) \quad (6.21)$$

i važi normalizacija

$$\int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega} \alpha_{\Omega'\omega}^* - \beta_{\Omega\omega} \beta_{\Omega'\omega}^*) = \delta(\Omega - \Omega'). \quad (6.22)$$

Domaći 12 Proverite normalizaciju Bogoljubovljevih koeficijenata datu gore.

Da bismo odredili Bogoljubovljeve koeficijente, treba da razvijemo jedne mode polja po drugim. U ovom slučaju, razvoj je obična Fourier-ova transformacija. Iz

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} (b_\Omega e^{-i\Omega\bar{u}} + b_\Omega^\dagger e^{i\Omega\bar{u}}) \\ &= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} \int_0^\infty d\omega ((\alpha_{\Omega\omega} a_\omega - \beta_{\Omega\omega} a_\omega^\dagger) e^{-i\Omega\bar{u}} + (\alpha_{\Omega\omega}^* a_\omega^\dagger - \beta_{\Omega\omega}^* a_\omega) e^{i\Omega\bar{u}}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

imamo

$$\alpha_{\Omega\omega} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\Omega\bar{u} - i\omega u} d\bar{u}, \quad \beta_{\Omega\omega} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\Omega\bar{u} + i\omega u} d\bar{u}. \quad (6.24)$$

U poslednjem izrazu, pri integraciji možemo da pređemo na promenljivu u . Uvodeći smenu $\zeta = au$, imamo

$$\alpha_{\Omega\omega} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_0^\infty e^{i\frac{\omega}{a}\zeta} \zeta^{-\frac{i\Omega}{a}-1} d\zeta. \quad (6.25)$$

Poslednji integral formalno liči na Γ -funkciju koja je definisana sa

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (6.26)$$

za $\text{Re } z > 0$. Smena $t \rightarrow st$ za realno i pozitivno s daje

$$\Gamma(z) = s^z \int_0^\infty e^{-st} t^{z-1} dt. \quad (6.27)$$

Izraz se zapravo može uopštiti i za kompleksno z : precizna formula je (Erdelyi, (1.31-1.34))

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-ct \cos \beta - ict \sin \beta} dt = \Gamma(\alpha) c^{-\alpha} e^{-i\alpha\beta}, \quad (6.28)$$

i važi za $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\text{Re } \alpha > 0$ ili $\beta = -\frac{\pi}{2}$, $0 < \text{Re } \alpha < 1$. Kod nas je $\alpha = -\frac{i\Omega}{a} + i\epsilon$. Koristeći gornju formulu, dobijamo rezultat

$$\alpha_{\Omega\omega} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{\frac{\pi\Omega}{2a}} e^{\frac{i\Omega}{a} \log \frac{\omega}{a}} \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{a}\right) \quad (6.29)$$

$$\beta_{\Omega\omega} = -\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{-\frac{\pi\Omega}{2a}} e^{\frac{i\Omega}{a} \log \frac{\omega}{a}} \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{a}\right), \quad (6.30)$$

i važi

$$|\alpha_{\Omega\omega}|^2 = e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} |\beta_{\Omega\omega}|^2. \quad (6.31)$$

Broj Rindler-ovih tj. b -čestica u vakuumu Minkovskog je

$$\langle 0|_M N_{\Omega}|0\rangle_M = \int d\omega |\beta_{\Omega\omega}|^2. \quad (6.32)$$

Pošto imamo bazis ravnih talasa, imamo normiranje na δ -funkciju, pa je

$$\int d\omega (|\alpha_{\Omega\omega}|^2 - |\beta_{\Omega\omega}|^2) = \delta(0) = V = \int d\omega (e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1) |\beta_{\Omega\omega}|^2. \quad (6.33)$$

Gustina čestica koju vidi ubrzani posmatrač u Rindler-ovom vakuumu ima Boltzmann-ovu raspodelu,

$$\frac{\langle N_{\Omega} \rangle}{V} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega}{a}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{E}{k_B T}} - 1}, \quad (6.34)$$

koja odgovara *Unruh-ovoj temperaturi* $T = a/2\pi k_B$; ovaj rezultat smo, koristeći koncept detektora čestica, dobili i ranije, (3.102).

Izračunajmo tenzor energije-impulsa u vakuumima Minkovskog i Rindler-a, odnosno njegovu komponentu $T_{uu} = (\partial_u \Phi)^2$. U vakuumu Minkovskog imamo

$$\begin{aligned} \langle 0|_M (\partial_u \Phi)^2 |0\rangle_M &= \langle 0|_M \iint \frac{d\omega d\omega'}{2\pi} \frac{-\omega\omega'}{2\sqrt{\omega\omega'}} (a_{\omega} e^{-i\omega u} - a_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega u}) (a_{\omega'} e^{-i\omega' u} - a_{\omega'}^{\dagger} e^{i\omega' u}) |0\rangle_M \\ &= \iint \frac{d\omega d\omega'}{4\pi} \sqrt{\omega\omega'} \langle 0|_M a_{\omega} a_{\omega'}^{\dagger} |0\rangle_M e^{i(\omega' - \omega)u} = \int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Pošto imamo identičan račun u vakuumu Rindlera, važi i

$$\langle 0|_R (\partial_{\bar{u}} \Phi)^2 |0\rangle_R = \int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{4\pi} = \langle 0|_M (\partial_u \Phi)^2 |0\rangle_M. \quad (6.36)$$

Sa druge strane, tenzor energije-impulsa je tenzor, pa imamo

$$\langle 0|_R(\partial_u\Phi)^2|0\rangle_R = \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial u}\right)^2 \langle 0|_R(\partial_{\bar{u}}\Phi)^2|0\rangle_R = \frac{1}{a^2u^2} \langle 0|_M(\partial_u\Phi)^2|0\rangle_M . \quad (6.37)$$

Znači: ako je tenzor energije-impulsa konačan tj. regularizovan u vakuumu Minkovskog, njegove komponente u Rindler-ovom vakuumu biće beskonačne na horizontu, $u = 0$.

6.3 Komentari

B&D

Zbog pomenute analogije sa Schwarzschild-ovom crnom rupom možda nije loše da skiciramo analizu za slučaj kada se polje kvantuje u celom prostoru Minkovskog. Bazis $\{u_k, u_k^*\}$ koji odgovara Descartes-ovim koordinatama dat je ravnim talasima

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i(\omega t - ikx)}, \quad -\infty < k < \infty, \quad (6.38)$$

i odgovara vakuumu Minkovskog $|0\rangle_M$. Sa druge strane, ako hoćemo da iskoristimo bazis (6.19) definisan u desnom Rindler-ovom prostoru, moramo da ga dopunimo analognim bazisom u levom Rindler-ovom prostoru (Cauchy-jeve površi početnih uslova u prostoru Minkovskog su delom u levom a delom u desnom delu prostora). Jedan izbor je $\{{}^R u_k, {}^R u_k^*, {}^L u_k, {}^L u_k^*\}$, gde su

$${}^R u_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\eta + ik\xi} & \eta, \xi \in \text{R} \\ 0 & \eta, \xi \in \text{L} \end{cases}, \quad {}^L u_k = \begin{cases} 0 & \eta, \xi \in \text{R} \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{i\omega\eta + ik\xi} & \eta, \xi \in \text{L} \end{cases}, \quad (6.39)$$

$-\infty < k < \infty$. Ovakav izbor moda definiše vakuum $|0\rangle_R \otimes |0\rangle_L$. Međutim, gornje funkcije nisu neprekidne na horizontu. Pažljivom analizom može se naći linearna kombinacija funkcija (6.39) koja je analitička u celom prostoru, a pri tome zadržava znak energije, tj. ne menja vakuum. Razvoj jednih moda po drugim daje isti rezultat za Bogoljubovljeve koeficijente, (6.31-6.34). Drugim rečima, Unruh-ov efekat dobija se i kada analiziramo polje u celom tj. maksimalno proširenom prostoru.

7 Hawking-ovo zračenje

Hawking-ovo otkriće iz 1974. da crne rupe zrače, pri čemu je raspodela zračenja ravnotežna raspodela koja odgovara temperaturi $T = \kappa/2\pi = 1/8\pi M$ (κ je površinska gravitacija na horizontu crne rupe), jedna je od najinteresantnijih ideja u teoriji gravitacije. Ona je dala fizičku podlogu tj. fizičku interpretaciju za ‘četiri zakona mehanike crnih rupa’ (Bardeen, Carter i Hawking, 1973), posebno za ideju da Bekenstein-Hawking-ova entropija, $S = A/4$ (A je površina horizonta crne rupe), prebrojava kvantna stanja unutar crne rupe. Hawking-ovo zračenje izvedeno je u literaturi na mnogo načina i za različite konfiguracije gravitacionog polja, apstraktne i realistične; mi ćemo ovde dati osnovne elemente njegovog opisa.

7.1 Schwarzschild-ovo rešenje

Analogon Newton-ovog zakona gravitacije u opštoj teoriji relativnosti je Schwarzschild-ovo rešenje: ono ne opisuje gravitaciono polje u celom svemiru nego lokalno, npr. polje Sunca i planeta u Sunčevom sistemu. Schwarzschild-ova metrika je sferno simetrično, statičko rešenje Einstein-ovih jednačina u vakuumu: data je elementom dužine

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad 2M < r < \infty. \quad (7.1)$$

Iz Newton-ovog limesa dobija se da je M gravitaciona masa izvora polja, bilo da je taj izvor tačkasta čestica ili sferno-simetrično raspoređena masa. Sfera $r = 2M$ zove se *horizont crne rupe*. Singularitet Schwarzschild-ove metrike na horizontu, u kome g_{00} prolazi kroz nulu i menja znak, nije pravi nego je koordinatni singularitet. To se vidi iz činjenice da čestici koja se kreće po radijalnom geodeziku treba konačno sopstveno vreme da stigne do horizonta; takođe, tenzor krivine je na horizontu regularan.

Schwarzschild-ova metrika može da se proširi na oblast $r < 2M$ uvođenjem Eddington-Finkelstein-ovih koordinata. Uvodi se prvo ‘tortoise’ koordinata r^* , za koju je horizont beskonačno udaljen,

$$dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad r^* = r + 2M \log\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad -\infty < r^* < \infty, \quad (7.2)$$

i nul-koordinate u i v ,

$$u = t - r^*, \quad v = t + r^*, \quad -\infty < u, v < \infty. \quad (7.3)$$

Element dužine u ovim koordinatama dat je sa

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 - dr^{*2}) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (7.4)$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 - 2 dv dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad 0 < r < \infty. \quad (7.5)$$

U drugom redu gornje formule metrika je u Eddington-Finkelstein-ovim koordinatama v, r, θ, φ : ona nije singularna na horizontu, pa interval promene r može da se proširi na $0 < r < \infty$.

Maksimalna ekstenzija Schwarzschild-ovog rešenja, *večita (eternal) crna rupa*, se dobija uvođenjem Kruskal-Szekeres-ovih koordinata koje su takođe na svetlosnom konusu,*

$$U = -4M \exp\left(-\frac{u}{4M}\right), \quad V = 4M \exp\left(\frac{v}{4M}\right). \quad (7.6)$$

Pošto je

$$dU dV = \exp\left(\frac{r^*}{2M}\right) du dv = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) du dv, \quad (7.7)$$

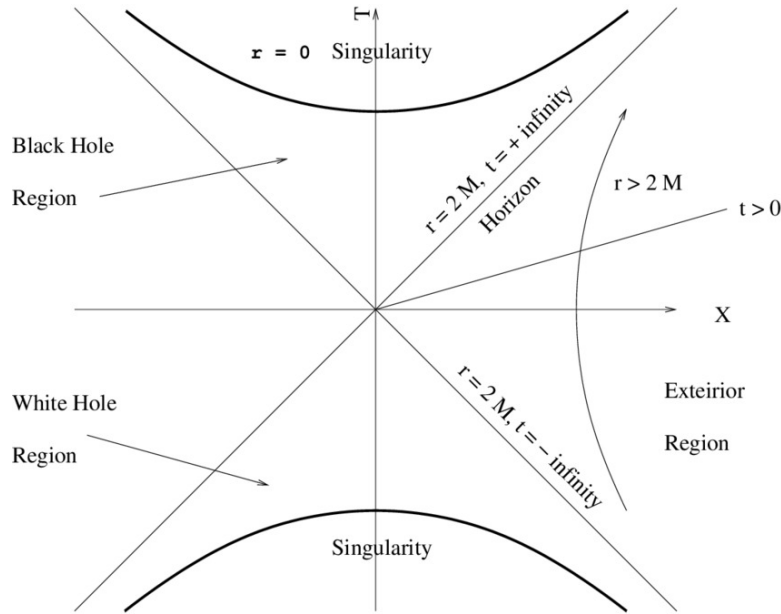
za element dužine imamo

$$ds^2 = \frac{2M}{r} \exp\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dU dV - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad -\infty < U, V < \infty. \quad (7.8)$$

Standardno se uvode vremenska i prostorna koordinata T i R ,

$$U = T - R, \quad V = T + R, \quad UV = T^2 - R^2 = -16M^2 \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right). \quad (7.9)$$

Maksimalna ekstenzija Schwarzschild-ove crne rupe u Kruskal-ovim koordinatama prikazana je na donjoj slici. Vidimo da je slika skoro potpuno analogna dijagramu Rindler-ovog prostora:

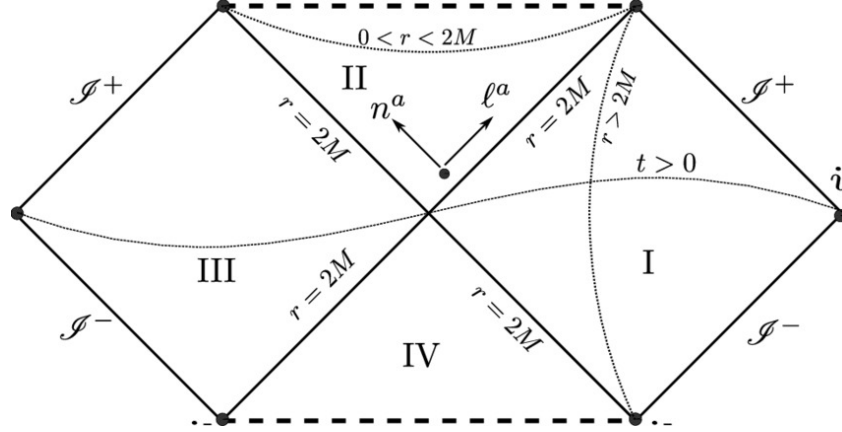


pre svega, postoji analogija između koordinata. Spoljašnjosti crne rupe $r > 2M$ odgovara deo analogan desnom Rindler-ovom prostoru, $U < 0, V > 0$, a horizont crne rupe preslikava se u Rindler-ov horizont. Međutim, za razliku od prostora Minkovskog, Schwarzschild-ova crna rupa ima pravi singularitet u $r=0$, u kome su skalar i druge invarijante krivine beskonačne. Iz (7.9) vidimo da singularitet odgovara vrednosti

$$T^2 - R^2 = 16M^2, \quad T = \pm \sqrt{16M^2 + R^2}, \quad (7.10)$$

U literaturi nazivi koordinata nisu usaglašeni (osim Kornjačine koordinate r^), a gužva posebno nastaje kod nul-koordinata pa se koriste npr. $v, \tilde{v}, \bar{v}, V, v', \hat{v}$: tako je i ovde izbor oznaka neki lični.

odnosno parabolama nacrtanim na slici; singularitet je prostornog tipa. Oblasti koje odgovaraju desnom i levom Rindler-ovom prostoru, ovde svemir i paralelni svemir, su kauzalno nepovezane, a njihovi asimptotski domeni su različiti: kažemo da gornji singularitet odgovara crnoj rupi a donji beloј rupi. Struktura se bolje vidi na Penrose-Carter-ovom dijagramu koji se dobija kompaktifikacijom koordinata U i V i prikazan je dole.



7.2 Hawking-ovo zračenje, Hartle-Hawking-ov vakuum

M&W

Razmotrićemo prvo, zbog jednostavnosti, dvodimenzionu metriku identičnu Schwarzschild-ovoj ako se zanemare ugaone koordinate,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(dt^2 - dr^{*2}) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv = \frac{2M}{r} \exp\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dU dV. \quad (7.11)$$

Prostorne dijagrame smo zapravo već nacrtali. U tom prostoru kvantujemo konformno spregnuto bezmaseno skalarno polje. Pošto je prostor konformno ravan, klasična jednačina kretanja $\square \Phi = 0$ svodi se na

$$\partial_u \partial_v \Phi = 0, \quad \text{ili} \quad \partial_U \partial_V \Phi = 0, \quad (7.12)$$

pa je rešenje zbir *right-moving* i *left-moving* polja. U Schwarzschild-ovim koordinatama imamo

$$\Phi = A(u) + B(v). \quad (7.13)$$

Pošto su u i v su definisane za $r > 2M$, ovaj izbor je analogan desnom Rindler-ovom prostoru. Za razvoj polja A koristimo bazis ravnih talasa $e^{-i\Omega u}$,

$$A(u) = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{4\pi\Omega}} (b_\Omega e^{-i\Omega u} + b_\Omega^\dagger e^{i\Omega u}). \quad (7.14)$$

Treba da zapazimo, iz (7.11), da su u i v tj. t i r *asimptotski ravne* koordinate, pa je vakuum koji one definišu,

$$b_\Omega |0\rangle_B = 0, \quad (7.15)$$

u stvari vakuum asimptotski-minkovskijevskog posmatrača: naziva se *Schwarzschild-ov* (od imena koordinata) ili *Boulware-ov vakuum*.

Ako polje napišemo kao

$$\Phi = A(U) + B(V) \quad (7.16)$$

i razvijemo po ravnim talasima Kruskal-ovih koordinata, za desni sektor polja imamo

$$A(U) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} (a_{\omega} e^{-i\omega U} + a_{\omega}^{\dagger} e^{i\omega U}). \quad (7.17)$$

Kruskal-ove koordinate pokrivaju maksimalnu ekstenziju Schwarzschild-ove crne rupe: one su *približno ravne u blizini horizonta*. Odgovarajući vakuum zove se *Kruskal-ov* odnosno *Hartle-Hawking-ov vakuum*, i definisan je sa

$$a_{\omega} |0\rangle_{HH} = 0. \quad (7.18)$$

Rekli smo da postoji formalna analogija između Rindler-ovog i Schwarzschild-ovog prostora i kvantnih polja na njima, koja sledi iz činjenice da su razvoji polja po modama, kao i veze između nul-koordinata iste. Zbog toga, u principu, rezultate koje smo dobili za Rindler-ov prostor direktno možemo da prevedemo u kontekst Schwarzschild-ove crne rupe.

| Rindler-ov prostor | prostor Minkovskog | spoljašnjost crne rupe | maksimalna ekstenzija |
|---|---------------------------|---|-------------------------------------|
| η, ξ | t, x | t, r | T, R |
| $\bar{u} = \eta - \xi, \bar{v} = \eta + \xi$ | $u = t - x, v = t + x$ | $u = t - r^*, v = t + r^*$ | $U = T - R, V = T + R$ |
| $-\infty < \bar{u}, \bar{v} < \infty$ $u = -\frac{1}{a} e^{-a\bar{u}} < 0$ $v = \frac{1}{a} e^{a\bar{v}} > 0$ | $-\infty < u, v < \infty$ | $-\infty < u, v < \infty$ $U = -4M e^{-\frac{u}{4M}} < 0$ $V = 4M e^{\frac{v}{4M}} > 0$ | $-\infty < U, V < \infty$ |
| $ 0\rangle_R$ | $ 0\rangle_M$ | $ 0\rangle_S \equiv 0\rangle_B$ | $ 0\rangle_K \equiv 0\rangle_{HH}$ |

Ako za vakuum kvantnog polja biramo Boulware-ov vakuum koji je analogan Rindler-ovom, u asimptotskoj, asimptotski ravnoj oblasti prostora nema zračenja. Međutim, $|0\rangle_B$ je singularan na horizontu odnosno daje divergentne očekivane vrednosti komponenata (regularizovanog) tenzora energije-impulsa. U tom smislu on je nefizički: skalarno polje ne može da se razmatra semiklasično jer je njegova povratna sprega sa gravitacijom velika pa nema (početnog) pozadinskog gravitacionog polja. Drugi vakuum, Hartle-Hawking-ov, je regularan na horizontu. Kvantne fluktuacije skalarnog polja ne perturbuju gravitaciono polje mnogo, pa se probne čestice u blizini horizonta kreću kao klasične. U slici analognoj sa Rindler-ovim prostorom ovaj vakuum odgovara vakuumu Minkovskog: zato asimptotski posmatrač u Hartle-Hawking-ovom vakuumu vidi ravnotežnu raspodelu čestica na temperaturi $T_H = 1/8\pi k_B M$,

$$\langle 0|_{HH} N_{\Omega} |0\rangle_{HH} = \frac{\delta(0)}{e^{8\pi M\Omega} - 1}. \quad (7.19)$$

Treba napomenuti da u Hartle-Hawking-ovom vakuumu imamo termalnu raspodelu ne samo izlaznih čestica opisanih poljem $A(U)$ nego i ulaznih čestica opisanih sa $B(V)$. To je zato što maksimalna ekstenzija opisuje i belu i crnu rupu. Bela rupa emituje, a crna apsorbuje čestice, pa se ceo sistem nalazi u termodinamičkoj ravnoteži.

7.3 Gravitacioni kolaps, Unruh-ov vakuum

B&D

Pre nego što pređemo na gravitacioni kolaps i Carter-Penrose-ov dijagram prostora koji on kreira, da vidimo kako se kvantovanje bezmasenog minimalno kuplovanog skalarnog polja uopštava na četiri dimenzije.

Jednačina kretanja $\square \Phi = 0$ zapisana u Schwarzschild-ovim koordinatama razdvaja promenljive: njena rešenja su oblika

$$f_{\omega lm} = e^{-i\omega t} \frac{1}{r} R_{\omega l}(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (7.20)$$

pri čemu radijalna funkcija $R_{\omega l}$ zadovoljava

$$\frac{d^2 R_{\omega l}}{dr^{*2}} + \left(\omega^2 - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right) R_{\omega l} = 0. \quad (7.21)$$

Rešenja gornje jednačine ne mogu se jednostavno izraziti: u odnosu na običnu jednačinu za oscilator imamo dodatne članove koji opisuju Schwarzschild-ov potencijal i razume se, centrifugalnu barijeru. To znači između ostalog da će pri prolazu kroz potencijal postojati rasejanje unazad odnosno refleksija. Međutim, iz (7.21) vidimo da u asimptotskoj oblasti $r \sim r^* \rightarrow \infty$ rešenja imaju oblik $e^{\pm i\omega r^*}$, pa se ukupno rešenje ponaša kao

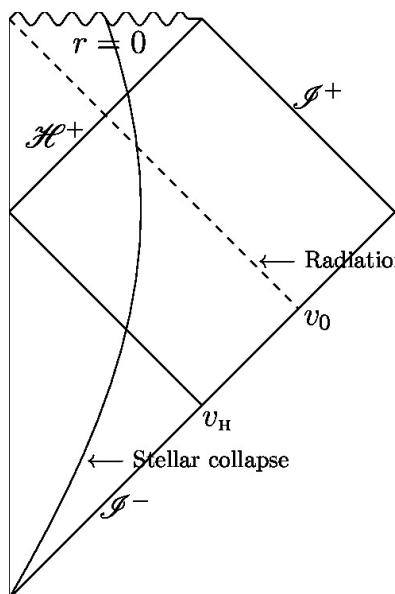
$$f_{\omega lm} \sim e^{-i\omega u} \frac{1}{r} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad e^{-i\omega v} \frac{1}{r} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (7.22)$$

Zato je kvantovanje polja koje za bazis koristi funkcije $f_{\omega lm}$,

$$\Phi = \sum_{l,m} \int d\omega (a_{\omega lm} f_{\omega lm} + a_{\omega lm}^\dagger f_{\omega lm}^*), \quad a_{\omega lm} |0\rangle_{HH} = 0 \quad (7.23)$$

zapravo kvantovanje u asimptotskom prostoru Minkovskog. Međutim, kada se računaju Bogoljubovljevi koeficijenti ili očekivane vrednosti broja čestica, rezultati zavise od radijalnog potencijala i obično se dobijaju množenjem *greybody* faktorom $\Gamma_{\omega l} < 1$.

Da se vratimo na kolaps. Obično se kaže da kod ‘pravog’ Hawking-ovog zračenja imamo samo emisiju čestica, pa se kao povratni efekat masa crne rupe smanjuje, i ono se dobija kad se analizira crna rupa koja nastaje gravitacionim kolapsom. Smatra se da je većina crnih rupa u svemiru nastala u ovakvom procesu: gustina zvezde u nekom trenutku evolucije pređe kritičnu vrednost pa se formira prividni horizont, i potom crna rupa. Prostor koji opisuje ovaj proces nije statički, a odgovarajući Carter-Penrose-ov dijagram dat je dole. Iako je dijagram nacrtan a da metrika nije egzaktno data tj. poznata (jer zavisi od konkretnih detalja interakcije materije), na njemu su svi elementi relevantni za kvantovanje polja i Hawking-ovo zračenje.



Pre svega, dijagram sadri samo oblasti I i II konformnog dijagrama većite crne rupe (ili neke delove ovih oblasti), pa u njemu ne postoji bela rupa ni paralelni svemir. Analizirajući sliku, vidimo da je asimptotska prošlost \mathcal{I}^- Cauchy-jeva površ; \mathcal{I}^+ nije, nego je to na primer unija $\mathcal{I}^+ \cup \mathcal{H}^+$. Važan deo opisa gravitacionog kolapsa je horizont događaja \mathcal{H}^+ , koji se formira u nekom trenutku i evolucijom dostiže vrednost datu ukupnom masom zvezde. \mathcal{H}^+ ‘odgovara’ horizontu budućnosti na dijagramu većite crne rupe, dok ekvivalent horizonta prošlosti ne postoji.

Kriva linija na dijagramu je površina kolapsirajuće zvezde. Ona predstavlja granicu dva dela prostora, spoljašnjosti zvezde u kojoj je prostor opisan Schwarzschild-ovom metrikom, i njene unutrašnjosti čiju metriku zapravo ne znamo precizno. Ako (sledeći B&D) nul-koordinate u prostoru van zvezde označimo sa u i v , za element dužine imamo

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv, \quad u = t - r^* + R_0^*, \quad v = t + r^* - R_0^*. \quad (7.24)$$

R_0^* je konstanta dodata da bi početni uslovi za kolaps $t = 0$ imali jednostavnu formu $u=0$, $v=0$. Nul-koordinate unutar zvezde označićemo sa U i V . Metrika unutra nije statička i ima oblik

$$ds^2 = A(U, V) dU dV, \quad U = \tau - r + R_0, \quad V = \tau + r - R_0, \quad (7.25)$$

gde je $A(U, V)$ neprekidna i regularna funkcija a τ vreme. Kolaps počinje u $t = \tau = 0$, kada je poluprečnik zvezde $r = R_0$. Njen poluprečnik se smanjuje sa protokom vremena po određenom zakonu, duž linije $r = R(\tau)$; duž te linije metrike (7.24) i (7.25) treba da se glatko spoje. To su elementi koji dodatno određuju konformni dijagram kolapsa: oni definišu i vezu između nul-koordinata spolja i unutra,

$$U = \alpha(u), \quad v = \beta(V). \quad (7.26)$$

Funkcije $R(\tau)$ i $A(U, V)$ mogu da se postuliraju (npr: horizont se smanjuje konstantnom brzinom) ili odrede u jednostavnim modelima (što je rađeno u dvodimenzionim modelima koji se dobijaju iz teorije struna); B&D razvijaju ove funkcije u Taylor-ov red, identifikujući oblasti

gde su one neprekidne odnosno singularne. To je pristup koji ćemo i mi slediti (doduše, sa manje preciznosti) jer je rezultujući efekat generički a račun u svakoj varijanti približan. Cilj je da identifikujemo one elemente/pretpostavke koji su ključni za Hawking-ovo zračenje.

Razmotrimo kvantovanje bezmasenog skalarnog polja. U modelu koji koristimo u asimptotskoj prošlosti nema desnog polja, tj. sve bezmasene čestice koje polaze iz \mathcal{I}^- kreću se ulevo, a sve koje stižu u \mathcal{I}^+ kreću se udesno. To je osobina dvodimenzionog prikaza, jer svaka tačka na dijagramu odgovara (θ, φ) sferi. U realnom prostoru, v -ravan talas prolazi kroz unutrašnjost zvezde i izlazi na drugu stranu ne menjajući pravac kretanja: na dijagramu je to prikazano kao refleksija u $r = 0$, tj. prelazak v -talasa u u -talas. Zato opis polja u modelu treba da sadrži odgovarajući granični uslov, kao što je npr. uslov za odbijanje zraka u ogledalu: efektivno, granični uslov će preslikati koordinatu v u koordinatu u . Diskusija graničnog uslova je različita u literaturi: B&D, sledeći rad Unruh-a (PRD, 1976) postavljaju uslov na polje, $\Phi|_{r=0} = 0$; P&T uslov dobijaju iz razmatranja nul-geodezika. U svakom slučaju, zbog neprekidnosti talasne funkcije odnosno polja je prirodno da u tački refleksije, koordinatnom početku $r = 0$, identifikujemo koordinate U i V (u svim trenucima vremena), tj. da zahtevamo

$$U - R_0 = V + R_0. \quad (7.27)$$

Ovaj uslov daje vezu

$$v = \beta(V) = \beta(U - 2R_0) = \beta(\alpha(u) - 2R_0). \quad (7.28)$$

Skalarno polje možemo da kvantujemo koristeći razvoj po bazu ravnih talasa u asimptotskoj prošlosti tj. u in -oblasti \mathcal{I}^- ,

$$\Phi = \int d\omega (a_\omega f_\omega + a_\omega^\dagger f_\omega^*), \quad f_\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v}. \quad (7.29)$$

Druga mogućnost je da polje kvantujemo u asimptotskoj budućnosti. Tada imamo dva skupa funkcija koje čine bazu: funkcije p_ω koje su definisane na \mathcal{I}^+ i funkcije q_ω definisane na \mathcal{H}^+ ,

$$\Phi = \int d\omega' (b_{\omega'} p_{\omega'} + b_{\omega'}^\dagger p_{\omega'}^* + c_{\omega'} q_{\omega'} + c_{\omega'}^\dagger q_{\omega'}^*). \quad (7.30)$$

Jasno, za funkcije u asimptotskoj budućnosti ćemo uzeti ravne talase

$$p_{\omega'} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega'}} e^{-i\omega' u}, \quad (7.31)$$

a iz kompletnosti sledi

$$p_{\omega'} = \int d\omega (\alpha_{\omega\omega'} f_\omega + \beta_{\omega\omega'} f_\omega^*), \quad q_{\omega'} = \int d\omega (\gamma_{\omega\omega'} f_\omega + \delta_{\omega\omega'} f_\omega^*). \quad (7.32)$$

Za Hawking-ovo zračenje su bitni koeficijenti $\beta_{\omega\omega'}$,

$$\beta_{\omega\omega'} = -(p_{\omega'}, f_\omega^*), \quad (7.33)$$

jer čestice koje završe u singularitetu ne možemo da detektujemo, pa nam zato tačan oblik funkcija q_ω nije važan.

Da bismo izračunali skalarni proizvod (7.33) treba da odredimo smenu (7.28). Pri tome, oblast integracije u integralu je $v \leq v_H$ (sa slike), jer je v_H najveća vrednost za koju upadni talas posle prolaza kroz zvezdu izađe napolje. (Nul-geodezici, tj. trajektorije ravnih talasa iz \mathcal{I}^- , su prave pod uglom od $\pi/4$ sa fiksiranom vrednošću v .) Za vezu $v = v(u)$ su nam potrebni detalji kolapsa, odnosno funkcije α i β . Međutim, možemo da uočimo dve bitne stvari. Prvo, funkcija $\beta(v)$ je neprekidna jer u oblasti u kojoj je definisana (početak kolapsa) horizont crne rupe još nije formiran. Zato $\beta(V)$ može da se razvije u red oko nule, a granični uslovi su podešeni da zavisnost bude linearna, $v = BV$. Sa koordinatom u odnosno funkcijom α je drugačije: u oblasti gde je smena $U = \alpha(u)$ definisana postoji horizont događaja. U blizini horizonta smena iz jednih u druge nul-koordinate je poznata, (7.6),

$$U = -4M \exp\left(-\frac{u}{4M}\right), \quad (7.34)$$

a daleko od horizonta zavisnost je regularna. Tu se uključuje druga pretpostavka: ako $\beta_{\omega\omega'}$ računamo za 'late time' tj. u *asimptotskoj budućnosti* $t \rightarrow \infty$, onda najveći doprinos integralu daje oblast tj. talasi koji se koji se rasejavaju upravo blizu horizonta. Zato u integralu možemo da koristimo smenu (7.34), odnosno da pretpostavimo da je, za kasna vremena,

$$v = B\left(-4M e^{-\frac{u}{4M}} - 2R_0\right), \quad f_\omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v} \sim e^{i\omega\left(4MB e^{-\frac{u}{4M}}\right)}. \quad (7.35)$$

Zato se skalarni proizvod (7.33) odnosno Bogoljubovljevi koeficijenti $\beta_{\omega\omega'}$ svode na one koje smo već izračunali i koji daju Hawking-ovo zračenje. Ovako definisana kvantna teorija odnosno njen vakuum zove se *Unruh-ov vakuum*: on je regularan u asimptotskoj prošlosti \mathcal{I}^- i na horizontu \mathcal{H}^+ .