

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Милица Н. Недић

НАСТАНАК И ДИНАМИКА ТОПОЛОШКИ
ЗАШТИЋЕНИХ МОДА У ФОТОНСКИМ
РЕШЕТКАМА

докторска дисертација

Београд, 2025.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF PHYSICS



Milica N. Nedić

ORIGIN AND DYNAMICS OF
TOPOLOGICALLY PROTECTED MODES IN
PHOTONIC LATTICES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2025.

Ментор

др Александра Малуцков

научни саветник

Институт за нуклеарне науке Винча, Универзитет у Београду, Институт од националног значаја за Републику Србију

Комисија за одбрану докторске дисертације:

Проф. др Татјана Вуковић

редовни професор

Физички фалуктет, Универзитет у Београду

др Горан Глигорић

научни саветник

Институт за нуклеарне науке Винча, Универзитет у Београду, Институт од националног значаја за Републику Србију

Проф. др Саша Дмитривић

ванредни професор

Физички фалуктет, Универзитет у Београду

Доц. др Светислав Мијатовић

доцент

Физички фалуктет, Универзитет у Београду

др Стефан Граовац

научни сарадник

Физички фалуктет, Универзитет у Београду

Датум одбране докторске дисертације

Захвалница

Настанак и динамика тополошки заштићених мода у фотонским решеткама

Сажетак: У овој дисертацији теоријски и експериментално су проучени механизми настанка и динамика тополошки заштићених ивичних мода у једнодимензионалним (1Д) и дводимензионалним (2Д) фотонским решеткама. Простирање свјетлости кроз таласоводне решетке описано је системом линеарних и нелинеарних диференцијално-диференцијалних једначина у апроксимацији слабо спрегнутих мода.

У 2Д бипартитним решеткама, састављеним од двије хексагоналне подрешетке, уведена је вртложна дисторзија у једну подрешетку, што индукује структурни дефект и тополошки фазни прелаз. Показано је да различити гранични услови у коначној решетки доводе до различитих фамилија ивичних композитних мода: једна компонента остаје локализована око дефекта типа вртлога, а друга уз ивицу. Динамика ових мода испитана је у присуству Керове нелинеарности. Уз прецизно подешавање појачања и губитака, систем може прећи у ласерски режим; стабилно ласерско зрачење ивичне моде добијено је насумичном побудом оптичког поља. Испитан је и утицај нелинеарности на режим ласерског рада.

У 1Д фотонским тракастим структурама хексагоналног и дијамантског типа уведен је синтетички флукс различите јачине ради индукције тополошког прелаза, што у тракама коначне дужине доводи до формирања дублета ивичних мода. Тополошка инваријанта је израчуната ради потврде заштићености мода. За одређене вриједности флукса јављају се равне зоне настале деструктивном интерференцијом (Ахаронов–Бомов ефекат). Један модел је експериментално реализован директним уписивањем таласовода фемтосекундним ласером, а синтетички флукс је имплементиран мултиорбиталним спрезањем различитих типова таласовода (S и P). Потврђено је постојање компактних тополошких ивичних мода предвиђених симулацијама, као и њихова робусност на варијације фазе побуде и на фабрикационе неуређености.

Нумеричке симулације су реализоване у програмском језику MATLAB при-
мјеном метода Рунге–Кута за рјешавање динамичких једначина.

Кључне ријечи: Фотонске 1Д и 2Д решетке, Тополошка заштићеност, Балк-ивица кореспонденција, Ивичне моде, Вртложна дисторзија, Синтетички флукс, Нелинеарни ефекти, Тополошки ласери, S и P таласоводи, Равне зоне

Научна област: физика

Ужа научна област: физика кондензоване материје и статистичка физика

Origin and dynamics of topologically protected modes in photonic lattices

Abstract: In this dissertation, the mechanisms of formation and dynamics of topologically protected edge modes in one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) photonic lattices are studied both theoretically and experimentally. The propagation of light through waveguide lattices is described by a system of linear and nonlinear differential equations in the weakly coupled mode approximation.

In 2D bipartite lattices, composed of two hexagonal sublattices, a vortex distortion is introduced in one sublattice, inducing a structural defect and a topological phase transition. It is shown that different boundary conditions in a finite lattice lead to distinct families of edge composite modes: one component remains localized around a vortex-type defect, while the other localizes at the edge. The dynamics of these modes are investigated in the presence of Kerr nonlinearity. With precise tuning of gain and loss, the system can reach the lasing regime; stable lasing of the edge mode is obtained by random excitation of the optical field. The influence of nonlinearity on the lasing behavior is also examined.

In 1D photonic ribbon structures of hexagonal and diamond types, a synthetic flux of varying strength is introduced to induce a topological transition, which leads to the formation of edge mode doublets in finite-length ribbons. The topological invariant is calculated to confirm the protection of these modes. For specific flux values, flat bands emerge due to destructive interference (Aharonov–Bohm effect). One of the models is experimentally realized via direct femtosecond laser writing of waveguides, while the synthetic flux is implemented through multi-orbital coupling of different waveguide types (S and P). The existence of compact topological edge modes predicted by simulations is confirmed, along with their robustness against phase variations in excitation and fabrication imperfections.

Numerical simulations are performed in MATLAB using the Runge–Kutta method to solve the dynamical equations.

Key words: Photonic 1D and 2D lattices, Topological protection, Bulk-edge correspondence, Edge modes, Vortex distortion, Synthetic flux, Nonlinear effects, Topological lasers, S and P waveguides, Flat bands

Scientific field: physics

Scientific subfield: condensed matter and statistical physics

Резултати из ове дисертације су публиковани у радовима:

1. M. Nedić, G. Gligorić, J. Petrovic, and A. Maluckov, "Nonlinearity and lasing topological zero-mode in distorted photonic lattice", Phys. Lett. A 477, 128893 (2023).
2. M. Nedić, G. Gligorić, J. Petrovic, and A. Maluckov, "Zero-mode diversity in photonic graphene with vortex distortion: nonlinear response and driving", Opt. Quantum Electron. 56, 1183 (2024).
3. G. Cáceres-Aravena, M. Nedić, P. Vildoso, G. Gligorić, J. Petrovic, A. Maluckov, and R. A. Vicencio, "Compact topological edge states in flux-dressed graphenelike photonic lattices", Phys. Rev. Lett. 133, 116304 (2024).

Садржај

1	Увод	1
2	Фотонски системи и платформе	4
2.1	Фотонске решетке	6
2.2	Гранични услови и дизајн решетке	8
2.3	Простирање свјетлости кроз фотонску решетку	11
3	Тополошке фазе и инваријанте у фотоници	17
3.1	Бери фаза	18
3.2	Зак фаза	20
3.3	Ивичне и нулте моде	21
3.4	Балк-ивица кореспонденција	23
3.5	Хирална симетрија	24
4	Нелинеарност и неермитски ефекти	26
4.1	Простирање свјетлости кроз нелинеарне средине	27
4.2	Локална Керова и сатурациона нелинеарност	28
4.3	Појачање и губитак	30
4.4	Тополошки ласери	31
5	Тополошке моде у хексагоналној и ромбичној фотонској решетки	34
5.1	Модел и гранични услови решетки	35
5.2	Дисторзија типа вртлога	37
5.3	Динамика нултих мода	39
6	Квази-једнодимензионалне траке	41
6.1	Модел и методе	42
6.2	Синтетички флуks калибрационог поља	45
6.3	Експериментална поставка	47
7	Резултати и дискусија	50
7.1	2Д системи са дисторзијом	50
7.1.1	Хексагонална решетка	50
7.1.2	Ромбична решетка	58
7.2	Квази-1Д системи са флуksом	64
7.2.1	Квази-1Д траке налик графену	64
7.2.2	Квази-1Д траке налик дијаманту	77

7.3	Потенцијалне примјене	83
8	Закључак	85
	Литература	86
	Биографија	96

Глава 1

Увод

Увођење топологије у фотонику, у којој је испитивање феномена засновано на Мексвеловим (Maxwell) једначинама, је мотивисано примјеном топологије у физици кондензоване материје [1, 2] и открићем тополошких изолатора [3, 4]. Тополошка својства фотонских материјала са дискретном трансляционом симетријом, односно зонским енергетским спектром, описују понашање таласне функције придружене цијелој дисперзивној зони.

Фундаментална разлика између фотона и електрона лежи у чињеници да су фотони бозони који задовољавају Бозе-Ајнштајнову (Bose-Einstein) статистику док су електрони фермиони за које је својствена Ферми-Диракова (Fermi-Dirac) статистика. Управо бозонска природа свјетлости отвара нове перспективе у оквирима тополошке фотонице, чији се почеци везују за радове Халдејна и Рогуа (Haldane and Rohu) [1, 2] у којима је помоћу свјетлости у фотонским решеткама остварен ефекат еквивалентан квантном Холовом ефекту (quantum Hall effect) [5, 6] у дводимензионалним (2Д) електронским гасовима у магнетном пољу. Робусност квантоване Холове проводљивости је реализована у фотоници преко постојања робусних ивичних стања која пропадају само у једном смјеру. Експериментална реализација те теоријске поставке је добијена пропагацијом свјетлости у микроталасном опсегу кроз жиромагнетне фотонске кристале [7].

У фотоници, а и у контексту ултра-хладних атома, акустици, фононици и механици, тополошка својства изолованих енергетских зона и балк-ивица кореспонденција [8] су основни тополошки појмови. Тополошко стање изоловане зоне је одређено вриједношћу тополошке инваријанте, Закове (Zak) фазе [9, 10] и Черновог (Chern) броја [5, 11, 12], редом у 1Д и 2Д решеткама, док кореспонденција балк-ивица почива на законитости да цјелобројне вриједности тополошких инваријаната одговарају броју тополошки заштићених мода у процјепима између изолованих зона .

Централно мјесто у контексту тополошке фотонице имају тополошки изолатори [11, 13, 14, 15, 16, 17], који у тополошки нетривијалној фази подржавају постојање и простирање ивичних – тополошки заштићених свјетлосних мода на оптичким фреквенцијама. Ивичне моде су робусне на присуство ефеката нежељених расијања неизоставно присутних на нечистоћама и дефектима при изради фотонских структура, тј. фотони путују дуж граница структуре без пертурбације. Робусност ивичне моде је директно повезана са симетријама струк-

туре. Тако у фотонским структурама са нарушеном временском инверзијом ивичне моде дате фреквенције робусност дугују непостојању контрапропагирајућег партнера (моде) исте фреквенције [7, 18], док код структура са одржаном временском инверзијом робусност ивичних мода је посљедица одсуства спрезања са контрапропагирајућом модом док нека од додатних симетрија система не буде нарушена неуређеностима [19, 20, 21].

1Д и 2Д фотонске решетке могу подржавати ивичне моде чија енергија (фреквенција) одговара средини енергетског процјепца између зона. Овакве моде су назване нултим модама и стриктно су локализоване. Ове моде су робусне на присуство било какве деформације која одржава хиралну тј. честица-шупљина симетрију [22, 23]. Примјер у 1Д структури су нулте моде у Су-Шриффер-Хегер (Su-Schrieffer-Heeger, SSH) 1Д ланцима [24], а у 2Д низ хексагонално уређених еванесцентно спрегнутих таласовода уписаних фемто-секундним ласером у боросиликатно стакло [25] и 2Д хексагонална решетка, тј. фотонска решетка типа графена са вртложним поремећајем у структури (Кекуле-тип дисторзије) [26, 27, 28]. Управо су нулте моде у структури са дисторзијом мотивисале дио истраживања представљеног у наставку. Свијет тополошки заштићених мода употпуњен је различитим типовима аномалних хиралних ивичних мода у Флокеовим решеткама (решетке периодичне у правцу пропагације) [18] и низом екзотичних ивичних мода у 3Д фотонским изолаторима [29].

Фотонске платформе такође нуде могућност за прецизну контролу параметара система, као што су појачање (gain), губитак (loss) [30, 31, 32] и нелинеарност [33, 34]. Испитивања активних и нелинеарних решетки резултирала су неким од веома битних достигнућа у тополошкој фотоници: тополошки ласери [35, 36], нелинеарна контрола локализованих тополошких мода [33], стварање стабилних солитона у балку у нелинеарним Дираковим решеткама [37].

Најновија постигнућа у оптичким лабораторијама отварају нове могућности за генерисање тополошки-везаних феномена и манипулацију тополошки-везаним својствима свјетлости - фотонима. Тополошка фотоника обећава да ће понудити дизајне нових фотонских уређаја имуних на деградацију перформанси изазваних несавршеностима у производњи или спољашњим пертурбацијама.

Циљ дисертације је да се теоријски и експериментално испитају нове могућности за настанак и контролу понашања тополошки заштићених мода у 1Д и 2Д фотонским решеткама. Детаљна анализа тополошких прелаза омогућиће боље разумијевање тополошких фаза у вишезонским спектрима и њихове улоге у настанку ивичних и равних мода. Робусност ових мода их сврстава у одличне кандидате за експерименталну примјену у преносу информација, развоју нових ласерских платформи и сродним фотонским технологијама. Поред тога, проучавање утицаја нелинеарности и неермитских ефеката пружиће одговоре на питања о стабилности и прилагодљивости тополошких мода, као и о њиховом потенцијалу за примјену у дизајну нових извора свјетлости, фотонских сензора и квантних комуникационих канала.

Након уводних разматрања, у Поглављу 2 биће представљени фотонски системи са посебним акцентом на фотонске решетке и механизме описивања простирања свјетлости кроз њих. Поглавље 3 обухвата анализу тополошких инваријанти и фаза у фотоници, њихову улогу у опису динамике ивичних мода,

као и значај балк-ивица кореспонденције. Утицај нелинеарности и неермитских ефеката у фотонским решеткама биће предмет Поглавља 4. Испитивани модели, заједно са описом механизма који доводе до појаве тополошких прелаза, детаљније су приказани у Поглављима 5 и 6. Поглавље 7 садржи резултате добијене нумеричким симулацијама и експерименталним реализацијама, као и разматрање могућих примјена. На крају, у Поглављу 8 дат је закључак дисертације.

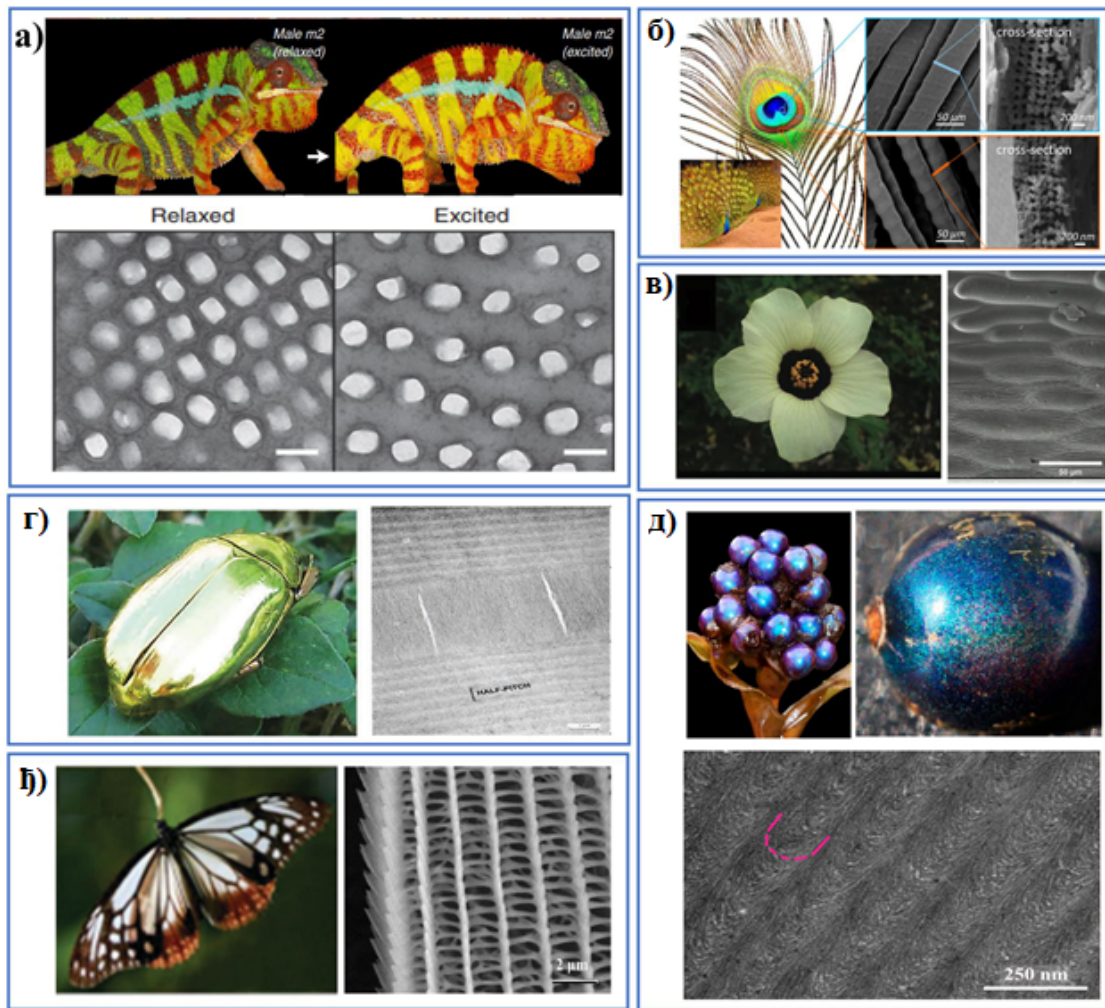
Глава 2

Фотонски системи и платформе

Фотонске структуре, које су данас у жижи интересовања због својих изузетних могућности у области опто- и нанотехнологија, телекомуникационих система и савремених фотонских уређаја, нису производ искључиво савремене нанофабрикације. Оне већ милионима година постоје у природи, интегрисане у биолошке системе [38, 39, 40]. Током еволуције, природа је синтетисала различите наноструктуре које омогућавају контролу свјетлости. Те структуре дјелују као природни фотонски кристали [41], односно материјали са периодичном промјеном индекса преламања, што доводи до могућности контролисаног модулисања ефеката дифракције, интерференције и селективне рефлексије свјетлости. Управо ови физички феномени стоје иза механизма који доводе до интензивних структурних боја и оптичких ефеката у биолошким системима [42]: крила лептира и других инсеката, перје пауна, љуске сјајних буба, плодови појединих тропских биљака са металик одсјајем, адаптивне промене боје код камелеона, Слика 2.1. Ове природне фотонске структуре имају важну биолошку улогу: камуфлажу, сигнализацију, привлачење партнера или заштиту од предатора. Истовремено, оне данас представљају инспирацију за развој вјештачких фотонских кристала [43] и нанофотонских уређаја.

Периодичне структуре имају кључну улогу у многим физичким и математичким описима природних појава. Оне се јављају спонтано у различитим системима, а један од најпознатијих примјера је уређен распоред атома у кристалним решеткама метала и полупроводника [44]. Физика оваквих система је изузетно богата и темељно проучавана. На примјер, на кретање електрона снажно утиче периодични потенцијал атомских језгара, што омогућава контролу и прилагођавање проводних својстава материјала.

У оптици, периодичност је повезана са материјалима у којима индекс преламања варира у једној или више просторних димензија. Примјери таквих структура су фотонске решетке, низови таласовода, фотонски кристали и фотонска влакна [45]. Када се у њима простире свјетлост, понашање оптичких таласа је аналогно кретању електрона кроз кристалну решетку у полупроводнику. Тако периодичне фотонске структуре отварају могућност контроле простирања свјетлости на сличан начин као што се у полупроводничким уређајима контролише кретање електрона. Та особина им даје изузетан потенцијал за примјене у интегрисаним фотонским колима, посебно у развоју оптичких рачунара и система за



Слика 2.1: Примјери природних фотонских кристала: а) камелеон, б) перје пауна, в) латице *Hibiscus trionum*, г) буба *Chrysolina resplendens*, д) лептир, ђ) плодови биљке *Pollia condensata*. У свим случајевима структурна боја настаје као посљедица наноструктура које контролишу интеракцију са свјетлошћу. Преузето из [42].

обраду сигнала интегрисаних са комуникационим технологијама заснованим на оптичким влакнима [46, 47].

Периодичне фотонске структуре могу се релизовати као фотонске решетке, фотонски кристали и метаматеријали [48, 49], од којих свака реализација има своје специфичности. У метаматеријалима је период решетке a много мањи од таласне дужине свјетлости λ , па се њихова својства могу описати хомогеним једначинама у којима се уводе ефективни параметри, попут индекса преламања који може бити и негативан, што није случај у природним материјалима. Први експерименти су били ограничени на микроталасни опсег ($\lambda \sim \text{cm}$, $a \sim \text{mm}$), гдје су коришћени резонантни елементи попут сплит-ринг (split-ring) резонатора, али са уским фреквенцијским опсегом и значајним губицима. Данас, напредком

у диелектричној нанофабрикацији, могуће је реализовати метаматеријале у оптичком домену са много мањим губицима, на скали $a \sim 1\mu\text{m}$, погодне за блиско-инфрацрвене таласне дужине [50, 51]. Фотонски кристали, за разлику од метаматеријала, имају период упоредив са таласном дужином свјетлости ($a \sim \lambda$). У њима таласна природа свјетлости и интерференција играју пресудну улогу, што доводи до настанка фотонских забрањених процјепа између зона у фреквентном спектру (band gaps), аналогних енергетским процјепима у чврстим тијелима [52, 53]. То значи да постоје опсези таласних дужина у којима свјетлост не може да се простире. Тако се формирају и структуре налик низовима таласовода са дефектима који омогућују снажну локализацију свјетлости. Ове структуре су погодне за нелинеарне оптичке уређаје и реализацију високоосјетљивих сензора. Фотонске решетке од таласовода се разликују и од метаматеријала и од фотонских кристала: таласоводи су ширине неколико таласних дужина, а растојање између њих је упоредиво са таласном дужином упадне свјетлости [45, 54]. Простирање свјетлости у овим системима је контролисано еванесцентним спрезањем свјетлости из сусједних таласовода. За разлику од фотонских кристала, не јављају се забрањене области, већ је простирање одређено динамиком спрегнутих мода. Као посљедица, фотонске решетке имају знатно шири спектрални одзив и могу радити у великом дијелу видљивог спектра. То их чини погодним за просторну и спектралну филтрацију свјетлости, и за моделирање феномена у квантној и нелинеарној динамици.

2.1 Фотонске решетке

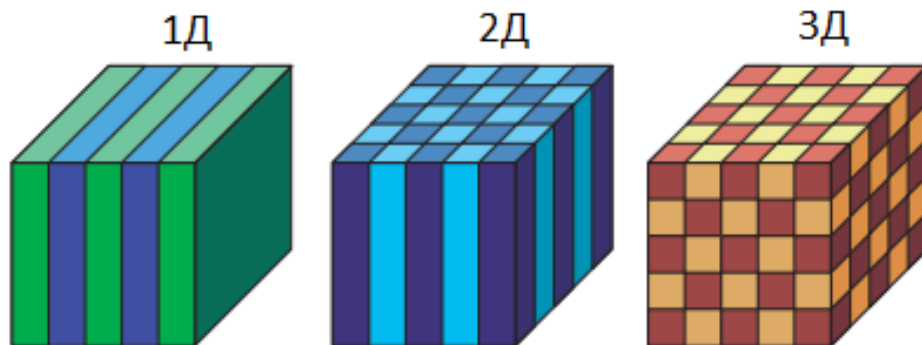
Прва разматрања фотонских кристала датирају из 1887. године, када је Лорд Рејли (Rayleigh) проучавао периодичне вишеслојне диелектричне структуре [55], познате као Брагова огледала, и показао да такви системи могу имати једнодимензионални фотонски забрањени опсег. Током 1960-их и 1970-их година теоријска истраживања су знатно напредовала: Вајнер (Vainer) је проширио теорију Брагове дифракције на оптичке структуре, Биков (Bikov) је испитао утицај фотонског забрањеног опсега на спонтано емитовање и предвидио његову инхибицију [56], док је Отака 1979. године први разматрао тродимензионалне периодичне структуре и развио формализам за њихов прорачун.

Преломни тренутак догодио се 1987. године, када су Јаблонович (Yablonovitch) и Џон (John) независно објавили радове који су поставили основе савременог концепта фотонских кристала [52, 53]. Јаблонович је предложио њихову примјену за контролу густине фотонских стања и спонтаног емитовања, док је Џон указао на њихову улогу у локализацији и управљању свјетлошћу. Прва експериментална реализација тродимензионалног фотонског забрањеног опсега постигнута је 1991. године у микроталасном домену, у структури познатој као „Јаблоновит“. Неколико година касније, 1996, Краус (Krauss) је демонстрирао први дводимензиони фотонски кристал на оптичким таласним дужинама [57], чиме је омогућен пренос техника из полупроводничке индустрије у ову област. Убрзо затим, Расел (Russell) је развио фотонска кристална влакна [58], чије су особине значајно надмашиле могућности класичних оптичких влакана.

У наредним деценијама услиједио је развој напредних техника фабрикаци-

је, као што су структуре налик на наслагане диелектричне греде (woodpile) и инверзни опали [46]. Данас су фотонски кристали реализовани и темељно истражени у једној (1Д), двије (2Д) и три (3Д) димензије, Слика 2.2, а њихове примјене обухватају ласере, ЛЕД диоде, фотонска влакна, сензоре и интегрисана фотонска кола.

Приликом одређивања димензионалности фотонског кристала, мисли се на број просторних димензија у којима се периодично мијења индекс преламања. Код 1Д фотонских кристала индекс преламања варира у једном правцу; типични примјери су Брагова огледала и диелектрични премази. Код 2Д фотонских кристала варијација се јавља у двије димензије, док је у трећој структура хомогена; примјер су фотонске кристалне плоче (photonic crystal slabs) са периодичним распоредом рупа у полупроводничком материјалу, које омогућавају вођење и контролу свјетлости у равни. У 3Д фотонским кристалима индекс преламања варира у све три димензије, што доводи до сложеније структуре фотонских забрањених зона и ефикасније контроле свјетлости.



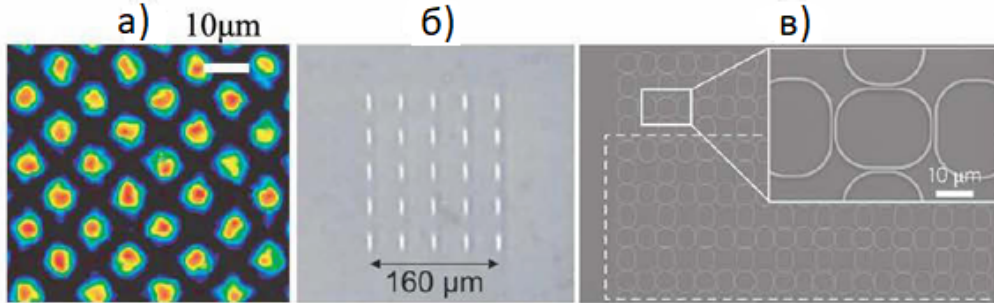
Слика 2.2: Примјери 1Д, 2Д и 3Д фотонских кристала (са лијева на десно). Различите боје означавају различите вриједности диелектричне константе.

Како фотонске решетке представљају низове таласовода међусобно повезаних еванесцентним пољима оне показују сличне појаве као кристали, попут Брилуенових зона и спектралне структуре дозвољених и забрањених зона, али имају и своје особености везане за усмјеравање и контролу свјетлости. У таквим системима енергија се води кроз појединачне таласоводе, али захваљујући преклапању еванесцентних поља може “прескакати” у сусједне канале.

1Д низове таласовода карактерише периодичност у једном попречном правцу и транслациона инваријантност дуж z -осе, док 2Д решетке имају распоред у два попречна смјера и омогућавају богатије динамичко понашање. У том погледу, показују аналогију са фотонским кристалним влакнима, јер и једни и други користе периодичност за управљање просторном расподјелом свјетлости.

Појаве као што су Брагова рефлексија и интерференција имају значајну улогу и у решеткама, па чак и у линеарном режиму доводе до динамике суштински различите од хомогених медијума. Управо зато се низови таласовода често користе као моделни системи за проучавање транспортних феномена аналогних кретању електрона у кристалним полупроводницима.

У пракси, фотонске решетке могу се реализовати различитим техникама — од класичних поступака у полупроводничкој технологији до директног ласерског уписивања у стакло [59, 60, 61, 19]. На Слици 2.3 приказани су примјери реализованих структура добијених овим методама.

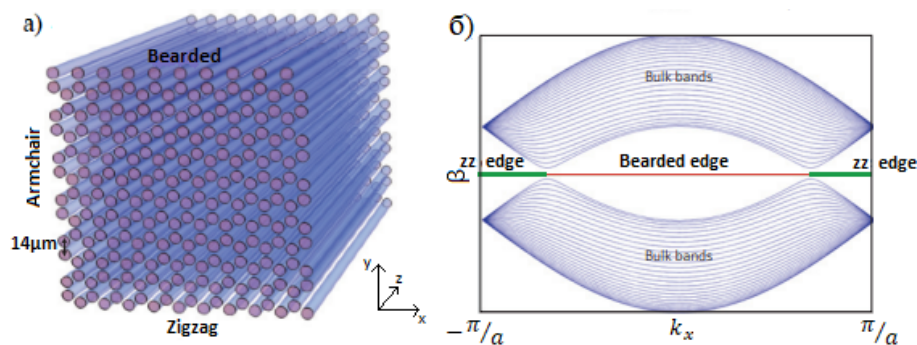


Слика 2.3: Примјери фотонских решетки. а) оптички индукована решетка у фоторефрактивном кристалу; б) решетка таласовода уписана фемтосекундним ласером у топљени силицијум-диоксид; в) низ таласовода са резонаторима у облику прстена у силицијуму. Преузето из [62].

2.2 Гранични услови и дизајн решетки

Гранични услови у фотонским решеткама имају пресудан утицај на изглед енергетског спектра и симетрије система. Приликом моделирања најчешће се разматрају отворени и периодични (торусни) услови, као и специфичне конфигурације попут цик-цак (zig-zag), армчер (armchair) и беардед (bearded) ивица [63, 14], Слика 2.4. Отворени услови доводе до локализованих ивичних стања осјетљивих на геометрију и дужину решетки [64, 11], док периодични услови симулирају бесконачан систем у коме је транслациона симетрија у потпуности очувана [13]. За разлику од њих, цик-цак и армчер услови, карактеристични за хексагоналне и сродне решетки, уводе додатне ефекте који значајно мијењају спектралну структуру и могу довести до формирања равних зона (flat bands) [65], модификације тополошких инваријанти и појаве различитих типова заштићених ивичних стања [18]. Посебно, армчер услови нарушавају одређене симетрије у односу на цик-цак, што резултира помјерањем енергетских нивоа и измјеном дисперзионих односа у близини Диракових тачака. Због тога избор граничних услова представља кључан фактор у разумевању тополошких фаза и робусности ивичних мода у фотонским решеткама.

Фотонске решетки у облику саћа (honeycomb), које ће и бити предмет дијела истраживања ове дисертације, представљају оптички аналог графена и омогућавају детаљно проучавање појаве ивичних стања у дискретним системима [11, 13]. Као што је познато из физике кондензоване материје, спектар енергија у оваквим структурама јако зависи од граничних услова, односно од врсте ивица које се реализују у систему. Енергетски спектар, односно зависност својстених вриједности од таласног вектора, приказан је на Слици 2.4 б). Јасно се уочава постојање дисперзивних зона (bulk bands), између којих се формирају ивичне



Слика 2.4: а) Фотонска решетка у облику саћа са различитим типовима ивица – цик-цак, амрчер и беардед. б) Спектар својствених вриједности који приказује појаву ивичних мода локализованих на цик-цак и беардед ивицама унутар забрањене зоне. Преузето и адаптирано из [64].

моде. Моде локализоване на цик-цак ивици (означене зеленом линијом) и на беардед ивици (означене црвеном линијом) показују фундаментално различита својства. Док цик-цак ивица подржава ивичне моде у одређеним опсезима вриједности интензитета таласног вектора, беардед ивица омогућава појаву равних спектралних линија које кореспондирају са слабо дисперзивним и локализованим стањима [66].

Експериментална посматрања ивичних стања у фотонским решеткама у облику саћа потврђују да постоји потпуна аналогија са електронским системима у графену. То омогућаваје детаљно проучавање улоге симетрија, тополошких инваријанти и дизајна граничних услова на појаву робусних локализованих мода [18] у систему. На тај начин, фотонске структуре постају изузетно погодна платформа за емулацију квантних појава у класичним оптичким системима, уз предност високе контролисаности параметара и лакше експерименталне реализације.

Фотонске решетке се могу креирати на више начина у зависности од материјала и потребне геометрије. Један од најчешће коришћених поступака је ултрабрзо (фемтосекундно) ласерско урезивање (или уписивање) таласовода у стаклу (нпр. фузионом кварцу или боросиликату) [67, 68, 61], које омогућава генерисање тродимензионалних конфигурација. Поред тога, у нелинеарним фоторефрактивним кристалима (као што је стронцијум-баријум-нитрат, SBN) решетке се могу динамички формирати оптичком индукцијом [59]. За добијање микрометарских и нанометарских структура користи се и директно ласерско уписивање засновано на двофотонској полимеризацији, најчешће у полимерним материјалима [69]. Такође, у стаклу и кристалима примјењују се и јонска или протонска измјена [70], чиме се уноси контролисана промјена индекса преламања. На овај начин, зависно од материјала (стакло, фоторефрактивни кристали, полимери), могу се реализовати разноврсне фотонске решетке погодне за интегрисану фотонику и истраживање тополошких ефеката.

За детаљно проучавање простирања свјетлости кроз дискретне системе потребно је да таласоводне решетке испуњавају више услова. Прије свега, спојеви између појединачних елемената морају бити довољно хомогени како би се избје-

гле статистичке неправилности и хаотично понашање. Такође, параметри сваког таласовода треба да буду контролисани и подесиви, што омогућава увођење вјештачких дефеката. Поред тога, неопходна је флексибилност у геометрији, како би било могуће реализовати 1Д и 2Д периодичне конфигурације, али и непериодичне распореде као што су укрштања или спајања таласовода. На крају, реализоване структуре морају бити стабилне и трајне. Сви ови захтјеви могу се испунити методом директног ласерског уписивања фемтосекундним (fs) импулсима.

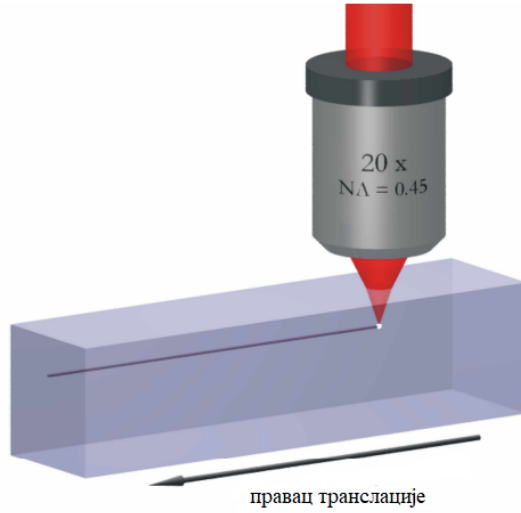
Када се снажно фокусирани ултракратки импулси усмјере у унутрашњост прозирног материјала, долази до нелинеарне апсорпције која изазива оптички пробој и формирање микроплазме. Накнадни релаксациони процеси доводе до трајне модификације микроструктуре, најчешће у облику локалног повећања индекса преламања. Ова промјена се повезује са прерасподјелом атомских и молекулских веза, као и са варијацијама у локалној густини и уређености мреже, што на крају резултира измијењеним оптичким својствима материјала.

Тачан механизам трајне модификације микроструктуре, а самим тим и промјене индекса преламања услед фемтосекундног ласерског писања, зависи од врсте материјала. Уобичајено укључује реорганизацију на нанометарском нивоу, што омогућава формирање стабилних таласоводних канала унутар запреминских (bulk) узорака. У случају да су сферне аберације настале на површини узорка мале, димензије измијењене зоне одређене су величином фокусне регије објектива за писање и могу се приближно процијенити као:

$$w_0 = \frac{M^2 \lambda}{\pi N A}, \quad b = \frac{M^2 \lambda}{\pi N A^2} \quad (2.1)$$

гдје је w_0 полупречник waist-а (најужи полупречник ласерског снопа у фокусу), b Рејлијева дужина, M^2 параметар квалитета снопа који карактерише одступање реалног ласерског зрака од идеалног Гаусовог, а NA нумеричка апертура објектива.

Помјерањем узорка попречно у односу на зрак, добија се континуална модификација и тиме се формира таласовод, Слика 2.5. Такав таласовод може бити уписан дуж произвољне путање, јер је једино ограничење жижна даљина објектива за писање. Све структурне промјене су трајне и стабилне након израде. Својства вођења свјетлости појединачних таласовода јако зависе од параметара уписивања. У вишедимензионом простору параметара, трајање импулса, енергија импулса и брзина уписивања су кључни за формирање жељене расподеле индекса преламања. Модулација индекса преламања опада са порастом брзине уписивања због мањег преклапања између узастопних импулса [25]. Ово се може искористити за модификацију вођених мода, јер при мањим промјенама индекса, мода је слабије конфинирана, што доводи до већег еванесцентног поља.



Слика 2.5: Скица уписивања таласовода фемтосекундним ласером у транспарентни материјал.

2.3 Простирање свјетлости кроз фотонску решетку

Описивање простирања свјетлости у диелектричним структурама полази од Максвелових једначина за континуалну средину:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.2d)$$

гдје је $\mathbf{E}$ јачина електричног поља, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ електрична индукција, ρ густина слободних наелектрисања, $\mathbf{B}$ магнетна индукција, $\mathbf{H}$ јачина магнетног поља и $\mathbf{J}$ густина слободне струје.

У даљем разматрању претпостављамо да у средини нема слободних наелектрисања и струја и да је немагнетна, тј. $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$ и $\mathbf{M} = 0$. Примјеном ротора на једначину (2.2)c и употребом једначине (2.2)d добија се таласна једначина у нехомогеном диелектрику:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + 2\nabla \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot \mathbf{E} \right) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3)$$

Уколико је промјена индекса преламања мала, $\nabla n/n \ll 1$, други члан у претходној једначини можемо занемарити, па добијамо Хелмхолцову једначину:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.4)$$

Размотримо монохроматски ласерски сноп који се простире дуж z -осе, са угаоном фреквенцијом ω и уздужним таласним бројем k_z . Електрично поље пишемо у облику:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) = \mathbf{e}_p A(\mathbf{r}, z) e^{ik_z z - i\omega t}, \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad (2.5)$$

гдје је $A(\mathbf{r}, z)$ споро променљива енvelope, а $\mathbf{e}_p$ јединични вектор поларизације. Параксијална апроксимација [71] подразумева уски трансверзални спектар ($k_z \gg k_x, k_y$) и спору промјену омотача дуж z , тј.

$$|k_z \partial_z A| \gg |\partial_z^2 A|. \quad (2.6)$$

Убацавањем овог израза у Хелмхолцову једначину $\nabla^2 E + k_0^2 n^2(x, y, z) E = 0$ (са $k_0 = \omega/c$) и занемаривањем $\partial_z^2 A$ добија се параксијална једначина:

$$2ik_z \partial_z A + \nabla_\perp^2 A + k_0^2 [n^2(x, y, z) - n_0^2] A = 0, \quad (2.7)$$

гдје је $\nabla_\perp^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ и n_0 референтни индекс (нпр. индекс позадине). За $n(x, y, z) = n_0 + \Delta n$ са $|\Delta n| \ll n_0$ слиједи $n^2 - n_0^2 \simeq 2n_0 \Delta n$ и, стога,

$$i \partial_z A = -\frac{1}{2k_z} \nabla_\perp^2 A - \frac{k_0^2}{2k_z} 2n_0 \Delta n A = -\frac{1}{2k_0 n_0} \nabla_\perp^2 A - \frac{k_0}{n_0} \Delta n A. \quad (2.8)$$

гдје је $\nabla_\perp^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ трансверзални Лапласијан а c брзина свјетлости. Индекс преламања можемо записати као

$$n = n_0 + \delta n_L + \delta n_{NL}(|A|^2), \quad (2.9)$$

гдје је n_0 константна позадинска вриједност, δn_L мала линеарна модулација (нпр. услед структуре решетке), а δn_{NL} нелинеарни допринос који зависи од интензитета снопа $|A|^2$. Пошто су δn_L и δn_{NL} знатно мањи од n_0 , таласни број у z -правцу може се апроксимирати као

$$k_z \simeq \frac{\omega}{c} n_0, \quad (2.10)$$

док се ефекти модулација уносе као мале корекције у параксијалну једначину. Погодно је параксијалну једначину свести на бездимензиони облик.

Уводимо бездимензионалне промјенљиве: трансверзално растојање у јединицама карактеристичне дужине a и пропагационо растојање у јединицама $z_0 = k_z a^2$,

$$\mathbf{r} = a \tilde{\mathbf{r}}, \quad z = z_0 \tilde{z}, \quad \nabla_\perp^2 = \frac{1}{a^2} \tilde{\nabla}^2, \quad (2.11)$$

и нормализовану енvelope A . Параксијална једначина тада има облик кубне нелинеарне Шредингерове једначине

$$i \frac{\partial A}{\partial \tilde{z}} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^2 A + V A + \delta(|A|^2) A = 0. \quad (2.12)$$

Предходно наглашава аналогiju између параксијалног простирања свјетлости и појава које се јављају у физици кондензоване материје. Једна од најпознатијих и најзначајнијих особина нелинеарне Шредингерове једначине јесте постојање солитона [54] – нелинеарних, самоконфинираних таласа код којих нелинеарни члан управо поништава ефекат линеарне дифракције.

Из претходног разматрања види се да се простирање свјетлости у континуалним диелектричним структурама у параксијалној апроксимацији може описати једначином која има облик Шредингерове једначине и описује споро варирајући трансверзални профил свјетлосног снопа.

У фотонским решеткама ситуација је другачија: улазни снап је уско локализован унутар појединачног таласовода, а пренос енергије у сусједне канале настаје преко еванесцентног преклапања њихових мода. Тај дискретни карактер система природно води ка примјени теорије спрегнутих мода (Coupled Mode Theory, CMT) [72], која представља оптичку аналогiju модела чврстих веза (tight-binding model) у квантној механици. У том контексту, еволуција свјетлости у низовима таласовода описује се као међусобно спрезање дискретних таласоводних мода, при чему јачина интеракције зависи од преклапања њихових еванесцентних репова.

Бројни интегрисани оптички уређаји, као што су дирекциони спојници (directional couplers), дјелитељи снаге, модулатори, прекидачи и други, заснивају се управо на спрегнутим таласоводима у којима се овај механизам реализује.

Системи спрегнутих таласовода могу се описивати на различитим нивоима апроксимације. Два најчешће коришћена, а уједно и комплементарна приступа су теорија спрегнутих мода (CMT) и Флоке–Блохов формализам [46]. CMT пружа поједностављени, дискретни опис погодан за структуре са јасно дефинисаним таласоводним каналима и еванесцентним спрезањем, док је Флоке–Блохов формализам општији: он полази директно од таласне једначине у Фуријеовом простору за 2Д периодичну решетку, која има облик:

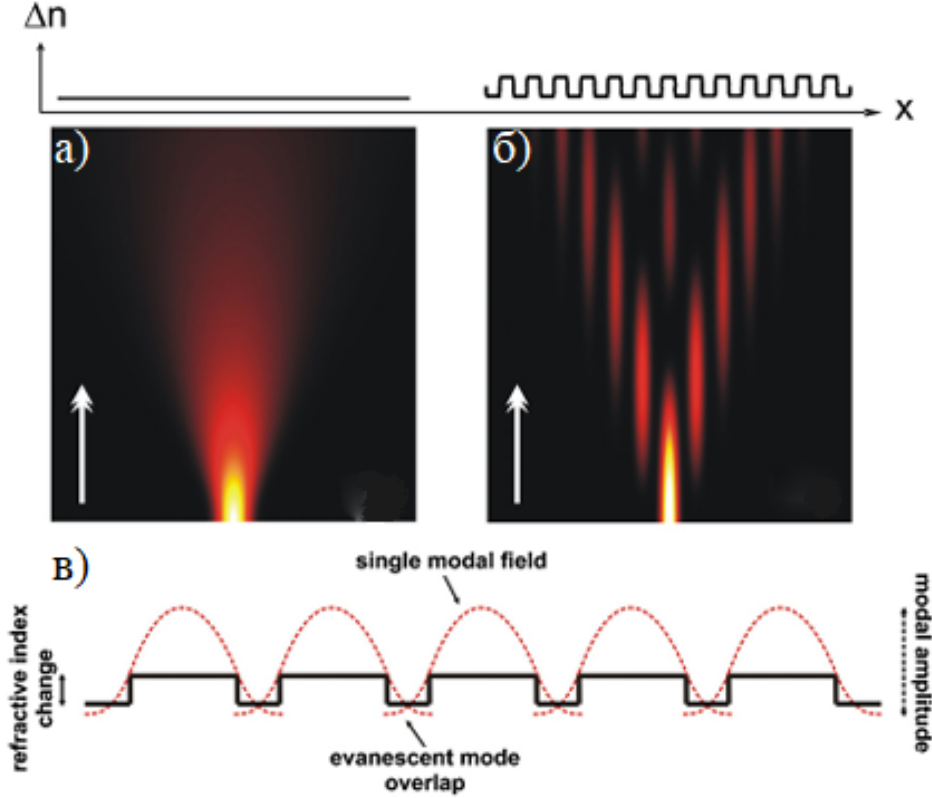
$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, w) - \nabla[\nabla \mathbf{E}(\mathbf{r}, w)] + \frac{w^2}{c^2} \varepsilon(x, y; w) \mathbf{E}(\mathbf{r}, w) = 0. \quad (2.13)$$

Флоке–Блохов формализам омогућава опис и мода вишег реда, јер није ограничен на прву Брилуенову зону већ даје комплетну зонску структуру фотонске решетке. Насупрот томе, теорија спрегнутих мода примјењује се само у оквиру прве зоне, пошто у њој допринос виших зона није укључен у рјешење таласне једначине. Ипак, услови већине експеримената на низовима таласовода оправдавају коришћење овог поједностављеног приступа, па ће он бити усвојен у наставку рада.

Овај формализам представља аналитички модел преноса снаге између сусједних таласовода путем еванесцентног преклапања њихових вођених мода, као и између различитих мода истог таласовода услед пертурбација индекса преламања. Да би спрезање било ефикасно, еванесцентно поље мора имати довољно широку просторну распрострањеност, Слика 2.6 в), што, између осталог, зависи од пуне ширине на половини максимума (FWHM – Full Width at Half Maximum) упадног снопа.

Уколико је ширина снопа знатно мања од периода решетке d , моде поје-

диначних таласовода готово да не „осјећају” сусједне и њихове амплитуде се развијају независно током пропагације. Супротно томе, када су ширина снопа и ширина таласовода упоредиве, долази до дјелимичног преклапања сусједних мода, што омогућава међусобни пренос енергије и варијације амплитуда дуж правца простирања. При високим интензитетима упадног зрачења јављају се и нелинеарни ефекти, пошто индекс преламања постаје функција интензитета свјетлости.



Слика 2.6: а) Дифракција снопа у континуалном медијуму; б) Дискретна дифракција снопа у медијуму са периодично променљивим индексом преламања; в) Скица низа таласовода. Модална поља појединачних таласовода се преклапају, што доводи до преноса енергије између сусједних таласовода. Преузето из [73].

У линеарном случају, односно када су снаге упадне свјетлости недовољно велике па се нелинеарни ефекти могу занемарити, те под претпоставком да су сви таласоводи идентични и да постоји само спрезање између првих сусједа, еволуција комплексних амплитуда електричног поља, надаље означавана са $\psi_n(z)$ у n -том таласоводу дуж правца простирања z дата је системом линеарних диференцијалних једначина облика:

$$i \frac{d\psi_n}{dz} + \beta \psi_n + C(\psi_{n-1} + \psi_{n+1}) = 0 \quad (2.14)$$

гдје је β пропагациона константа посматране моде у уздужном (z) правцу, C константа спрезања која квантитативно описује размјену енергије између два

сусједна таласовода. Константа спрезања C у општем случају може се изразити преко интеграла преклапања нормализованих трансверзалних профила мода $\psi_n(x, y)$ и $\psi_{n+1}(x, y)$ сусједних таласовода:

$$C \propto \iint \psi_n^*(x, y) \Delta n(x, y) \psi_{n+1}(x, y) dx dy \quad (2.15)$$

гдје је $\Delta n(x, y)$ просторна дистрибуција измјене индекса преламања која омогућава спрезање.

Један од најједноставнијих случајева настаје када је на улазу побуђен само један таласовод,

$$\psi_n(0) = \delta_{n,0}, \quad \beta = \text{const.} \quad (2.16)$$

За овакав почетни услов, аналитички се добија решење за амплитуду у n -том таласоводу:

$$\psi_n(z) = i^n J_n(2Cz) e^{i\beta z}, \quad (2.17)$$

гдје је J_n Беселова функција прве врсте n -тог реда.

Овај резултат показује да, услед периодичне структуре решетке, оптичко поље „тунелује“ кроз низ таласовода, удаљавајући се од иницијално побуђеног таласовода. Интензитет свјетлости при томе није максималан у централном таласоводу, већ се временом концентрише у бочним областима и ова појава је позната као дискретна дифракција [54, 73]. Ово је у потпуној супротности са понашањем у континуалним срединама, гдје је енергија најчешће концентрисана око центра снопа. Основна разлика лежи у томе што континуална дифракција описује глобално, непрекидно ширење таласа, док дискретна дифракција резултира локализованим, канализованим или спрегнутим преносом енергије.

У фотонским решеткама дискретна дифракција може бити намјерно пројектована. Неуобичајене дисперзионе особине низа таласовода омогућавају контролу ширења свјетлосних снопова и дају могућност активног управљања дифракцијом [45]. Сваку моду решетке можемо описати као проширену Блохову моду са својственом константом пропагације, док је правац простирања одређен нормалним градијентом енергетске зоне.

Током линеарне пропагације моде се међусобно не мијешају већ се развијају независно, задржавајући своје фазе. Почетни облик побуде може се разложити у суперпозицију Блохових мода, тако да је групна динамика директно условљена геометријом зона. Како моде током пропагације стичу различите релативне фазе, таласни облик на излазу из решетке може имати просторни профил знатно измијењен у односу на улазни. На овај начин фотонске решетке омогућавају контролисано управљање дифракцијом свјетлосних снопова, што је аналогно управљању дисперзијом импулса у оптичким влакнима.

Најједноставнији начин да се дисперзиона својства фотонских решетки квантификују јесте разматрање пропагације равних таласа, који представљају елементарна ријешења у периодичном систему. За таласни облик

$$\Psi_n(z) = \Psi_0 \exp[ik_x n d + ik_z z], \quad (2.18)$$

гдје је k_x трансверзална компонента таласног вектора, k_z константа пропагације, а d растојање између центара сусједних таласовода, убацивање у једначине спрегнутих мода доводи до дисперзионе релације фотонске решетке:

$$k_z = 2C \cos(k_x d). \quad (2.19)$$

Ова релација $k_z(k_x)$ игра улогу аналогну дисперзионој релацији $\omega(k)$ у временској области: као што $\omega(k)$ дефинише дозвољене фреквенције у функцији таласног броја, тако $k_z(k_x)$ дефинише дозвољене константе пропагације у функцији трансверзалног таласног броја. Линеарне моде у низу таласовода стога су проширене Флоке–Блохове моде са спектром преноса који се састоји од дозвољених зона раздвојених забрањеним зонама. То значи да за одређене вриједности k_x постоји опсег константи пропагације који није дозвољен, што фотонске решетке суштински разликује од хомогених медијума или слободног простора.

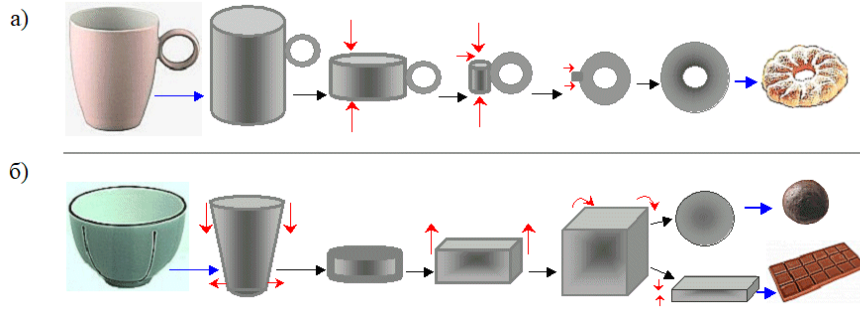
Глава 3

Тополошке фазе и инваријанте у фотоници

Топологија је грана математике која се бави величинама које остају непромијењене под континуираним деформацијама [74, 75]. На примјер, објекти приказани на Слици 3.1 могу се континуирано деформисати тако да, иако имају различиту геометрију, буду описани истом топологијом, и као такви представљају тополошке еквиваленте. Различите топологије се математички карактеришу цјелобројним величинама које се називају тополошке инваријанте [76, 77]— то су величине које се не мијењају под произвољним континуираним деформацијама система. За затворене површине приказане на Слици 3.1, тополошка инваријанта је род (genus), који одговара броју рупа унутар површине. Објекти са истом тополошком инваријантом припадају истој тополошкој фази. Само када се рупа створи или уклони, инваријанта се мијења, а та промјена представља тополошки фазни прелаз.

Поље тополошке фотонике заснива се на концептима који су првобитно развијени у циљу разумијевања тополошких стања у физици кондензоване материје, као и на открићу тзв. тополошких изолатора [11, 13, 14, 15, 16, 17]. Тополошки изолатори представљају класу материјала који су изолатори у балку, али подржавају бездисипативну проводљивост на својој површини, чак и у присуству великих нечистоћа. Почетак овог истраживачког правца везује се за откриће интегралног квантног Холовог ефекта 1980. године [6]. У том ефекту, дводимензиони електронски гас под дејством јаких магнетних поља показује стабилне платое у Холовој проводљивости, чије вриједности одговарају цјелобројним умношцима основне константе e^2/h . Важност овог ефекта превазишла је иницијално експериментално запажање, јер је показано да се цијели број у проводљивости може повезати са тополошком инваријантом — Черновим бројем [5]. Ова величина описује глобалну структуру таласне функције у простору импулса и не зависи од локалних детаља система, већ од његове тополошке природе.

Халдејн и Рагу пренијели су кључне особине овог електронског модела у област фотонике [1]. Теоријски су предложили фотонски аналогон квантног (аномалног) Холовог ефекта у фотонским кристалима — периодичним структурама оптичких материјала које усмјеравају фотоне на сличан начин као што



Слика 3.1: Тополошки еквиваленти објекти са истом вриједношћу тополошке инваријанте: а) род=1; б) род=0.

чврста тијела утичу на понашање електрона. Ванг и сарадници представили су реалистичне материјалне дизајне и експерименталне потврде [7], чиме је тополошка фотоника постала ново и брзорастуће поље.

У класичним таласоводима повратна рефлексија представља озбиљну препреку развоју великих интегрисаних фотонских система. Насупрот томе, једносмјерни ивични таласоводи засновани на тополошким принципима омогућавају пренос електромагнетних таласа без рефлексије уназад, чак и у присуству јаких поремећаја. Због тога тополошка фотоника представља основу за развој робусних и функционално јединствених фотонских уређаја, отпорних на технолошке несавршености и промјене у окружењу, као и за нове типове примјена у интегрисаној фотоници.

3.1 Бери фаза

Прво ћемо увести величину која представља кључни алат за одређивање тополошких инваријанти и карактерисање тополошких фаза квантних система. У квантној механици стања физичког система описују се векторима у Хилбертовом простору. Међутим, множење таквог вектора произвољним комплексним фазним фактором не мијења физички садржај стања. Ова слобода избора фазе позната је као гејџ (gauge) трансформација:

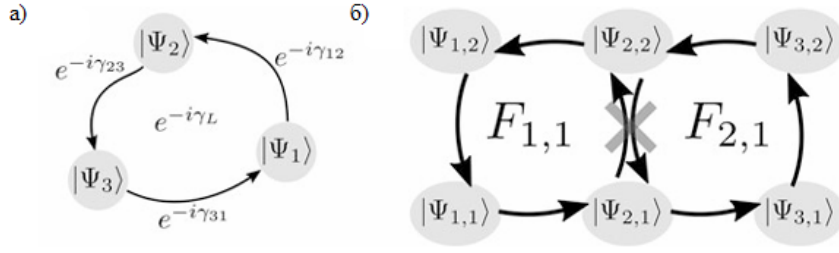
$$|\Psi\rangle \longrightarrow e^{i\alpha}|\Psi\rangle, \quad \alpha \in [0, 2\pi) \quad (3.1)$$

У том контексту, апсолутна фаза вектора $|\Psi\rangle$ не носи физичку информацију. Слједи да је релативна фаза два неортогонална стања $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$ дефинисана као

$$\gamma_{12} = -\arg\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle \quad (3.2)$$

гдје $\arg(z)$ означава фазу комплексног броја z . Јасно је да релативна фаза задовољава однос

$$e^{-i\gamma_{12}} = \frac{\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle}{|\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|}. \quad (3.3)$$



Слика 3.2: а) Бери фаза γ_L петље која се састоји од три стања дефинисана релативним фазама; б) Бери флуks као сума Бери фаза плакета које се налазе унутар петље. Преузето из [22]

Међутим, релативна фаза није инваријантна на локалне гејџ трансформације. Ипак, управо се она користи као основа за дефинисање Бери фазе [22]. Ако узмемо $N \geq 3$ стања у Хилбертовом простору, поређамо их у затворену петљу и израчунамо акумулирану фазу дуж петље, добијамо Бери фазу која је гејџ-инваријантна. За стања $|\Psi_j\rangle$, гдје је $j = 1, 2, \dots, N$, и за уређену листу $L = (1, 2, \dots, N)$ која дефинише петљу, као што је приказано на Слици 3.2а), Бери фаза се дефинише као

$$\gamma_L = -\arg a^{-i(\gamma_{12} + \gamma_{23} + \dots + \gamma_{N1})} = -\arg(\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle \langle \Psi_2 | \Psi_3 \rangle \dots \langle \Psi_N | \Psi_1 \rangle) \quad (3.4)$$

Уколико посматрамо Хилбертов простор квантних стања и коначну дводимензионалну квадратну решетку са тачкама означеним $n, m \in \mathbb{Z}$, $1 \leq n \leq N$, $1 \leq m \leq M$, и свакој тачки придружимо квантно стање $|\Psi_{n,m}\rangle \in \mathcal{H}$, рачунање Бери фазе дуж петље L укључује множење већег броја гејџ-зависних комплексних бројева. Да бисмо то избјегли, уводи се појам Беријевог флуksа, дефинисаног за сваку плакету (елементарни квадрат) решетке, Слика 3.2б). Плакета се означава координатама свог доњег лијевог угла (n, m) , а њен флуks дефинише се као збир релативних фаза дуж њене ивице.

$$F_{n,m} = -\arg \exp[-i(\gamma_{(n,m),(n+1,m)} + \gamma_{(n+1,m),(n+1,m+1)} + \gamma_{(n+1,m+1),(n,m+1)} + \gamma_{(n,m+1),(n,m)}). \quad (3.5)$$

Ако сада посматрамо производ свих фазних фактора плакета $e^{-iF_{nm}}$, уочавамо да свака унутрашња ивица решетке припада тачно двјема сусједним плакетама. Пошто је оријентација фаза дуж ивица унапријед фиксирана, доприноси ових двију плакета биће комплексно спрегнути један другом и, као посљедица, међусобно се поништавају. На тај начин добијамо еквиваленцију:

$$\exp[-i \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M-1} F_{nm}] = e^{-i\gamma_L}. \quad (3.6)$$

Овај резултат подсјећа на Стоксову теорему, која повезује површински интеграл ротора векторског поља са линијским интегралом тог поља дуж границе површине. У нашем случају, збир релативних фаза, односно Бери фаза γ_L , игра улогу линијског интеграла, док двострука сума Беријевих флуksева одговара површинском интегралу. До сада је све било дефинисано у дискретном случају.

Бери (М. V. Berry) је у свом раду [78] из 1984. године увео појам геометријске фазе полазећи од Шредингерове једначине. Нека је Хамилтонијан $\hat{H}$ функција параметара $R = (X, Y, \dots)$ од којих зависи. Ако се током временског интервала од $t = 0$ до $t = T$ параметри мијењају дуж затворене путање $R(t)$ у простору параметара, при чему важи $R(T) = R(0)$, тада је еволуција система еквивалентна кретању дуж кружног пута C , са Хамилтонијаном $\hat{H}(R(t))$. Бери фаза $\gamma_n(C)$ је у том случају одређена кружним интегралом у простору параметара и не зависи од начина на који се путања прелази, под условом да је кретање довољно споро да је адиабатска апроксимација испуњена

$$\gamma_n(C) = i \oint_C \langle n(R) | \nabla_R n(R) \rangle \cdot dR. \quad (3.7)$$

Величина под интегралом, помножена са i , представља Бери конекцију $A(R)$ која описује како се таласна функција мијења у зависности од параметра R . Бери конекција се често тумачи као аналог векторског потенцијала у електромагнетизму. У том духу, Бери кривина одговара јачини магнетног поља, односно ротору векторског потенцијала

$$\Omega(R) = \nabla_R \times A(R). \quad (3.8)$$

Уведене величине омогућавају дефинисање и прорачун тополошких инваријанти система. У дискретној формулацији, Чернов број се дефинише као збир Беријевих флуксева на квадратној решетки постављеној на торусу (или, уопште, на било којој оријентабилној затвореној површини). У континуалној формулацији, овај збир се природно замјењује површинским интегралом Беријеве кривине преко цјелокупног простора параметара $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{C} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} \Omega dx dy. \quad (3.9)$$

3.2 Зак фаза

У претходном одјелку дефинисали смо Бери фазу и тополошку инваријанту у дводимензионалним просторима, тј. Чернов број. Зак (J. Zak) је у свом раду увео Бери фазу за динамику електрона у периодичним чврстим тијелима [9]. У таквим системима енергетски спектар има зонску структуру, тј. састоји се од интервала у којима је енергија непрекидна. Енергија у сваком појасу зависи од Блоховог квазиимпулса k , који се мијења унутар Брилуенове зоне. Кључна особина концепта Бери фазе јесте постојање непрекидног параметарског простора дуж којег стање система може описати затворену путању. У зонској структури чврстих тијела тај простор природно чини Брилуенова зона, која има топологију торуса, при чему се k користи за описивање енергетских зона.

У периодичном систему квазиимпулс k је очувана величина, а Блохова функција $\psi_{nk}(\mathbf{r})$ одређена је бројем зоне n и вриједношћу k . Ако се на систем примијени спољашња пертурбација која доводи до тога да k прати затворену путању унутар Брилуенове зоне, функција $\psi_{nk}(\mathbf{r})$ ће, у општем случају, акумулирати Беријеву фазу. Како Брилуенова зона има топологију торуса, k се у одређеном правцу

може мијењати тако да се путања аутоматски затвара када се достигне ивица зоне.

У систему без симетрије, Беријева фаза може имати произвољну вриједност. Међутим, у присуству симетрија, могуће је дефинисати специфичне путање унутар Брилуенове зоне дуж праваца симетрије, при чему Беријева фаза бива квантизована и поприма дискретне, добро дефинисане вриједности.

Полазећи од Шредингерове једначине за Блоховог електрона у једној димензији, у присуству временски зависног векторског потенцијала $A(t)$, може се извести израз за Бери фазу у једнодимензионалном случају. Рјешење једначине претпостављамо у облику $\psi_{nk}(x) = e^{ikx} u_{nk}(x)$, гдје n означава енергетску зону, k квазиимпулс, а $u_{nk}(x)$ периодични дио Блохове функције. У оквиру адијабатске апроксимације, рјешење се може записати као

$$\psi(x, t) = \exp\left(i\gamma_n(t) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \epsilon_n(k(t')) dt'\right) \psi_{nt}, \quad (3.10)$$

гдје $\gamma_n(t)$ представља временски зависан фазни фактор за енергетску зону n . Враћањем овог рјешења у Шредингерову једначину добија се израз за Бери фазу:

$$\gamma_n = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} X_{nn}(k) dk \quad (3.11)$$

гдје је величина $X_{nn}(k)$ позната у теорији зона у чврстим тијелима и дефинисана је као

$$X_{nn}(k) = \frac{2\pi}{a} \int_0^a u_{nk}^*(x) i \frac{\partial u_{nk}(x)}{\partial k} dx. \quad (3.12)$$

Првобитно је Беријева фаза дефинисана за системе са цикличним Хамилтонијаном, тј. за оне који задовољавају услов $H(t + T) = H(t)$, гдје је T период циклуса. У нашем случају, Хамилтонијан не мора испуњавати овај услов цикличности. Ипак, да би таласни број k обухватио читаву Брилуенову зону, векторски потенцијал $A(t)$ мора да се промијени за $\frac{2\pi}{a}$. У контексту Блоховог проблема, таква промјена k сматра се цикличном, јер одговара калибрацијској (gauge) трансформацији која се компензује тиме што важи

$$u_{n, k+2\pi/a}(x) = \exp(-i2\pi x/a) u_{nk}(x). \quad (3.13)$$

Због тога се Блохов проблем може посматрати као општији случај Бери фазе: иако Хамилтонијан није нужно цикличан у стандардном смислу, он је еквивалентан цикличном до калибрацијске трансформације. У једнодимензионалном случају овако дефинисана Беријева фаза носи посебно име — Закова фаза — и она је гејџ инваријантна.

3.3 Ивичне и нулте моде

Као што смо нагласили, рад Халдејна и Рагуа [1] представља пионирски допринос у успостављању концепта тополошке фотонице, у којој се тополошки аспекти познати из физике кондензоване материје преносе у оптичке и

метаматеријалне системе. По први пут је предложена теоријска реализација фотонских структура са тополошки заштићеним ивичним модама, аналогним хиралним (chiral) ивичним стањима у квантном Холовом ефекту. За разлику од електронских система, гдје је потребно јако магнетно поље и ниске температуре, њихов модел се заснива на магнето-оптичким материјалима који нарушавају временски-инверзиону симетрију (time-reversal symmetry), чиме се омогућава једносмјерно ширење свјетлости дуж ивице без расијања уназад на препрекама или неправилностима.

На први поглед није било очигледно како пренијети концепте из квантног Холовог ефекта — који подразумева наелектрисане честице и Лоренцову силу у магнетном пољу — у систем неутралних бозона. Међутим, кључна идеја је да квантни Холов ефекат може постојати и без спољашњег магнетног поља, у систему без густине магнетног флукса и без Ландауових нивоа. У таквим системима, који се састоје од Блохових стања са нарушеном временском симетријом, тополошка својства стања постају одлучујућа. Управо тај увид Халдејн је искористио као основ за пренос идеја у фотонске системе.

У фотонским структурама појава ивичних мода и њихова веза са Черновим бројевима независна је од статистике честица. Промјена Черновог броја на граници између два региона различите топологије резултира појавом једносмјерних ивичних мода, при чему њихов број одговара разлици Чернових бројева између региона. Како су Чернови бројеви тополошке инваријанте, они не могу да се мијењају континуално, већ искључиво у тачкама дегенерације енергетских нивоа у Брилуеновој зони, при критичној вриједности неког параметра Хамилтонијана λ . У тим тачкама нивои размјењују Чернове бројеве, при чему је њихов збир очуван. Ово се најчешће јавља у дводимензионим системима са временском и инверзионом симетријом, гдје се нивои додирују у тзв. Дираковим тачкама [79].

Да би се реализовале тополошке ивичне моде, конструисани су дводименциони фотонски кристали од магнето-оптичких материјала, гдје се временска симетрија нарушава преко Фарадејевог ефекта. У овом процесу поларизација свјетлости ротира при проласку кроз материјал у магнетном пољу, што доводи до раздвајања дегенерација фотонских појасева и појаве ненулта Беријеве кривине. Магнетно поље се примјењује нормално на раван простирања свјетлости (Фарадејева оса), а захваљујући хексагоналној геометрији решетке, у фотонском спектру се формирају стабилне Диракове тачке. Нарушавањем временске симетрије отварају се енергетски процјепи око тих тачака и настају зоне са супротним ненултим Черновим бројевима. На граници између региона са различитим Черновим бројевима појављују се тополошки заштићене хиралне ивичне моде.

Убрзо након теоријских предвиђања, експериментална потврда стигла је у раду [7], гдје је реализован фотонски кристал од феритних шипки у квадратној решетки под дејством магнетног поља. На овај начин је нарушена временска симетрија и омогућена појава једносмјерних и на расијање имуних ивичних мода. Овај резултат не само да је представљао прву демонстрацију тополошких ивичних мода у класичном (босонском) систему, већ је и показао да фотонска платформа може служити као универзална основа за симулацију тополошких феномена из физике кондензоване материје, гдје је често тешко реализовати све

потребне услове. Накнадни радови су потврдили да и у условима структурне неуређености ове моде задржавају локализацију, што додатно потврђује њихову тополошку заштиту.

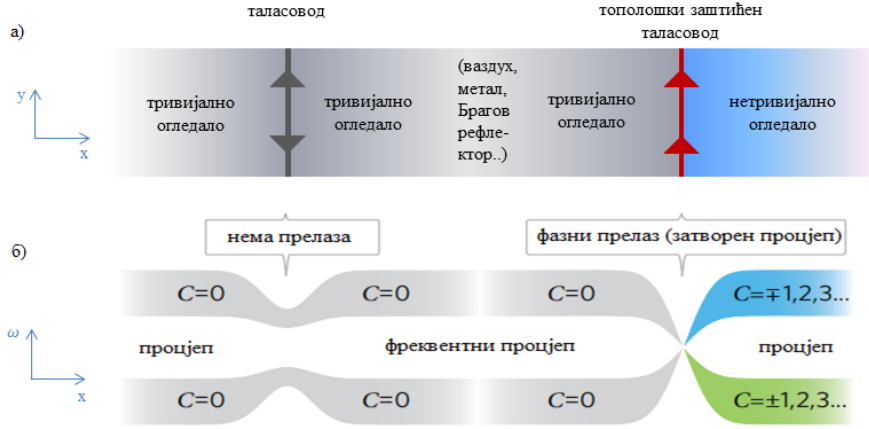
У оквиру класе ивичних мода, посебну пажњу привлаче тзв. нулте моде. Ради се о стањима локализованим на ивици или дефекту структуре, чија енергија (или фреквенција у фотонском контексту) лежи унутар спектралног процјепа — најчешће у близини нуле. Њихово постојање најчешће је последица хиралне или сродне заштитне симетрије. Ове моде су високо локализоване и робусне на локалне пертурбације. Са научног становишта, оне служе као индикатор тополошке нетривијалности система, а са практичног имају потенцијал за примјене у фотонским колима, квантним тачкама и структурисаном транспорту свјетлости. Нулте моде јављају се у SSH моделу, тополошким ласерима и различитим метаматеријалним дизајнима [36, 80].

Кључни предуслов за појаву тополошких ивичних мода јесте нарушавање симетрија, у описаном примјеру временске инверзије. Међутим, то није једини могући механизам — у овој дисертацији биће испитани и алтернативни путеви за настанак тополошких стања у фотонским системима, као и њихова динамика и робусност.

3.4 Балк-ивица кореспонденција

Иако је механизам који повезује тополошке инваријанте у балку са појавом ивичних стања већ поменут у претходном поглављу, он до сада није био експлицитно идентификован као тзв. кореспонденција балк–ивица (bulk–edge correspondence) [22]. Да бисмо боље разумјели њено значење, можемо се послужити аналогијама из класичне оптике. Оптичка огледала рефлектују свјетлост у одређеном фреквентном опсегу, при чему до рефлексије долази услед постојања доступних оптичких стања за те фреквенције. Аналогно енергетским процјепима у електронским изолаторима, у овом случају се јављају фреквентни процјепи. Уобичајена огледала, као што су ваздух–метал интерфејс или Брагови рефлектори, тополошки су тривијална и имају нулти Чернов број. Насупрот томе, огледала са ненултим Черновим бројем су тополошки нетривијална. Најзанимљивији феномени јављају се на граничној површини између два огледала различите топологије. На слици 3.3(а) приказани су ивични таласоводи формиран на споју огледала са истом (лијево) и различитом (десно) топологијом. Разлика се јасно огледа у спектрима њихових ивичних мода унутар фреквентног процјепа балка. На лијевој страни слике 3.3(б) види се да тривијална огледала, која имају исту вриједност тополошке инваријанте, могу бити директно повезана на граници без затварања фреквентног процјепа. Међутим, када огледала имају различите вриједности Черновог броја, топологија не дозвољава директно повезивање. У том случају на граници долази до затварања фреквентног процјепа, неутрализације тополошке инваријанте и поновног отварања процјепа, што представља тополошки фазни прелаз. Управо у таквим условима формира се Дираков конус. Тај прелаз обезбјеђује настанак стања без процјепа (gapless), тј. ивичне моде морају постојати за све фреквенције унутар процјепа балка огледала. Ова стања су тополошки заштићена, а њихов број једнак је разлици

између тополошких инваријанти са обје стране граничне површине. Управо ово представља суштину кореспонденције балк–ивица.



Слика 3.3: Тополошки фазни прелаз; а) илустрација два таласовода формирана огледалима који имају исте (лијево) и различите (десно) топологије; б) примјер тополошког фазног прелаза који настаје приликом затварања фреквентног процијеп.

3.5 Хирална симетрија

Понашање физичких система у великој мјери одређују симетрије које они посједују. Симетрије нису само апстрактна математичка својства, већ представљају дубоку везу између закона природе и појава које можемо очекивати у конкретним физичким условима. Једна од важних симетрија је хирална симетрија. У наставку ће бити објашњено шта она представља, у којим системима се јавља и какве последице њено присуство или нарушавање има на физичке особине система.

Кажемо да систем са Хамилтонијаном $\hat{H}$ посједује хиралну симетрију [22] уколико је испуњено:

$$\hat{\Gamma}\hat{H}\hat{\Gamma}^\dagger = -\hat{H}, \quad (3.14)$$

гдје је $\hat{\Gamma}$ оператор хиралности који мора задовољавати следеће услове: да је унитаран и хермитски, $\hat{\Gamma}^\dagger = \hat{\Gamma}$ и $\hat{\Gamma}^2 = I$, као и да је локалан. То значи да, ако систем има структуру јединичних ћелија, матрични елементи оператора $\hat{\Gamma}$ између чворова који припадају различитим ћелијама морају нестати.

Користећи оператор хиралне симетрије $\hat{\Gamma}$ могу се дефинисати ортогонални пројектори на подрешетке $\hat{P}_A$ и $\hat{P}_B$ као:

$$\hat{P}_A = \frac{1}{2}(I + \hat{\Gamma}), \quad \hat{P}_B = \frac{1}{2}(I - \hat{\Gamma}), \quad (3.15)$$

гдје је I оператор идентитета. Уз помоћ ових пројектора хирална симетрија се може еквивалентно дефинисати захтјевом да Хамилтонијан не повезује стања унутар исте подрешетке: $\hat{P}_A\hat{H}\hat{P}_A = \hat{P}_B\hat{H}\hat{P}_B = 0$.

Једна од непосредних посљедица хиралне симетрије јесте симетричност спектра својствених вриједности Хамилтонијана. Сваком својственом стању са енергијом E одговара хирално партнерско стање са енергијом $-E$, што произилази директно из Шредингерове једначине и дефиниције хиралне симетрије (3.14). Свака два таква стања морају бити ортогонална и имају једнако распоређену норму: половина на подрешетки A , половина на подрешетки B . Насупрот томе, стања нулте енергије (нулте моде) могу бити локализована искључиво на једној подрешетки — на примјер, цијела норма може бити на подрешетки A , док је на B нула. У том случају, стање је уједно и својствено стање хиралног оператора, па му не постоји различито партнерско стање.

У случају запреминског Хамилтонијана у k -простору он се може записати у облику $\hat{H}(k) = \mathbf{d}(k)\hat{\sigma}$, гдје су $\hat{\sigma}$ Паулијеве матрице. У присуству хиралне симетрије, вектор $\mathbf{d}(k)$ остаје ограничен на d_x - d_y раван, што значи да нема компоненту $d_z(k)$, односно важи $d_z(k) = 0$. Због тога се крајња тачка вектора $\mathbf{d}(k)$, док таласни број k пролази кроз цијелу Брилуенову зону, креће по затвореној путањи у d_x - d_y равни, избјегавајући координатни почетак. Ово избјегавање имплицира постојање енергетског процјепка у систему, тј. систем је изолатор. У таквом случају, може се дефинисати број намотаја (winding број) као цијели број који представља колико пута затворена путања вектора $\mathbf{d}(k)$ обилази око координатног почетка:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\tilde{\mathbf{d}}(k) \times \frac{d}{dk} \tilde{\mathbf{d}}(k))_z dk. \quad (3.16)$$

гдје је $\tilde{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}$ јединични вектор у правцу $\mathbf{d}(k)$.

Број намотаја се може израчунати и директно из запреминског Хамилтонијана. Код система који посједује хиралну симетрију, због одсуства интеракције између чворова исте подрешетке, Хамилтонијан је ван-дијагоналног облика. То значи да матрични елементи на дијагонали нестају, па се он може записати у блок форми

$$\hat{H}(k) = \begin{pmatrix} 0 & h(k) \\ h^\dagger(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad h(k) = d_x + id_y \quad (3.17)$$

гдје $h(k)$ садржи информацију о спрези између подрешетки (примјер је SSH решетка [22]). Управо функција $h(k)$ носи тополошку информацију о систему, а број намотаја ν дефинисан је као број пута колико комплексна функција $h(k)$ обилази око координатног почетка док k пролази кроз цијелу Брилуенову зону. Сходно томе, број намотаја можемо записати као интеграл, користећи комплексну логаритамску функцију $\log(|h|e^{i\arg h}) = \log|h| + i\arg h$:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \frac{d}{dk} \log h(k). \quad (3.18)$$

Глава 4

Нелинеарност и неермитски ефекти

Тополошки заштићена ивична стања су експериментално реализована и теоријски предвиђена у разноврсним фотонским структурама као што су жиरोмагнетни фотонски кристали, низови спрегнутих оптичких резонатора, метаматеријали, спирални низови таласовода [1, 7, 19, 18].

Иако су тополошки феномени до сада углавном проучавани у линеарним фотонским системима, нелинеарни режим је природно разматрати при вишим оптичким снагама [33], што отвара кључно питање: какав је утицај нелинеарности на тополошке фазе и ивична стања — и обрнуто? Концепт топологије енергетских нивоа је суштински везан за линеарне системе, конкретно за постојање зонске структуре са забрањеним енергетским процјепом, те његово проширење на нелинеарне системе није тривијално. Ипак, очекује се да ће нелинеарни одзив у фотоници и сродним областима, попут Бозе–Ајнштајнових кондензата [81], омогућити откривање нових функционалности у тополошким фотонским структурама. Поред тога, нелинеарни ефекти могу омогућити реконфигурацију и контролу својстава тополошких таласовода, као и ултрабрзу модулацију њихових оптичких особина.

Линеарни модели фотонских решетки који се могу реализовати у различитим физичким платформама, као што су низови спрегнутих таласовода, микропрстенести резонатори и фотонски кристали. То омогућује примјену фотонских решетки у широком опсегу фреквенција, од оптичких (10^{14}Hz), преко микроталасних (10^9Hz), до терахерцних (10^6Hz) опсега. У режимима са а јаком повратном спрегом између интензитета свјетлости и својстава средине, тј режимима са нелинеарним одзивом средине, предходна универзална скалираност се нарушава.

Тополошки феномени у присуству нелинеарности у фотоници су проучавани на различитим експерименталним платформама, као што су системи оптичких таласовода [25, 82, 83], оптички резонатори [84, 85], атомски гасови, метаматеријали [86, 87]. У Табели 4.1 су приказани различити материјали који су коришћени за испитивање нелинеарних ефеката у оптичким таласоводима, будући да управо они представљају платформу од интереса у овој дисертацији.

Платформа	Материјал	Спектрални опсег	Снага, трајање
Оптички таласоводи	AlGaAs	1530 nm	500 W, 100 fs
	Силицијум-диоксид	800 nm	1 MW, 100 fs
	Фоторефрактивни материјали	488 nm	mW, CW
	Литијум-ниобат	1550 nm	4 kW, 9 ps
	Халкогениди	1040 nm	10 kW, 300 fs

Табела 4.1: Преглед различитих материјала за оптичке таласоводе.

4.1 Простирање свјетлости кроз нелинеарне средине

Како се интензитет упадне свјетлости повећава, нелинеарни одзив материјала, попут оних у Табели 4.1, директно утиче на начин на који се свјетлост простира кроз фотонске решетке начињене од њих. У таквим условима, динамичка својства свјетлосних мода постају знатно сложенија него у линеарном режиму. Нови квалитет је реализација динамичке локализације и настанак солитонских мода, када се линеарна дисперзија (дифракција у дискретном режиму) и нелинеарни ефекат самозаробљавања 'уравнотеже' кроз иницијализацију модулационе нестабилности [88, 89].

Да бисмо разумели појаву нелинеарног самозаробљавања [82, 59], најпре се треба подсјетити основних карактеристика линеарног ширења таласа у низовима таласовода. У линеарном режиму, периодична структура решетке доводи до формирања енергетских зона и забрањених зона унутар Брилуенове зоне. Таласи се могу слободно протирати само ако њихове својствене вриједности (константе пропагације) припадају дозвољеним зонама, док стања чије својствене вриједности падају у забрањене зоне експоненцијално опадају у попречном правцу. У нелинеарним срединама, поље својим интензитетом мијења локални индекс преламања, што дјелује као ефективан дефект у решетки. Због тог поремећаја, својствена вриједност новог стања може ући у забрањену зону. Тада одговарајућа таласна функција постаје локализована, опадајући брзо ван региона у коме је нелинеарни поремећај настао. На тај начин формира се дискретни солитон [90] као само-локализовано стање у таласоводној решетки.

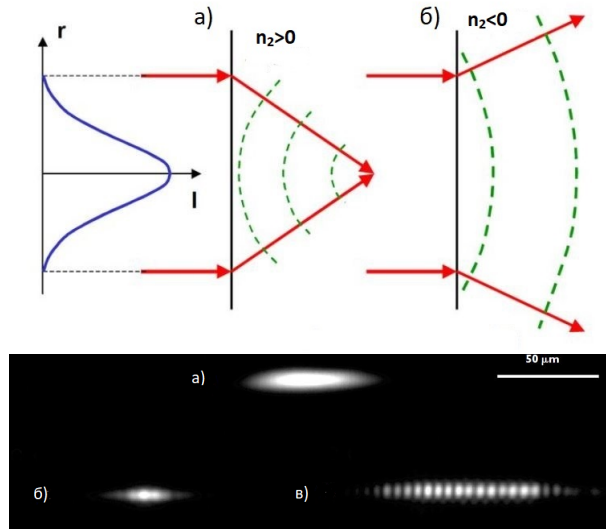
Како се снага оптичког поља повећава, својствена вриједност солитонског стања се све више помјера унутар забрањене зоне, што доводи до јаче локализације и смањења покретљивости снопа у попречном правцу.

Ако су таласоводи довољно раздвојени, Флоке–Блохове моде из прве дозвољене зоне могу се добро описати теоријом спрегнутих мода, представљеном у другом поглављу, или приближно кроз тзв. модел чврстих веза. У том формализму, локална везана стања појединачних таласовода међусобно дјелују путем еванесцентног преклапања. За Керове нелинеарне низове, амплитуде електричног поља E_n ових мода описују се дискретном нелинеарном Шредингеровом једначином:

$$i \frac{dE_n}{dz} + \kappa(E_{n+1} + E_{n-1}) + |E_n|^2 E_n = 0. \quad (4.1)$$

Ово је општа форма дискретне еволуционе једначине, при чему последњи члан описује тзв. „on-site“ (локална) нелинеарност. Као и друге дискретне нелинеарне једначине решетки, попут Ферми–Паста–Уламовог проблема [91], Тодине једначине или Абловиц–Ладикове једначине, и ова једначина има као рјешење дискретне солитоне.

Нелинеарни механизам зависи од материјала и може бити самофокусирајући или дефокусирајући [92]. Локално повећање индекса преламања доводи до самофокусирања, али само у режиму нормалне дифракције. Када је присутна дискретна дифракција, исто нелинеарно повећање индекса преламања може имати супротан ефекат — довести до дефокусирања и ширења снопа. У оба случаја, ефекат зависи и од фазних односа у иницијалној побуди, на примјер, када постоји фазна разлика π између сусједних таласовода. Другим ријечима, улазни снап може се у нелинеарној решетки сужавати или ширити, па се систем понаша као сабирно или расипно сочиво у зависности од знака локалне промјене индекса преламања. На Слици 4.1 приказани су примјери самофокусирања и дефокусирања свјетлосних снопова, као и експериментална реализација ових феномена у AlGaAs низовима таласовода.



Слика 4.1: Горе: а) самофокусирајућа ($\Delta n > 0$) и б) дефокусирајућа ($\Delta n < 0$) средина; Доле: нелинеарно самофокусирање и дефокусирање у низу GaAlAs таласовода, за благо различите почетне услове. а) упадни снап; б) самофокусирање усљед велике улазне снаге ($I = 150W$); в) дефокусирање усљед велике улазне снаге ($I = 100W$). Преузето и адаптирано из [90].

4.2 Локална Керова и сатурациона нелинеарност

Један од основних начина на који материјал реагује на присуство оптичког зрачења јесте помјерање наелектрисаних честица, прије свега електрона, под дејством електричног поља свјетлосног таласа. Овај ефекат се на макроскопском нивоу описује вектором електричне поларизације $\mathbf{P}$ [93], који представља диполни одговор материјала.

У случају ниског интензитета свјетлости, поларизација је пропорционална електричном пољу $\mathbf{E}$, што се назива линеарна оптичка реакција и описује односом

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}, \quad (4.2)$$

гдје је $\chi^{(1)}$ линеарна електрична сусцептибилност, а ε_0 пермитивност вакуума.

Међутим, при довољно великом интензитету свјетлости, одговор материјала постаје нелинеаран, што значи да поларизација више није линеарна функција електричног поља. Општи развој поларизације по јачини електричног поља има облик:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \mathbf{E} + \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots \right). \quad (4.3)$$

Овдје $\chi^{(2)}$ и $\chi^{(3)}$ представљају нелинеарне сусцептибилности другог и трећег реда. За материјале са центросиметричном кристалном структуром важи $\chi^{(2)} = 0$, тако да је најзначајнији допринос нелинеарности управо трећег реда, тј. $\chi^{(3)}$. Материјали код којих доминира овај ефекат називају се Керови медијуми, а сама појава зависности индекса преламања од интензитета свјетлости позната је као Керов ефекат.

У присуству Керове нелинеарности, индекс преламања материјала добија додатни члан који зависи од интензитета:

$$n(I) = n_0 + n_2 I, \quad (4.4)$$

гдје је n_0 линеарни индекс преламања, n_2 Керов коефицијент повезан са $\chi^{(3)}$, а I интензитет упадне свјетлости.

Позитивна вриједност n_2 доводи до локалног повећања индекса преламања, што резултује самофокусирањем снопа. Супротно томе, ако је $n_2 < 0$, јавља се дефокусирање, односно распршивање снопа.

Поред тренутних, интензитет-зависних одговора као што је Керов, постоје и материјали са засићујућом нелинеарношћу. Они показују сличан ефекат, али са ограничењем у износу промене индекса преламања при високим интензитетима. У том случају, нелинеарни део индекса описује се функцијом:

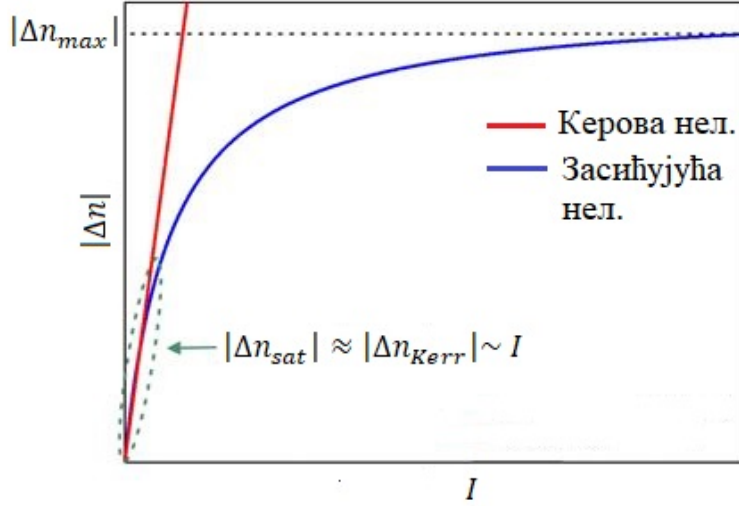
$$n(I) = n_0 + \frac{\Delta n_{max} I}{I + I_{sat}} \quad (4.5)$$

гдје су Δn_{max} максимална промјена индекса преламања, а I_{sat} интензитет засићења. У случају $I \ll I_{sat}$, ова функција се може линеаризовати и своди се на облик Керове нелинеарности, што значи да Керов модел представља апроксимацију засићујуће нелинеарности при малим интензитетима.

Са физичке стране, Керов ефекат одговара тренутном (електронском) одговору материјала, док се засићујућа нелинеарност често јавља у фоторефрактивним кристалима, гдје је промјена индекса последица споријих механизма, као што су миграција носилаца наелектрисања и електро-оптички ефекти.

На Слици 4.2 приказана је зависност промјене индекса преламања од интензитета упадне свјетлости за средине са Керовом и са засићујућом нелинеарношћу. Види се да при нижим интензитетима промјена индекса расте линеарно. Након одређене вриједности, у Керовим срединама та промјена наставља да расте

линеарно, док у срединама са засићујућом нелинеарношћу апсолутна промјена индекса достиже Δn_{max} и остаје константна.



Слика 4.2: Зависност апсолутне промјене индекса преламања од интензитета упадне свјетлости за средине са Керовом и засићујућом нелинеарности.

4.3 Појачање и губитак

У фотонским системима са активним или дисипативним компонентама јављају се такозвани неермитски ефекти, који нарушавају постулат ермитичности Хамилтонијана карактеристичан за затворене, конзервативне системе [94, 95, 30]. Ермитичност, као услов $H = H^\dagger$, гарантује реалност енергетског спектра и очување норме у систему. Насупрот томе, неермитски Хамилтонијани, који описују отворене системе са појачањем (gain) или губицима (loss), имају комплексне својствене вриједности чији имагинарни дио представља локалну стопу појачања или дисипације.

У фотонским решеткама, ови ефекти се реализују увођењем активних медијума који обезбјеђују појачање у одређеним регионима структуре (нпр. оптичким пумпањем или електричним убризгавањем носиоца), док други дијелови могу служити као канали губитака, пасивно (апсорпцијом) или активно дизајнирани као елементи за губитак [96, 97]. У ласерској физици, активни медијум је неопходан за компензовање губитака у резонатору, а исти принцип важи и за фотонске појачаваче. Пумпање активних медијума може бити електрично или оптичко, а у зависности од захтјева користе се полупроводници, допирани кристали, стакла, керамике, гасови и други системи [71, 98]. На примјер, стакла допирана јонима имају шири опсег појачања и омогућавају генерисање ултракратких импулса, али уз слабија термичка својства и више прагове пумпања. Оптимизација концентрације допанта је често кључна: превише допирања побољшава апсорпцију пумпе али може довести до гашења и губитака енергије. Физичка основа појачања је најчешће стимулисана емисија, док се рјеђе користи стимулисано Раманово

расејање. При високим интензитетима свјетлости јавља се засићење појачања, условљено смањењем популације горњег енергетског нивоа. С друге стране, губици у медијуму могу настати апсорпцијом, расијањем (нпр. Рејлијевим) или преносом енергије у невођене моде услед савијања таласовода. У појединим случајевима, губици се могу компензовати или надокнадити појачањем, нпр. у ласерском појачавачу или оптичком параметарском процесу.

Присуство појачања и губитака мења динамику мода у систему: мода са највећим појачањем доминира у временској еволуцији, што је основа рада неермитских ласера. У фотонским решеткама, ови ефекти се најчешће математички описују додавањем члана $i\Gamma$ у дијагоналне елементе ефективног Хамилтонијана, $H_{\text{eff}} = H_0 + i\Gamma$, гдје Γ описује просторну дистрибуцију појачања и губитака. На тај начин, фотонске решетке постају платформа за проучавање не само ласерске и нелинеарне динамике, већ и нових фаза у материјалима, као што су неермитске тополошке фазе. Топлошким фазама придружене су својствене тополошке инваријанте, прилагођене условима комплексног спектра и асиметричне временске еволуције, што их суштински разликује од ермитских аналога.

Узајамно дјеловање неермитских ефеката и нелинеарности представља једно од кључних фундаменталних питања у савременој фотоници. У линеарним РТ (Parity-Time)-симетричним системима добро је познато да долази до наглих прелаза својствених вриједности из реалног у комплексни домен. Међутим, присуство нелинеарности, као што је Керов ефекат, може значајно измијенити ова понашања. Теоријски модели, а потом и експерименти у двоструким полу-проводничким микрорезонаторима, показали су да нелинеарност може довести чак и до поновног уласка система у РТ-симетричну фазу, иако је симетрија у линеарном режиму већ била нарушена. Такви ефекти, проузроковани, на примјер, сатурацијом појачања, указују да редослијед нарушавања симетрије у нелинеарном режиму може бити обрнут у односу на линеарни случај.

Упркос присуству нелинеарности, спектрална структура својствених стања често остаје блиска оној из линеарне теорије, што омогућава директну поређивост ова два режима. Ови резултати имају широку примјену — од робусног преноса енергије у РТ-симетричним колима са нелинеарним елементима, до појаве нових типова дискретних солитона у фотонским кристалима са РТ симетријом. За разлику од дисипативних Гинзбург–Ландау система, гдје су локализовани таласи изолована рјешења у фазном простору, овдје се јављају читаве фамилије стабилних стања, као да је систем ефективно конзервативан. Ова необична класа солитона недавно је и експериментално потврђена у нелинеарним фотонским решеткама са РТ симетријом.

4.4 Тополошки ласери

Тополошки ласери представљају нову класу ласерских уређаја који комбинују принципе ласерске физике са концептима тополошке физике [13, 99, 100, 101], првенствено позајмљеним из теорије тополошких изолатора. За разлику од конвенционалних ласера, гдје је рад осјетљив на дефекте, расијање или неуређеност у структури, тополошки ласери посједују робусност захваљујући постојању тополошки заштићених стања. Та стања настају дуж ивица или граница фотонских

структура и одликују се отпорношћу на сметње које не нарушавају одређене симетрије система.

Са теоријског становишта, тополошки ласери могу се разумјети као системи у којима се ласерска инверзија и повратна спрега реализују преко мода тополошког поријекла. Кључна предност оваквог приступа је у томе што тополошке ивичне моде, које постоје услед нетривијалних тополошких инваријанти (као што су Чернов или winding број), омогућавају једносмјерно, стабилно и робусно вођење свјетлости — чак и у присуству структурних нерегуларности. Та робусност не настаје пасивно, већ захтијева уношење активног медијума, што неизбјежно уводи неермитске ефекте. Због тога теоријски опис тополошких ласера мора укључити неермитске Хамилтонијане, са комплексним својственим вриједностима које описују спектар система са појачањем и губицима.

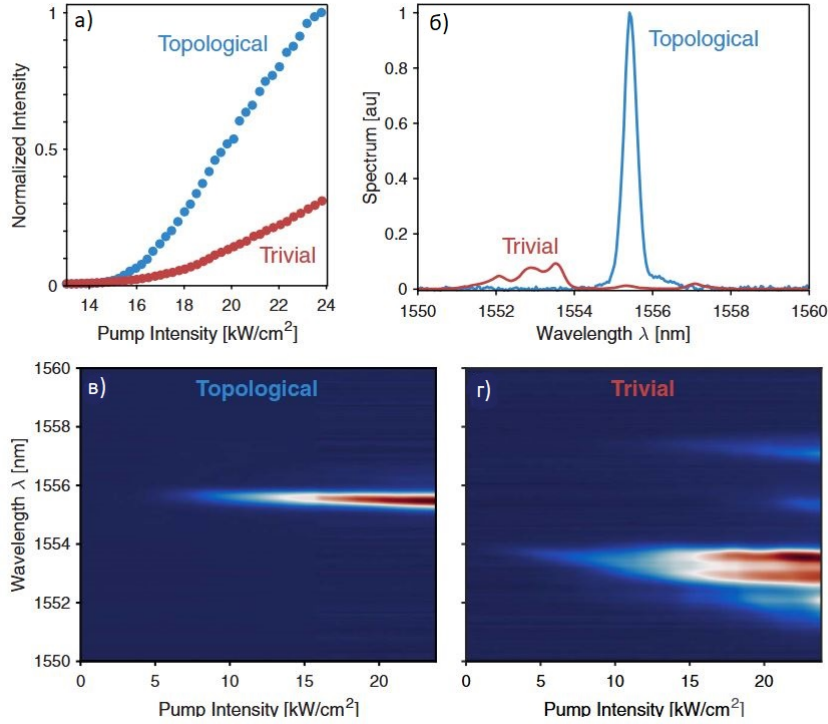
У практичној реализацији, један од најважнијих аспеката је како селективно појачати тополошке моде, а сузбити остале које би конкурисале за појачање. То се најчешће постиже дизајнирањем геометрије и просторне дистрибуције појачања тако да је инверзија локализована дуж ивичних канала гдје настају тополошке моде. Такви системи реализовани су, на примјер, у ласерским решеткама заснованим на Haldane моделу или SSH моделу, као и у активно допираним фотонским кристалима.

Први експериментални докази тополошких ласерских мода добијени су у системима са уведеним неермитским (РТ-симетричним) својствима, гдје је ласерска акција била локализована дуж ивице решетке и показивала изузетну стабилност и једносмјерно ширење. Употреба ласера заснованих на тополошким принципима отвара пут ка развоју нове генерације фотонских компоненти отпорних на мануфактурне несавршености, локалне флуктуације температуре и друге дестабилизујуће факторе. Поред тога, ови ласери нуде потенцијал за интеграцију у фотонске чипове, примјену у квантној оптици и развој нових врста ласерских извора са прилагођеним модним спектром и директивношћу.

Ласерска активација у ивичним тополошким модама може се селективно постићи локализованим пумпањем дуж ивице решетке, чиме се инверзија носилаца концентрише управо у региону гдје настају тополошке моде [36]. У том случају, јасан знак да је добијен тополошки ласер је веома ефикасна емисија у једној моди, чак и при вриједностима појачања знатно изнад прага. Поређењем пумпаних ивица тополошког и тривијалног низа експериментално је утврђена разлика у снази ласерског зрачења и спектралном садржају. Показано је да тополошки низ ради као ласер са знатно већом ефикасношћу него његов тривијални пандан. Из измјерених спектра (Слика 4.3) види се да тополошки низови остају у једном модалитету у широком опсегу густине пумпања, док тривијални низови увијек раде као вишемодни ласери са ширим спектралним линијама. Чак и ако се упореди само снага доминантне моде у тополошком низу са модом највеће снаге у тривијалном низу, тополошки ласер надмашује тривијални за више од једног реда величине.

Ова разлика у перформансама проистиче из физичких особина тополошких ивичних мода. Код тривијалних низова јављају се бројна ограничења: моде се шире у расипајућу унутрашњост (bulk), што слаби емисију; често избегавају излазни спојник како би максимизовали појачање; а услед производних неуређе-

ности ласерске моде могу бити локализовани у различитим дијеловима решетке, свака на различитој фреквенцији, што доводи до вишемодности. Насупрот томе, у тополошким низовима ивичне моде, осим слабог експоненцијалног продора у унутрашњост, остају снажно ограничене на ивицу. Како су приморане да циркулишу дуж ивице, оне су увијек у контакту са излазним спојником. Захваљујући својим урођеним тополошким својствима, ласерске ивичне моде не локализује се насумично, већ се равномерно простиру дуж ивице у једном модалитету, ефикасно користећи расположиво појачање и потискујући паразитске моде.



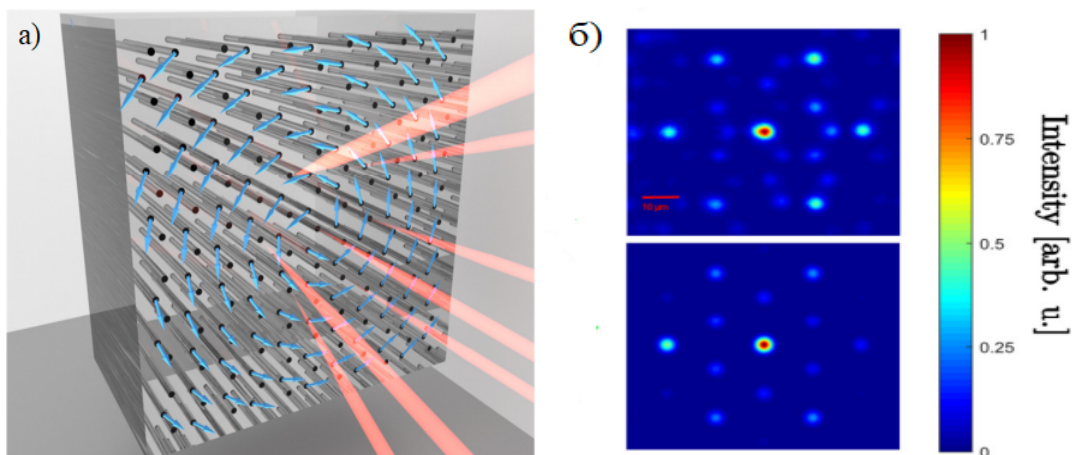
Слика 4.3: Ефикасности нагиба и припадајући спектри тополошких и тривијалних ласерских низова. (а) Интензитет излаза у односу на интензитет пумпања за тополошки низ и његов одговарајући тривијални еквивалент; (б) Емисиони спектри из тривијалног и тополошког низа; (в) и (г) Еволуција спектра као функција интензитета пумпања за (в) тополошке и (г) тривијалне низове. Преузето из [36]

Глава 5

Тополошке моде у хексагоналној и ромбичној фотонској решетки

У овом дијелу дисертације испитујемо фотонске еквиваленте линеарних и нелинеарних Диракових материјала, који су изазвали велико интересовање како у фотоници, тако и у физици кондензоване материје [102, 103, 28, 104]. Ови материјали се одликују уским или нултим енергетским процјепом, при чему се енергетски нивои додирују у близини тачака укрштања, познатих као Диракове тачке [105]. Увођењем поремећаја који доводи до отварања процјепа у енергетском спектру могући су тополошки фазни прелази, при чему настају робусна стања — тополошке ивичне моде, отпорне на пертурбације унутар основног Хамилтонијана. Реализација таквих система је могућа, на примјер, израдом хексагоналних фотонских решетки оптичких таласовода на чипу или унутар оптичких влакана. Ове решетки могу бити коначне, при чему се јединичне ћелије могу конструисати на више начина (нпр. димерске или хексагоналне), са различитим симетријама (од C_2 до C_6), као и завршецима ивица, укључујући цик-цак, армчер и мјешовите границе [106, 107, 14].

Недавна експериментална реализација стања везаног за вртлог, које представља тачкасти дефект у систему [26], представљала је додатни подстрек за почетак овог истраживања. Ове моде, повезане са тополошким дефектом, реализоване су у дводимензионалној фотонској решетки састављеној од идентичних таласовода. Тополошки прелаз је индукован увођењем дисторзије у систем тако да јачина спрезања структурисано варира између најближих сусједа таласовода. Ово је довело до раздвајања енергетских зона које су се додиривале у Дираковим тачкама, отварања процјепа у енергетском спектру и формирања мода локализованих унутар тог процјепа, тачно на нултој енергији, због чега су названи нулте моде. На тај начин је потврђен модел који су први предложили Џејкив и Роси у оквиру квантне теорије поља, са циљем да опишу спрезање фермиона са комплексним скаларним пољем у Дираковој једначини. Показано је да уколико скаларно поље садржи вртлог, у његовом центру настаје рјешење Диракове једначине са нултом енергијом. У наведеном експерименту, дисторзија је реализована малим помјерањима позиција таласовода, док је нулта мода ексцитована истовременим свјетлосним побуђивањем више таласовода у близини центра вртлога, Слика 5.1.



Слика 5.1: а) Илустрација истовременог освјетљавања више појединачних таласовода зрацима који имају унапријед подешену фазу и амплитуду; б) Горѐ: Снимак камером ексцитоване нулте моде везане за центар вртлога добијене приликом извођења експеримента; Доле: нулта мода добијена нумеричким симулацијама. Преузето из [26]

Једна од значајних предности фотонских решетки јесте то што оне представљају изузетно погодну платформу за експериментално проучавање система у којима је могуће прецизно контролисати параметре. У посљедњој деценији расте интересовање за испитивање неермитских ефеката и њиховог утицаја на појаву и динамику тополошких структура, посебно у условима када је појачање у систему уравнотежено са губицима, чиме се одржава РТ-симетрија. Поред тога, истраживање улоге нелинеарног одзива постаје кључно у режимима великих улазних снага свјетлости, јер нелинеарни ефекти могу суштински мијењати стабилност и еволуцију тополошких мода.

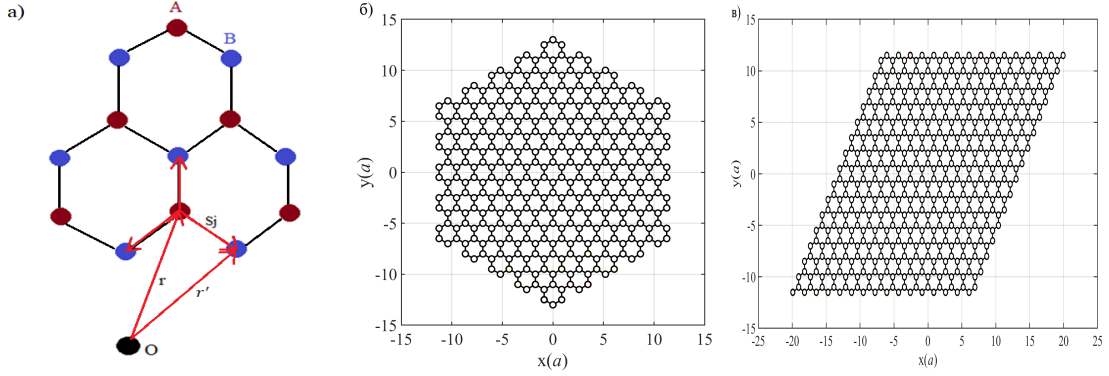
Неколико феномена у тополошкој фотоници, откривених кроз проучавање активних средина са присуством појачања и губитака, као и ефеката нелинеарности, обухватају: појаву тополошких ласера [94], нелинеарно управљање локализованим тополошким модама [33], као и стварање стабилних балк солитона у нелинеарним Дираковим структурама [37].

У овом истраживању, изван оквира до сада интензивно проучаваних појава у хексагоналним решеткама, испитивали смо могућност да нулта мода у присуству појачања и губитака пређе у ласерски режим рада. Најпре је анализиран утицај нелинеарности на појаву и стабилност нултих мода, а затим и њихово понашање у условима ласерске емисије.

5.1 Модели и гранични услови решетки

Разматрамо хексагоналну [108] и ромбичну [109] бипартитну (bipartite) решетку сачињену од таласовода, које ћемо реализовати користећи двије различите конфигурације граничних услова, армчер и цик-цак, Слика 5.2. Обје решетки у својој градивној основи садрже хексагоне. Код хексагоналне решетки, јединичну ћелију чини шест таласовода који директно формирају хексагон, док се у слу-

чају ромбичне решетке јединична ћелија састоји од два таласовода (димера), чијом трансляцијом настају хексагоналне структуре. Уопштено, бипартитност означава могућност да се решетка раздвоји на двије независне подрешетке, обично означене са A и B , гдје чворови из једне подрешетке интерагују само са чворовима из друге подрешетке, што резултује специфичним симетријама и карактеристичним особинама енергетског спектра. У бипартитним решеткама нулте моде настају као посљедица нетривијалне тополошке структуре, на примјер у присуству спрезања које обухвата и прве сљедеће сусједице или услед псеудо-спин орбиталних ефеката. Њихов број износи најмање $|\mathcal{N}_A - \mathcal{N}_B|$, гдје су $\mathcal{N}_A$ и $\mathcal{N}_B$ бројеви чворова у подрешеткама A и B , респективно.



Слика 5.2: а) Структура хексагоналне решетке са бипартитном симетријом, гдје су чворови подрешетки означени различитим бојама, подрешетка A (црвена) и подрешетка B (плава); б) Хексагонална решетка у армчер конфигурацији; в) Ромбична решетка у цик-цак конфигурацији.

Иако се у овом раду разматрају двије решетке, чија се разлика огледа у геометрији јединичне ћелије и избору граничних услова, простирање свјетлости у објема решеткама може се описати истим математичким формализмом. Хамилтонијан у оба случаја има исти облик у апроксимацији јаке везе (tight-binding). Он укључује сљедеће чланове: спрезање између сусједних таласовода ($\hat{H}_{\text{latt}}$), локалну сатурациону Керову нелинеарност ($\hat{H}_{\text{Kerr}}$) и неермитске ефекте појачања и губитака ($\hat{H}_{\text{gain}}$):

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{latt}} + \hat{H}_{\text{Kerr}} + \hat{H}_{\text{gain}}, \quad (5.1)$$

$$\hat{H}_{\text{latt}} = - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (t + \delta t_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}) \hat{a}_{\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{r}'} + h.c., \quad (5.2)$$

$$\hat{H}_{\text{Kerr}} = \frac{G}{2} \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{1 + |a_{\mathbf{r}}|^2} \hat{a}_{\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{r}} + \frac{1}{1 + |b_{\mathbf{r}}|^2} \hat{b}_{\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{r}} \right], \quad (5.3)$$

$$\hat{H}_{\text{gain}} = i \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{\Gamma_A}{1 + |a_{\mathbf{r}}|^2} \hat{a}_{\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{r}} + \frac{\Gamma_B}{1 + |b_{\mathbf{r}}|^2} \hat{b}_{\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{r}} - \gamma_A \hat{a}_{\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{r}} - \gamma_B \hat{b}_{\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{r}} \right], \quad (5.4)$$

гдје су $\hat{a}^{\dagger}, \hat{b}^{\dagger}$ и $\hat{a}, \hat{b}$ оператора креације и аниhilације који дјелују у подрешеткама A и B .

Сваки таласовод, чији је положај у решетки описан вектором $\mathbf{r}$ и који припада троугластој подрешетки A , окружен је са три сусједна таласовода, означена векторима $\mathbf{r}'$, који припадају троугластој подрешетки B . Они су раздвојени растојањима $\mathbf{s}_j$, гдје је $j = 1, 2, 3$, тако да важи $\mathbf{r}'_j = \mathbf{r} + \mathbf{s}_j$, Слика 5.2а). Амплитуде мода у таласоводу на положају $\mathbf{r}$ означене су са $a_{\mathbf{r}}$ и $b_{\mathbf{r}}$ у одговарајућим подрешеткама. Комплетна таласна функција на положају $\mathbf{r}$ има облик

$$|\psi_{\mathbf{r}}\rangle = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{r}} \\ b_{\mathbf{r}} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Први члан Хамилтонијана, $\hat{H}_{\text{latt}}$, описује спрезање између најближих сусједа, гдје је јачина спрезања означена са t . Случај без дисторзије одговара стандардном Хамилтонијану за системе сличне графену, формулисаном у једночестичној апроксимацији, при чему се занемарује електронски спин. Новина овог модела је увођење дисторзије, која се реализује модулацијом јачина спрезања између таласовода. Та модулација је описана варијацијом $\delta t_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$ у односу на униформно спрезање t , тако да ефективна јачина спрезања између таласовода на положајима $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ гласи

$$t_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = t + \delta t_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}. \quad (5.6)$$

Параметар G , присутан у члану $\hat{H}_{\text{Kerr}}$, означава јачину локалне Керове нелинеарности у решетки. Појачање у подрешеткама A и B је описано параметрима Γ_A и Γ_B , а γ_A, γ_B представљају губитке присутне због расипања, апсорпције материјала и излазног спрезања.

Пропагација моде се описује једначином:

$$i\partial_z |\psi_{\mathbf{r}}(z)\rangle = \hat{H} |\psi_{\mathbf{r}}\rangle, \quad (5.7)$$

која је формално еквивалентна Шредингеровој једначини. Док се у квантној механици еволуција система одвија у времену, у фотонским таласоводним решеткама улогу временске координате преузима оса пропагације z . За рјешавање једначине 5.7 примјењује се нумерички Рунге–Кута метод четвртог реда.

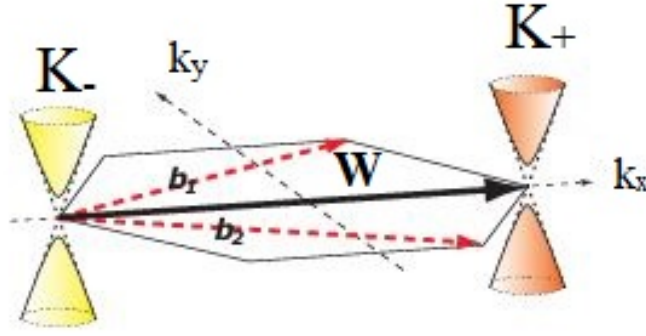
5.2 Дисторзија типа вртлога

Тополошки фазни прелаз можемо разумјети кроз ефекте који настају као посљедица увођења дисторзије у систем. Полазимо од линеарног Хамилтонијана који, у одсуству дисторзије ($\delta t_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = 0$), може бити записан у дијагоналној форми у k -простору и има облик:

$$\hat{H}_{\text{latt}} = \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + h.c.. \quad (5.8)$$

$\phi_{\mathbf{k}}$ је комплексна функција која у k -простору описује ефективно спрезање између подрешетки, односно садржи информацију о величини и фази еванесцентног преклапања мода

$$\phi_{\mathbf{k}} = -t \sum_{j=1}^3 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}_j). \quad (5.9)$$



Слика 5.3: Приказ прве Брилуенове зоне троугласте решетке заједно са Дираковим тачкама $K_{\pm}$ на граници зоне и вектором $\mathbf{W}$ који их повезује. Преузето из [105].

Из дијагонализованог Хамилтонијана добија се дисперзиона релација која повезује енергију и таласни вектор:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \pm |\phi_{\mathbf{k}}|. \quad (5.10)$$

Добијени енергетски спектар садржи двије Диракове тачке, у којима се енергетске зоне додирују. Оне се налазе на нултој енергији и позициониране су на границама Брилуенове зоне у тачкама $K_{\pm} = \pm(4\pi/(3\sqrt{3}a), 0)$.

Приступамо линеаризацији око Диракових тачака, $\mathbf{k} = K_{\pm} + \mathbf{p}$, гдје је $\mathbf{p}$ мали помак око Диракове тачке. Добија се спектар који садржи два скупа мода ($\pm$), при чему сваки скуп живи у близини једне од двије Диракове тачке. Хамилтонијан се након линеаризације може записати као:

$$\hat{H}_{\text{Dirac}} = \sum_{\mathbf{p}, \pm} \phi_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}, \pm}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{p}, \pm} + h.c., \quad \phi_{\mathbf{p}} = \pm v_F (p_x \pm i p_y). \quad (5.11)$$

Дисперзиона релација сада има Диракову конусну структуру $\varepsilon_{\pm}(\mathbf{p}) = \pm v_F |\mathbf{p}|$, гдје је v_F Фермијева брзина. То значи да енергија расте линеарно са удаљеношћу од Диракове тачке и да постоје два симетрична конуса који се сусрећу у нултој енергији.

Вртложни тополошки дефект се уводи у систем у виду Кекуле текстуре, која омогућава хиралну мјешавину мода из обје Диракове тачке $K_{\pm}$. Такав дефект се реализује модулацијом јачина спрезања, која се може записати у облику:

$$\delta t_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = \frac{1}{3} \Delta(\mathbf{r}) \exp(i K_+ \cdot \mathbf{s}_j) \exp(i W \cdot \mathbf{s}_j) + c.c., \quad (5.12)$$

гдје је $W = K_+ - K_-$ таласни вектор који повезује Диракове тачке, Слика 5.3. Параметар $\Delta(\mathbf{r})$ је комплексна величина одређена амплитудом и фазом. Амплитуда $|\Delta(\mathbf{r})|$ одређује јачину спрезања и величину процјеп у спектру, док фаза контролише уређеност спрезања и начин мијешања мода из обје Диракове тачке. Ако је $\Delta(\mathbf{r})$ просторно константна, добија се процјеп величине $|\Delta(r)|$ у спектру. Међутим, ако фаза варира у простору, на примјер у виду

вртложних дефеката, могу се појавити локализоване нулте моде унутар процјена. Разматрамо вртлог центриран у координати $\mathbf{r} = 0$:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0(r)e^{i(\alpha + \mathcal{N}\theta)}, \quad \Delta_0(r) = \Delta_0 \tanh(r/l_0), \quad (5.13)$$

гдје $\Delta_0(r)$ одређује просторни профил вортекса, l_0 је радијус а α је фаза вртлога. Координата таласовода у решетки је $\mathbf{r}$, θ њен поларни угао, а $\mathcal{N}$ је цјелобројна вриједност која представља 'вртложност', тј. тополошку инваријанту дефекта. Знак инваријанте $\mathcal{N}$ одређује која од двије подрешетке подржава вртложни дефект (1 за A и -1 за B). Уколико додајемо дисторзију у подрешетку B , вртложни дефект а самим тим и мода везана за њега ће се формирати у подрешетки A и обрнуто.

У коначној решетки, спектар својствених вриједности генерално зависи од фазе вртлога α . Промјеном вриједности фазе α , у региону малих енергија може доћи до хибридизације између мода које индукује вртложни дефект и локализованих ивичних мода присутних у булку. Та хибридизација доводи до помјерања њихових енергија од нуле. Стога ће, на почетку истраживања, бити одређена вриједност фазе α која обезбјеђује најизолованије моде на нултој енергији, а даљи прорачуни и анализа спроводиће се за ту вриједност.

5.3 Динамика нултих мода

Облик решетке и примијењени гранични услови имају значајан утицај на број и динамику нултих мода. Избором или редеофинисањем примитивних вектора $\mathbf{s}_i, i = 1, 2, 3$ и вектора решетке $\nu_i, i = 1, 2$ могуће је мијењати граничне услове и тиме утицати на спектар и појаву ивичних стања.

Полазни Хамилтонијан система користимо као основу за извођење дисперзионе релације, помоћу које затим одређујемо спектар својствених вриједности. Анализа тог спектра, за различите почетне услове, омогућава идентификацију појаве ивичних мода. При томе ће бити уочено да се фамилије ивичних мода, насталих као посљедица увођења дисторзије у систем, значајно разликују у случају хексагоналне и ромбичне решетке.

Посебно је занимљива структура нултих мода: њихове компоненте се раздвајају између подрешетки, при чему једна компонента остаје локализована у околини центра вртлога (вртложна компонента), док је друга распоређена дуж саме ивице решетке (ивична компонента).

Да бисмо могли систематски испитати и описати динамику мода, дефинисаћемо пар карактеристичних величина. Прва је норма, која представља укупну снагу моде, тј. збир квадрата амплитуда таласних функција. Поред укупне норме, издвајамо и доприносе по подрешеткама:

$$N = N_A + N_B, \quad N_A = \sum_{\vec{r}} |a_{\vec{r}}|^2, \quad N_B = \sum_{\vec{r}} |b_{\vec{r}}|^2. \quad (5.14)$$

Друга величина је партиципациони број који нам говори о степену локализације мода. Мањи партиципациони број одговара јаче локализованој моди. Аналогно као за норму, рачунамо укупни и појединачни партиципациони број користећи изразе:

$$P = P_A + P_B, \quad P_A = \frac{(\sum_{\vec{r}} |a_{\vec{r}}|^2)^2}{\sum_{\vec{r}} |a_{\vec{r}}|^4}, \quad P_B = \frac{(\sum_{\vec{r}} |b_{\vec{r}}|^2)^2}{\sum_{\vec{r}} |b_{\vec{r}}|^4}. \quad (5.15)$$

Робустност мода процјењујемо помоћу величине вјерности (fidelity) стања која мјери степен преклапања нормализоване моде на нултој енергији, добијене из $\hat{H}_{\text{latt}}$, и нормализоване моде током пропагације:

$$F(z) = \sum_{\vec{r}} |\langle \psi_{\vec{r}}(z) | \psi_{\vec{r}}^{\text{ZM}} \rangle| \quad (5.16)$$

Као и у претходним случајевима, вјерност ћемо разматрати и на нивоу сваке подрешетке посебно:

$$F_{A/B}(z) = \sum_{\vec{r}} |\langle \psi_{\vec{r}}^{A/B}(z) | \psi_{\vec{r}}^{A/B\text{ZM}} \rangle| \quad (5.17)$$

Ове карактеристичне величине представљају поуздан алат за квантитативно испитивање локализације, стабилности и робустности нултих мода. Њиховом примјеном биће могуће анализирати понашање система како у присуству неермитских ефеката, тако и у условима када се у модел укључује нелинеарност.

Глава 6

Квази-једнодимензионалне траке

У претходном поглављу детаљно је размотрен механизам настанка тополошких прелаза у 2Д фотонским решеткама. Показано је да геометријска дисторзија у систему може да изазове промјене у енергетском спектру, што доводи до појаве ивичних мода робусних на различите врсте поремећаја. Тај приступ наглашава значај геометрије решетке за контролу тополошких својстава 2Д фотонских система.

Квази-1Д структуре – траке (ribbons) – представљају посебну класу система од великог значаја као интермедијарни модел између бесконачне 2Д решетке и реалних, коначних геометрија. Док 2Д решетка омогућава дефинисање тополошких инваријанти у Брилуеновој зони, траке су бесконачне у једном правцу, а коначне у другом. Та геометрија омогућава истовремено испитивање и спектра балка и ивичних стања. На тај начин, кореспонденција балк–ивица може директно да се проучава, јер се ивичне моде јасно издвајају у енергетском спектру као стања која повезују дозвољене зоне. Поред тога, овај модел је ближи реалним фотонским структурама реализованим у експерименту, гдје су таласоводи уређени у траке или низове са различитим граничним условима (цик-цак, армчер). То омогућава систематско испитивање утицаја геометрије и ивица на појаву тополошких мода.

За разлику од дводимензионалних решетки, код једнодимензионалних трака тополошка својства се најчешће јављају након увођења синтетичког флуksа. Посебно интересантан случај настаје када је вриједност флуksа једнака π . У том режиму у енергетском спектру јављају се равне зоне [110, 111, 112, 113], у којима све својствене вриједности имају исту енергију. Ове равне зоне су директна последица Ахаронов–Бомовог ефекта, квантно–механичког феномена који показује да честице могу „осјетити“ магнетни ток чак и у подручјима гдје је локално магнетно поље једнако нули, и то искључиво кроз фазу својих таласних функција.

У контексту фотонских трака, то значи да интерференција свјетлости вођене кроз различите путање унутар јединичне ћелије може довести до потпуне деструктивне интерференције при одређеним вриједностима флуksа. Као резултат јављају се компактне локализоване моде које су истовремено и тополошки заштићене. Управо та јединствена комбинација компактности и тополошке робусности издваја ове системе као веома привлачне како за фундаментална истраживања,

тако и за потенцијалне примјене.

Једна од кључних разлика између 1Д трака и 2Д решетке огледа се у природи ивичних мода. Док у 2Д системима постоје дисперзивни ивични канали који омогућавају транспорт енергије дуж границе решетке, у квази-једнодимензионалним тракама нулте моде често су у потпуности локализоване на ивицама, и као такве се простиру дуж решетке. У одговарајућим условима, када долази до формирања равних зона у систему, оне могу бити ограничене и на мали број чворова, без „репова“ у околним ћелијама, што их чини додатно робусним и једноставним за манипулацију. Ово својство отвара могућности за примјене у фотонским уређајима који захтијевају локализацију свјетлости, попут микрорезонатора, филтера или компактних меморијских елемената. Важно је нагласити да равне зоне могу постојати и у тополошки тривијалним системима, али када су нулте моде повезане са дефектима или синтетичким π -флуksom, оне добијају тополошку заштиту која их чини робусним на пертурбације.

6.1 Модели и методе

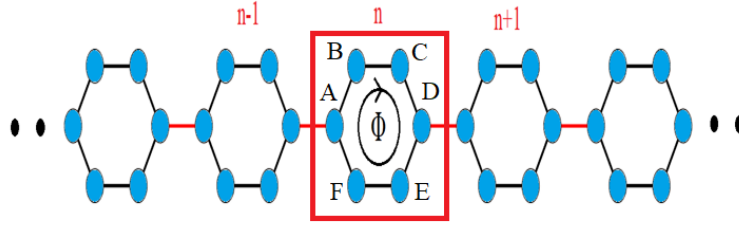
У овом дијелу дисертације биће испитана четири модела квази-1Д графенских и дијамантских трака. Овај избор трака није случајан. Траке налик графену (са хексагоналном геометријом и различитим граничним условима) представљају природно полазиште за проучавање тополошких својстава јер репродукују основне карактеристике графена — појаву Диракових тачака, бипартитност решетке и могућност контроле енергетских процепца. Уместо сложеног бесконачног 2Д система, траке омогућавају једноставнији модел у којем се механизми као што су кореспонденција булк-ивица или формирање нултих мода могу директно пратити у енергетском спектру. Овакви системи су уједно експериментално оствариви у фотонским таласоводним решеткама и ближе су реалним геометријама у којима се испитују тополошки феномени. С друге стране, дијамантске траке са својим геометријама представљају мост ка другим класа тополошких структура, јер деле особине и хексагоналних и квадратних решетке. Њихова поједностављена структура (са мањим бројем чворова у јединичној ћелији) и различите симетрије омогућавају испитивање како нарушавање симетрија и синтетички флуks утичу на тополошке фазе. Ови модели су посебно погодни за тестирање робусности компактона, равних зона и локализованих ивичних стања, као и за повезивање добијених резултата са познатим 2Д системима, попут графена и квадратне решетке.

Прво ће бити представљени сви модели, њихове шематске структуре и одговарајући Хамилтонијани који описују сваку траку. Биће објашњен механизам настанка тополошких прелаза и формирања ивичних мода, а затим ће бити наведене величине које користимо за потврду постојања тополошке заштите ивичних стања.

Први модел који је анализиран јесу квази-једнодимензионалне траке налик графену, сачињене од таласовода са армчер границама. Јединична ћелија садржи шест таласовода са једнаким јачинама спрежања, као што је приказано на Слици 6.1. Свака јединична ћелија третирана је синтетичким флуksом јачине Φ . У одсуству флуksа трака посједује бипартитну и огледалску симетрију у односу

на хоризонталну осу.

Увођење синтетичког флуksа нарушава наведене симетрије и мијења енергетски спектар система. Како се вриједност флуksа Φ повећава, долази до затварања и поновног отварања енергетских процјепа — што може указивати на постојање ополошког фазног пријелаза. Ови пријелази праћени су појавом ивичних мода унутар процјепа, који остају робусни на локалне поремећаје у геометрији или спрезању. Тако синтетички флуks дјелује као контролни параметар који омогућава прецизно подешавање тополошких својстава траке и експерименталну реализацију различитих фаза.



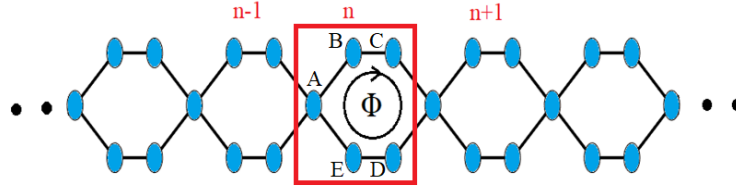
Слика 6.1: Шематски приказ траке налик графену гдје је јединична ћелија уоквирена црвеним квадратом.

Додавање синтетичког флуksа доводи до нарушења огледалске симетрије уводењем комплексних константи у јачину спрезања између таласовода:

$$\hat{H} = V \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} & 0 & e^{-ik_x} & 0 & e^{i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ e^{ik_x} & 0 & e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

гдје је V јачина спрезања између таласовода а $\phi = \Phi/6$ параметар флуksа који се додаје на сваку везу док је Φ укупна јачина синтетичког флуksа којом је третирана једна јединична ћелија. Блохов Хамилтонијан посједује и хиралну симетрију. Оператор хиралности се може представити у облику: $\hat{G} = (\hat{B} + \hat{D} + \hat{F}) - (\hat{A} + \hat{C} + \hat{E})$ ($\hat{A} = \sum_n |A_n\rangle \langle A_n|$ је пројектор подрешетке који дјелује на таласоводе A , $\hat{B}$ на таласоводе B , итд.)

Други модел који је анализиран такође у својој градивној основи садржи хексагоне, али за разлику од претходног нема растојања између јединичних ћелија — оне дијеле један заједнички таласовод како би формирале хексагон. Јединична ћелија се састоји од пет таласовода, а свака ћелија је третирана синтетичким флуksом, као што је приказано на Слици 6.2.



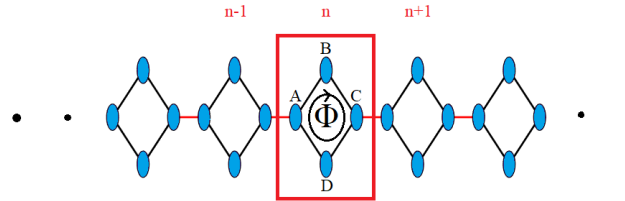
Слика 6.2: Шематски приказ траке налик графену гдје је јединична ћелија уоквирена црвеним квадратом и реализоване су модификоване армчер границе.

Због непарног броја таласовода у јединичној ћелији, ове траке не посједују бипартитну симетрију; уместо тога, у систему је присутна огледалска симетрија. Хамилтонијан који описује овај систем гласи:

$$\hat{H} = V \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} & e^{i\phi} & e^{-i\phi} & e^{i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi}e^{-ik_x} & 0 & 0 \\ e^{-i\phi} & e^{i\phi}e^{ik_x} & 0 & 0 & 0 \\ e^{i\phi} & 0 & 0 & 0 & e^{-i\phi}e^{ik_x} \\ e^{-i\phi} & 0 & 0 & e^{i\phi}e^{-ik_x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Претходна два модела могу се окарактерисати као графену сличне траке, с обзиром на присуство хексагоналних образаца у њиховој структури. У наставку су представљена још два модела, чија градивна основа има структуру налик дијаманту.

Трећи испитивани модел подсећа на први својом структуром, али се разликује обликом јединичне ћелије и граничним условима. У овом моделу јединична ћелија садржи четири таласовода, при чему су ћелије међусобно раздвојене, а интеракције између свих таласовода имају једнаку јачину (Слика 6.3).



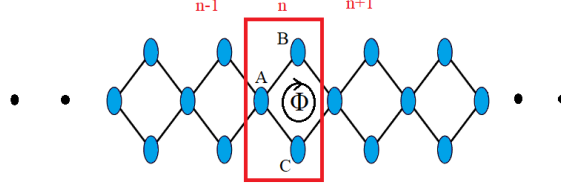
Слика 6.3: Шематски приказ траке са градивним елементима налик дијаманту са модификованим цик-цак границама.

Ефективни Хамилтонијан има облик:

$$\hat{H} = V \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} & e^{-ik_x} & e^{i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi} & 0 \\ e^{ik_x} & e^{i\phi} & 0 & e^{-i\phi} \\ e^{-i\phi} & 0 & e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

гдје је сада $\phi = \Phi/4$. Посматрањем симетрија система уочава се присуство огледалске симетрије.

Посљедњи модел, по аналогији са тракама сличним графену, креиран је без остављања растојања између јединичних ћелија — оне дијеле један заједнички таласовод. Јединична ћелија сачињена је од три таласовода (Слика 6.4).



Слика 6.4: Шематски приказ траке изграђене од елемената налик дијаманту гдје је јединична ћелија уоквирена црвеним квадратом.

Трака има цик-цак границе. Геометрија ове дијамантске траке је бипартитна, јер се чворови могу подијелити у двије подрешетке тако да везе постоје само између њих. Међутим, увођењем синтетичког флуksа Хамилтонијан више не задржава хиралну симетрију, па се каже да систем нема бипартитну симетрију на нивоу енергетског спектра, иако сама решетка остаје бипартитна.

$$\hat{H} = V \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\phi} + e^{i\phi}e^{-ik_x} & e^{i\phi} + e^{-i\phi}e^{-ik_x} \\ e^{i\phi} + e^{-i\phi}e^{ik_x} & 0 & 0 \\ e^{-i\phi} + e^{i\phi}e^{ik_x} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

У наставку је изложен поступак испитивања карактеристика трака, који обухвата анализу енергетског спектра и карактеризацију њихових тополошких својстава. Рјешавањем својственог проблема линеарног Хамилтонијана добија се енергетски спектар система. Увођење синтетичког флуksа доводи до промјена у спектру и до појаве ивичних мода. Ове промјене представљају индикацију тополошких прелаза, што се додатно потврђује рачунањем величина које карактеришу тополошка својства балка (енергетских зона), као што су Зак фаза (тополошка инваријанта) и средња вриједност помјераја центра таласног пакета који се простире кроз решетку.

За посебну вриједност флуksа $\Phi = \pi$ јављају се потпуно равне зоне са ивичним модама унутар процјепца, као и локализоване структуре познате као компактони. Додатно, побуђивањем различитих чворова у ћелијама испитују се динамичке локализоване структуре (тзв. „дишуће структуре“) које се могу јавити у таквим условима.

6.2 Синтетички флуks калибрационог поља

Док је у случају хексагоналне и ромбичне решетке, описаних у претходном поглављу, механизам за индукцију тополошког прелаза било увођење дисторзије у систем, код квази-једнодимензионалних трака ту улогу преузима третирање јединичних ћелија синтетичким флуksом различите јачине, чиме се омогућава укључивање тополошке заштите у систем.

Ефективни синтетички флукс калибрационог поља у фотонским решеткама представља аналогују магнетном флуксу у електронским системима. У систему описаном моделом чврстих веза он се уноси као комплексна фаза у константе спрезања између таласовода или резонатора, чиме се реализује фотонска верзија Пејерове супституције. На тај начин се у фотонским системима симулира понашање наелектрисаних честица у спољашњем магнетном пољу, иако фотони сами по себи не осјећају Лоренцову силу. Посљедица увођења синтетичког флукса је отварање енергетских процјепа у спектру и појава тополошки заштићених мода, аналогних онима у квантном Холовом ефекту. У литератури је приказано више начина имплементације овог ефекта: у раду Хафезија и сарадника синтетички флукс је реализован у систему фотонских резонатора увођењем контролисаних комплексних константи спрезања, док је у експериментима Рехтсмана и сарадника исти ефекат постигнут коришћењем спиралних таласовода, гдје се геометријом таласовода уноси ефективна фазна еволуција која имитира магнетно поље.

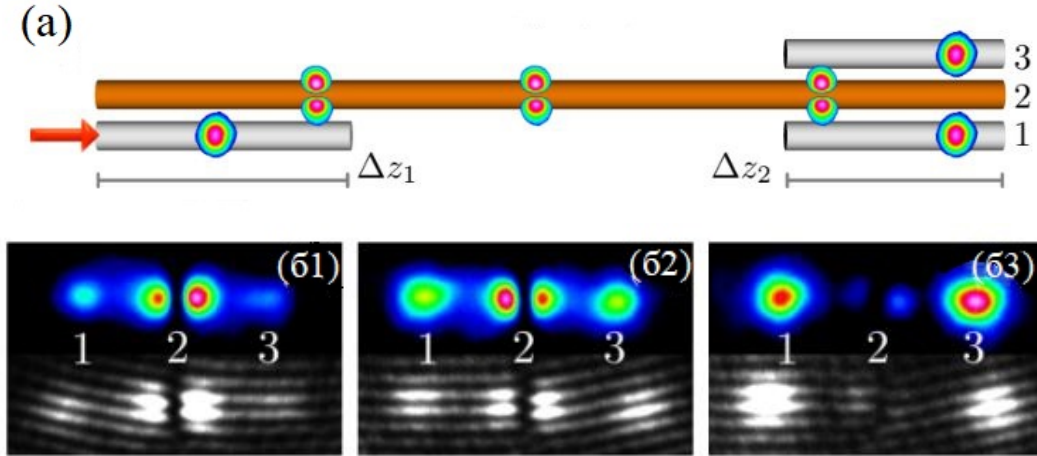
Вићенцио и сарадници су у свом раду експериментално показали да је могуће добити еквивалент међуорбиталног спрезања у фотонским решеткама што директно омогућава контролисано увођење синтетичког флукса. Уобичајено, таласоводи који подржавају различита енергетска стања - моде (на примјер, једномодни S -таласоводи и вишемодни P -таласоводи) не би требало да интерагују, јер су добијене моде ортогоналне, тј. моде са различитим пропагационим константама. Међутим, модификацијом индекса преламања током директног ласерског уписивања, аутори су реализовали таласоводе различитих карактеристика — S -таласоводе који подржавају само основно стање и P -таласоводе који подржавају више стања. Овај дизајн омогућио је контролисано преклапање мода различитих енергија и појаву ефикасног међуорбиталног спрезања. Као резултат, иначе ортогонална S и P стања постају кохерентно повезана, што доводи до фазних разлика и ефективних негативних константи спрезања у систему. На интерферограмима добијеним у експерименту (Слика 6.5), ова појава се манифестује као појава π -фазне разлике између новонасталих S стања, што представља јасан доказ да интеракција између различитих типова таласовода има ефективно различит знак. Управо ова контрола фазе и знака спрезања омогућава имплементацију синтетичког флукса и тиме контролисано подешавање тополошких својстава фотонских трака.

На Слици 6.5а) приказана је експериментална поставка за демонстрацију фазне разлике настале међуорбиталним спрезањем. Конфигурација се састоји од SP (димер) и SPS (тример) распореда таласовода. Хелијум-неонски ласерски сноп усмјерен је на улаз S -таласовода (сиви таласовод на Слици 6.5а)). Сноп се пропагира кроз S -таласовод и на дужини $\Delta z_1 = 14, \text{ mm}$ долази до спрезања са P -таласоводом (наранџасти таласовод), у којем се ексцитује P -стање. Оно затим независно пропагира кроз P -таласовод до дијела структуре гдје је формиран тример и ту служи као улазна ексцитација S -стања у сусједним таласоводима, са којима долази до међуорбиталног спрезања.

Фаза коју носи P -стање одређује појаву π -фазне разлике између новонасталих S -стања, што се уочава на интерферограмима (Слике 6.5б1–б3) за различите позиције Δz_2 . Ово представља директан доказ да ефективна константа спрезања

са једномодним таласоводима може имати различит знак, што јасно указује на постојање негативног спрезања у систему.

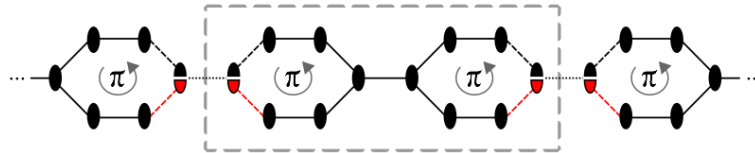
Овај феномен омогућава контролисано увођење ефективног синтетичког флуksа у фотонске траке: варирањем знакова и величина спрезања између таласовода могуће је реализовати фазне еволуције аналогне магнетном флуksу у електронским системима, што је кључно за настанак и управљање тополошким стањима.



Слика 6.5: а) Шема поставке са SP и SPS конфигурацијама, коришћене за демонстрацију настајања фазне разлике. (61–63) Приказ профила интензитета и фазе снимљених на различитим позицијама $\Delta z_2 = 2, 4, 6 \text{ mm}$.

6.3 Експериментална поставка

Експериментално је реализован први описани модел квази-једнодимензионалних трака налик графену. У теоријском опису јединична ћелија садржи шест таласовода, али ради експерименталне имплементације синтетичког флуksа она је проширена. Експериментални модел је приказан на Слици 6.6.



Слика 6.6: Шематски приказ експерименталног модела траке налик графену третиране синтетичким флуksом јачине π . Јединична ћелија (сиви правоугаоник) проширена је и састоји се од дванаест таласовода.

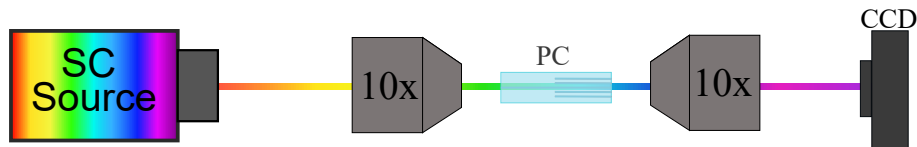
Када су све јачине спрезања између таласовода једнаке, а константа пропагације (фаза коју фотон акумулира у сваком таласоводу) једнака нули, енергетски спектар садржи шест двоструко дегенерисаних зона. Дегенерација настаје услед симетрије: плакета (хексагон) лијево у јединичној ћелији идентична је десној,

али огледалски пресликаној. Ова симетрија омогућава редукцију система на половину без губитка информације о својственим вриједностима.

Траке су израђене техником директног ласерског уписивања: фемтосекундним ласером на таласној дужини 1030 nm, у боросиликатно стакло. Узорак се помјера дуж z -осе да би се уписао таласовод одређене дужине, а дуж x -у равни ради постизања жељене геометрије траке. Имплементација синтетичког флуksа обезбијеђена је замјеном појединих S -таласовода на спојевима јединичних ћелија са таласоводима P -типа, како је описано у претходном поглављу. Оптимизација интеракције између таласовода постигнута је подешавањем радне таласне дужине ласера.

Побуђивање фотонске решетке изведено је усмјеравањем поларизованог гаусовског ласерског снопа на улаз траке, а CCD камера бележи излазни профил интензитета. Ограничење ове технике је могућност побуде само једног таласовода на одређеној таласној дужини.

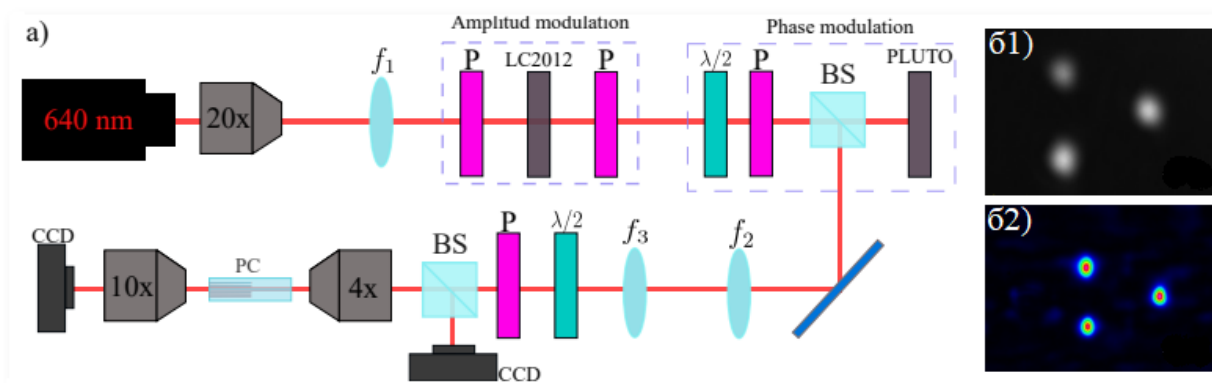
Јачине спрезања зависе од геометрије и растојања између таласовода, али и од таласне дужине побуде. Са растом таласне дужине шири се профил мода, што омогућава контролу спрезања избором таласне дужине — основа суперконтинуалне шеме.



Слика 6.7: Шематска поставка за суперконтинуалну карактеризацију: суперконтинуални ласерски извор, два 10× микроскопска објектива са фотонским чипом између, и анализатор излазног снопа.

Да би се ексцитовале компактне ивичне моде, амплитуда и фаза упадне свјетлости морају бити прецизно дефинисане. Поставка за ове услове приказана је на Слици 6.8(а).

Улазни ласерски сноп (640 nm) проширује се и умјерава помоћу 20× микроскопског објектива и сочива жичне даљине $f = 125$ mm. Амплитудни профил подешава се просторно-оптичким модулятором *Holoeye LC2012*, а фазна структура додаје рефлексионим модулятором *Holoeye PLUTO*. Након модулације, сноп се усмјерава на улаз фотонског чипа телескопом и 4× микроскопским објективом. На Слици 6.8(б1) приказан је улазни услов са дефинисаном амплитудом и фазом, а на Слици 6.8(б2) излазни профил након проласка кроз решетку дужине 70 mm.



Слика 6.8: а) Шема експерименталне поставке са два просторно–оптичка модулятора (SLM) за генерисање произвољних улазних услова. б1) Амплитудна и фазна модулација улазног снопа. б2) Снимљени излазни профил након пропагације кроз фотонску решетку.

Глава 7

Резултати и дискусија

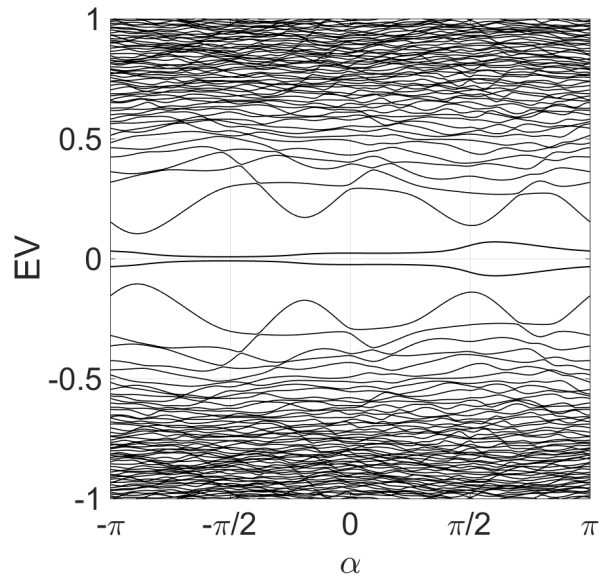
Централни дио ове дисертације чине резултати добијени нумеричким испитивањем и експерименталном реализацијом модела фотонских решетки, који су детаљно теоријски описани у претходним поглављима. Сви нумерички прорачуни изведени су коришћењем кодова написаних у програмском језику *MATLAB*. Након представљања добијених резултата, слиједи детаљна и систематска дискусија у којој се анализирају и упоређују ефекти геометрије решетки, као и других релевантних параметара, на понашање и карактеристике идентификованих мода. На крају поглавља биће истакнуте могуће примјене ових модела, са освртом на њихов потенцијал за развој фотонских и тополошких система, као и перспективе за будућа истраживања у овој области.

7.1 2Д системи са дисторзијом

Прво ће бити представљени резултати истраживања добијени за хексагоналну решетку а потом и за ромбичну. Редом су испитивани спектри у присуству дисторзије, затим ивичне моде настале као посљедица тополошког прелаза, динамика мода у присуству нелинеарности, услови потребни за остваривање ласерског режима у активним медијумима и на крају утицај нелинеарности на тај режим рада.

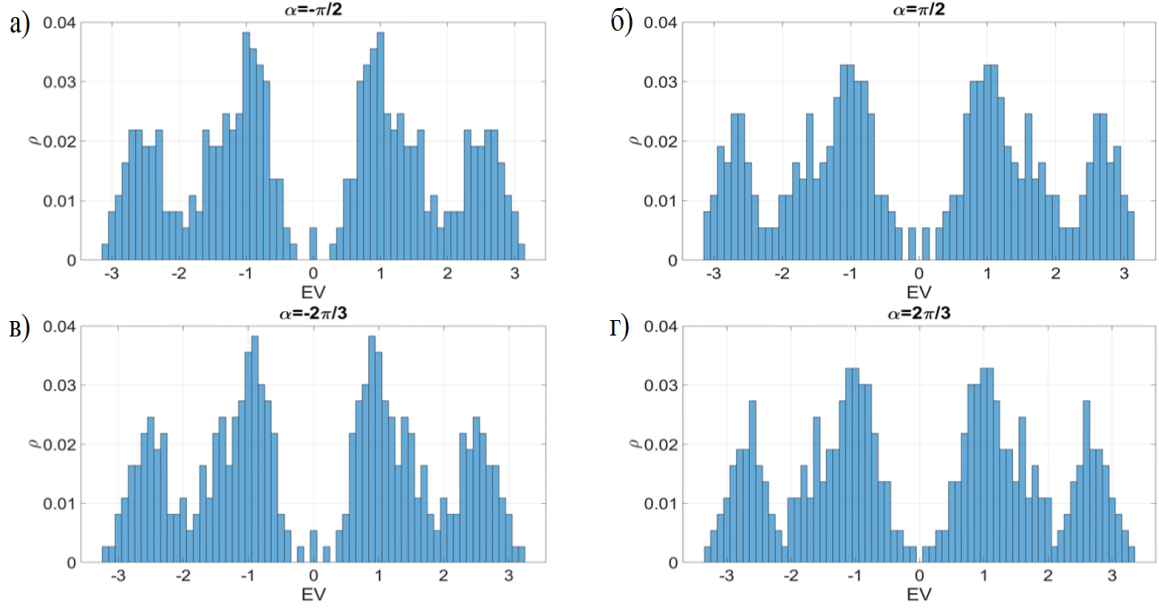
7.1.1 Хексагонална решетка

У случају 2Д решетки показано је да се тополошки прелаз може индуковати увођењем дисторзије у систем. Кључни параметар који карактерише настали вртложни дефект јесте његова фаза α , дефинисана у изразу 5.13, која може попримити било коју вриједност из интервала $[-\pi, \pi]$. Због тога је најпре испитан утицај фазе вртлога на енергетски спектар, са посебним нагласком на идентификовање оних вриједности фазе за које су ивичне моде на нултој енергији најизолованије од остатка спектра. Ово изоловање нултих мода указује на њихову повећану робусност на локалне пертурбације и стабилност у односу на спољашње сметње, што је од суштинског значаја за њихову потенцијалну употребу у фотонским и тополошким уређајима.



Слика 7.1: Својствене вриједности у зависности од фазе вртлога у хексагоналној решетки.

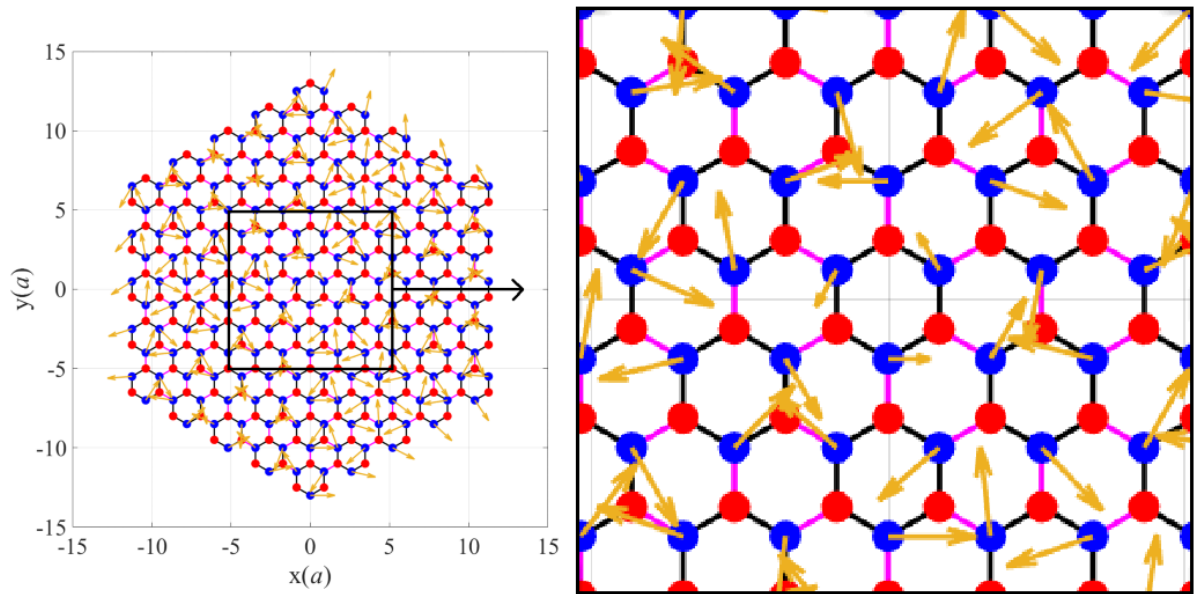
На Слици 7.1 приказане су својствене вриједности добијене за различите фазе вртлога. У региону малих енергија, поред ивичних мода насталих као посљедица тополошког прелаза, могу се појавити и локализоване ивичне моде формиране из балк спектра. Када се такве моде довољно приближе нултој енергији, долази до њихове хибридизације са нултим модама, што резултује помјерањем енергије ових нултих мода даље од нуле. Овај ефекат је најизраженији за фазу $\alpha \approx \pi/2$, док је најслабији за $\alpha \approx -\pi/2$, што указује на снажну зависност стабилности нултих мода од фазе вртлога.



Слика 7.2: Густина расподеле својстених вриједности ρ у зависности од фазе вртлога.

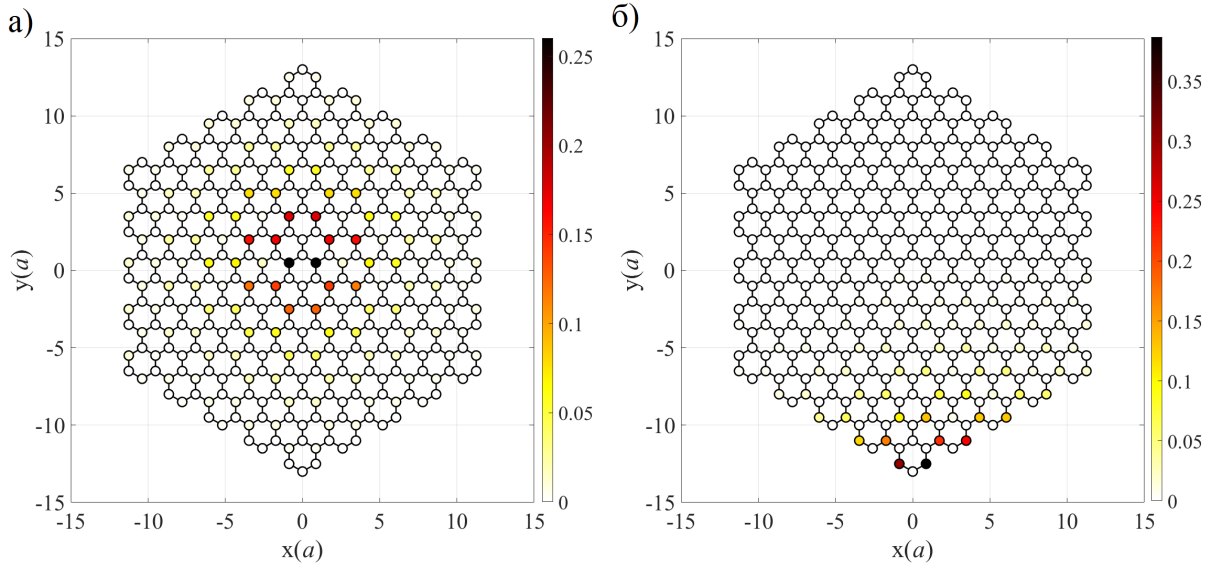
Ради јасније илустрације, издвојили смо неколико карактеристичних вриједности фазе и приказали густину расподеле својствених стања ρ у зависности од фазе вртлога, Слика 7.2. Другим ријечима, приказано је како се својствене вриједности распоређују по енергијама. Уочава се да су за $\alpha = -\pi/2$ моде на нултој енергији најизолованије од остатка спектра. За одређене вриједности фазе не долази до појаве нултих мода, па ћемо стога фазу $\alpha = -\pi/2$ користити у даљој анализи при додавању дисторзије у обје решетке.

Први корак у генерисању ивичних мода јесте додавање дисторзије у једну од подрешетки — у нашем случају, подрешетку B — док друга подрешетка остаје недисторзована и служи као носилац моде. На сваки положај таласовода у подрешетки B примјењује се модулација дата изразом 5.12, при фиксираној вриједности фазе. На Слици 7.3 приказана је хексагонална решетка у којој су векторима означени интензитети и правци помјерања таласовода (плави кружићи) у подрешетки B . Ово контролисано помјерање резултира формирањем вртложног дефекта — тополошког дефекта на који ће се везати локализована мода.



Слика 7.3: Хексагонална решетка у армчер конфигурацији са приказаним векторима који означавају интензитет и правац помјерања таласовода. Ово је јасније уочљиво на зумираном дијелу шеме са десне стране.

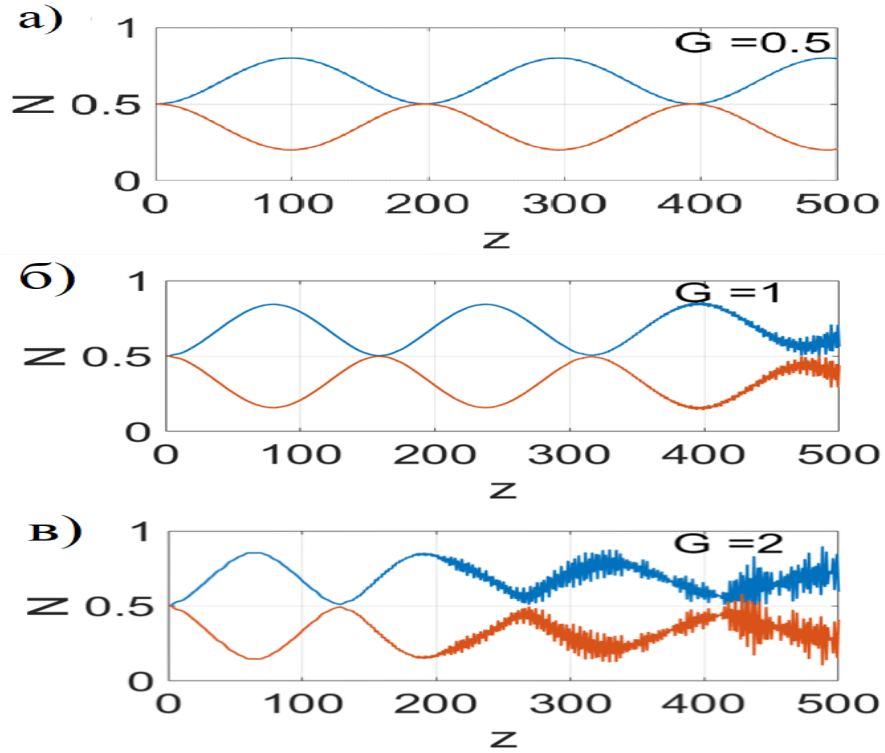
На Слици 7.2 а) може се уочити да се након примјене дисторзије отвара процјеп у спектру, у којем се јавља један пар ивичних мода на нултој енергији – нултих мода. Изглед и просторна расподела интензитета ових нултих мода у хексагоналној решетки приказани су на Слици 7.4. Нулта мода је композитна и састоји се од двије компоненте које су распоређене на обје подрешетке: вртлог компонента у подрешетки A и ивична компонента у подрешетки B . Вртлог компонента из подрешетке A просторно се преклапа са вртлогом створеним додавањем дисторзије у подрешетки B . Уочава се да је интензитет вртлог компоненте највећи у центру и да експоненцијално опада како се удаљавамо од њега.



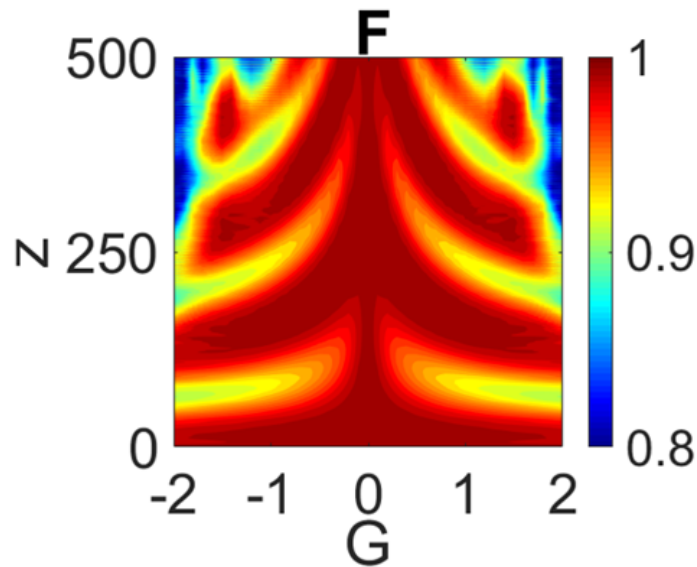
Слика 7.4: Профили расподеле интензитета компоненти нулте моде у хексагоналној решетки са армчер граничним условима.

Утицај нелинеарних ефеката у систему постаје посебно изражен при високим оптичким интензитетима. Због тога смо испитали динамику нултих мода у присуству засићујуће Керове нелинеарности, додајући члан $\hat{H}_{\text{Kerr}}$ (дат изразом 5.3) у укупан Хамилтонијан система $\hat{H}$. Увођење нелинеарности доводи до појаве „дишуће“ структуре мода, при чему се енергија (оптичка снага) периодично пресипа из вртложне компоненте моде у ивичну компоненту и обратно. Овај ефекат је илустрован на Слици 7.5, која приказује еволуцију норми за појединачне подрешетке при различитим вриједностима нелинеарности. Са повећањем јачине нелинеарности, дисипативне нестабилности настају брже, а „дишући“ карактер нултих мода постаје нерегуларнији, услед јачег спрезања са модама насталим у балку.

Овај ефекат може се илустровати приказом верности преклапања (fidelity), која представља степен сличности између иницијалне нулте моде и моде настале током пропагације, за опсег нелинеарности од $[-2, 2]$, Слика 7.6. Могу се издвојити два региона: за релативно мале вриједности нелинеарности, $|G| < 1$, долази до слабог спрезања између компоненти исте нулте моде и веома слабог мијешања између нултих и балк мода, што се огледа у осциловању верности преклапања у опсегу $F = [0.9, 1]$. За веће вриједности $|G| > 1$, нелинеарни ефекти постају доминантни, доводећи до смањења верности преклапања и постепене деструкције нулте моде.



Слика 7.5: Норма N дуж осе пропагације z , за појединчане подрешетке, A (плава) и B (наранџаста), за различите вриједности нелинеарности G .

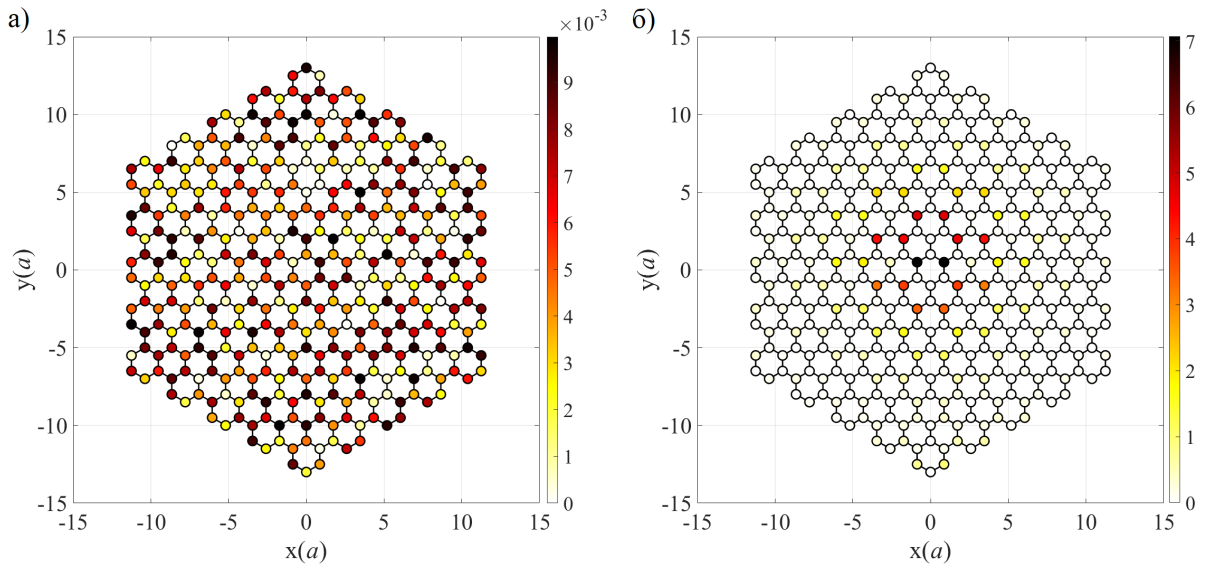


Слика 7.6: Преклапање F између иницијалне моде и моде током пропагације у зависности од нелинеарности G .

Испитаћемо утицај присуства засићујућег појачања и губитака у систему ради провјере могућности успостављања ласерског режима рада компоненти нулте моде. Вриједности параметара појачања и губитака које се користе преузете су

из литературе о активним тополошким решеткама са резонаторима . Нумеричке симулације показују да је додавање појачања само у једну подрешетку ефикасније него истовремено пумпање обје подрешетке. Стога су у наставку приказани резултати добијени пумпањем искључиво подрешетке A .

Као иницијално стање коришћено је оптичко поље слабог интензитета са насумичним расподјелама амплитуда и фаза у обје подрешетке (Слика 7.7а). У присуству појачања и губитака, са параметрима $\Gamma_A = 0.1$, $\Gamma_B = 0$, $\gamma_A = 0.01$ и $\gamma_B = 0.1$, на излазу решетки добија се нулта мода приказана на Слици 7.7б. Формирана мода се састоји од вртложне компоненте у подрешетки A , која носи знатно већи интензитет, и ивичне компоненте у подрешетки B , која може бити мање уочљива због доминантних губитака у тој подрешетки.

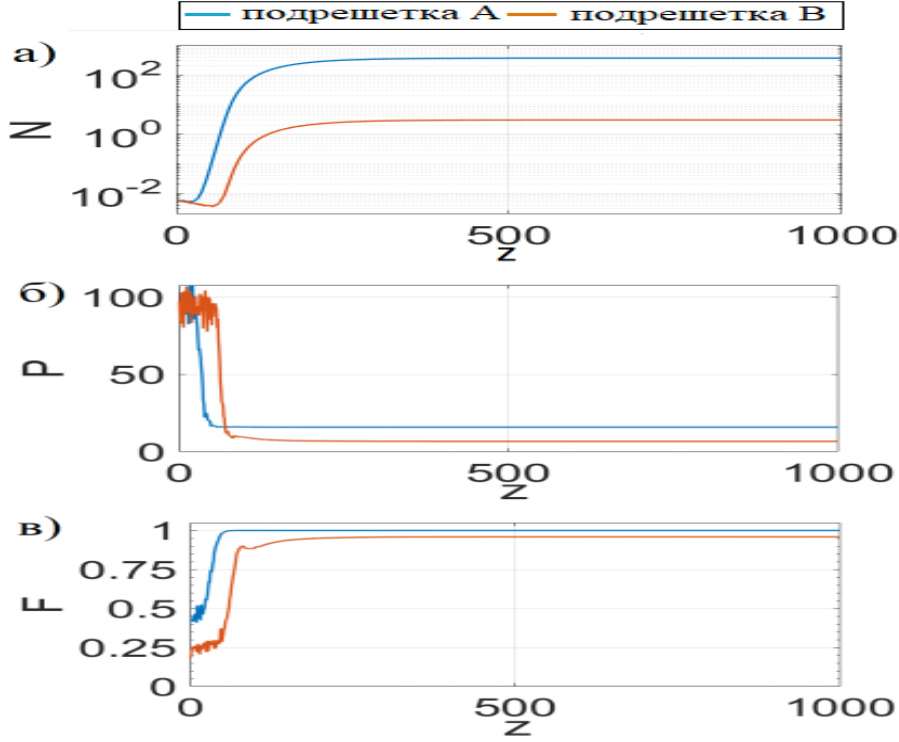


Слика 7.7: а) Иницијално стање слабог интензитета за побуду решетки са насумично распоређеним амплитудама и фаза у обје подрешетке; б) Побуђена нулта мода у режиму ласерског рада.

Режим ласерског рада потврђен је анализом дијагностичких величина које прате динамику мода (норма, партиципациони број, преклапање), Слика 7.8. Норма је приказана у логаритамској скали ради јасније визуелизације појачања у обје подрешетке, при чему је ефекат израженији у подрешетки A . Партиципациони број је у почетку веома висок услед насумичне расподјеле амплитуда и фаза иницијалног стања. Међутим, одмах након формирања нулте моде његова вриједност нагло опада, што указује на локализацију моде на ограниченом броју таласовода. Преклапање остаје приближно константно током пропагације, са вриједношћу близу 1, што потврђује стабилност моде.

Побуђивање ивичне моде у подрешетки B , у којој су присутни губици, подстакло је додатна испитивања кроз варирање параметара појачања и губитака. Утврђено је да се нулта мода може побудити само у систему у којем истовремено постоје и појачање и губици. У случају када систем садржи само појачање, или када се појачање и губици јављају у истој подрешетки, нулта мода се не формира.

Ради повећања ефикасности ласерског режима, анализиран је однос губитака између подрешетки. Преклапање је показало да се висока ефикасност ласерског режима постиже за релативно велике губитке у подрешетки B , односно за $\gamma_B/\gamma_A > 5$.



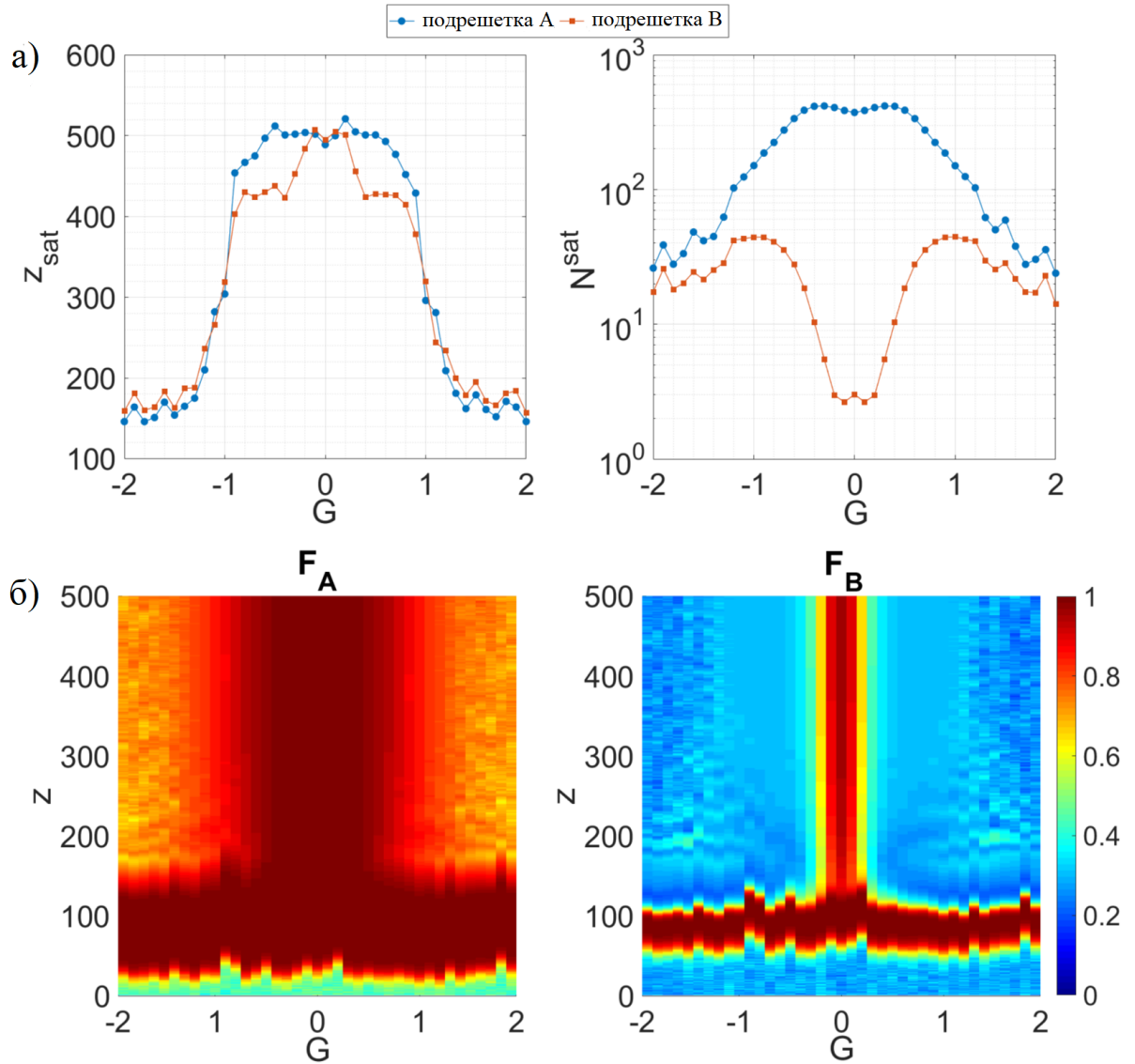
Слика 7.8: Величине које описују динамику нулте моде у ласерском режиму рада, редом: а) норма; б) партиципациони број; в) фиделити.

Одређивање минималне дужине резонатора (дужине пропагације z_{sat}) — при којој норма достиже 99% своје засићујуће вриједности ($N_{A/B} = 0.99 N_{A/B}^{\text{sat}}$) — служи као квантитативна карактеризација тополошке ласерске способности активне решетке.

Након тога је анализиран утицај нелинеарности на ефикасност ласерског режима рада. Из преклапања приказаног на Слици 7.9, могу се издвојити три јасно дефинисана режима:

- $|G| < 0.1$ — робусан ласерски режим рада ивичне моде;
- $0.1 < |G| < 0.9$ — стабилан ласерски режим рада кроз вртложну компоненту ивичне моде;
- $|G| > 0.9$ — делокализација моде и њено ширење преко обје подрешетке.

Ови резултати показују да нелинеарношћу индуковано спрезање између вртложних и ивичних компоненти, као и дестабилизација нулте моде позната из пасивних решетки, настају и у активним системима у ласерском режиму рада.



Слика 7.9: Параметри појачања и губитака за ефикасан ласерски режим: $\Gamma_A/\gamma_A = 10$, $\gamma_B/\gamma_A = 10$, $\Gamma_B = 0$, $\gamma_A = 0.01$. а) z_{sat} и N^{sat} у зависности од јачине нелинеарности; б) фиделити у појединачним решеткама у опсегу нелинеарности $G = [-2, 2]$.

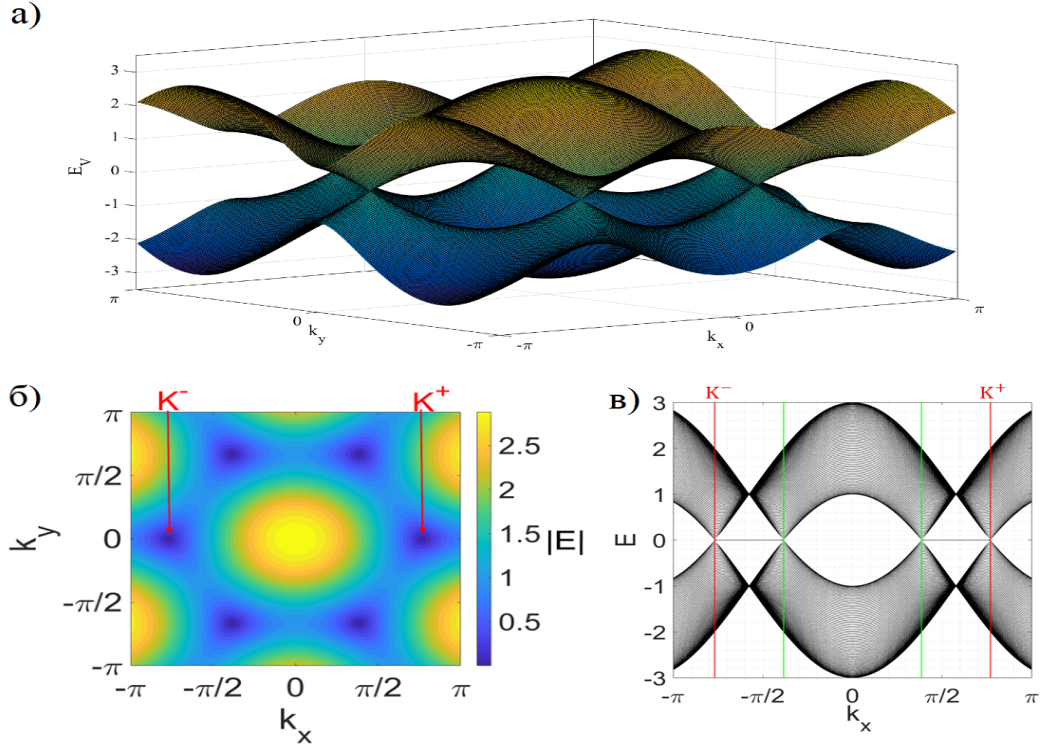
7.1.2 Ромбична решетка

Раније смо у тези нагласили утицај граничних услова на енергетски спектар фотонских решетки, а сада ћемо то и демонстрирати. Прво посматрамо спектар ромбичне решетки са цик-цак граничним условима, у случају без присуства дисторзије. У поређењу са хексагоналном решетком у армчер конфигурацији, овдје се јавља фамилија ивичних мода чак и без присуства дисторзије.

На Слици 7.10(а) приказан је спектар својствених вриједности добијен из Хамилтонијана без присуства дисторзије. Као што је познато, енергетске зоне се додирују у шест Диракових тачака. Двије међу њима, означене са $K_{\pm}$, су

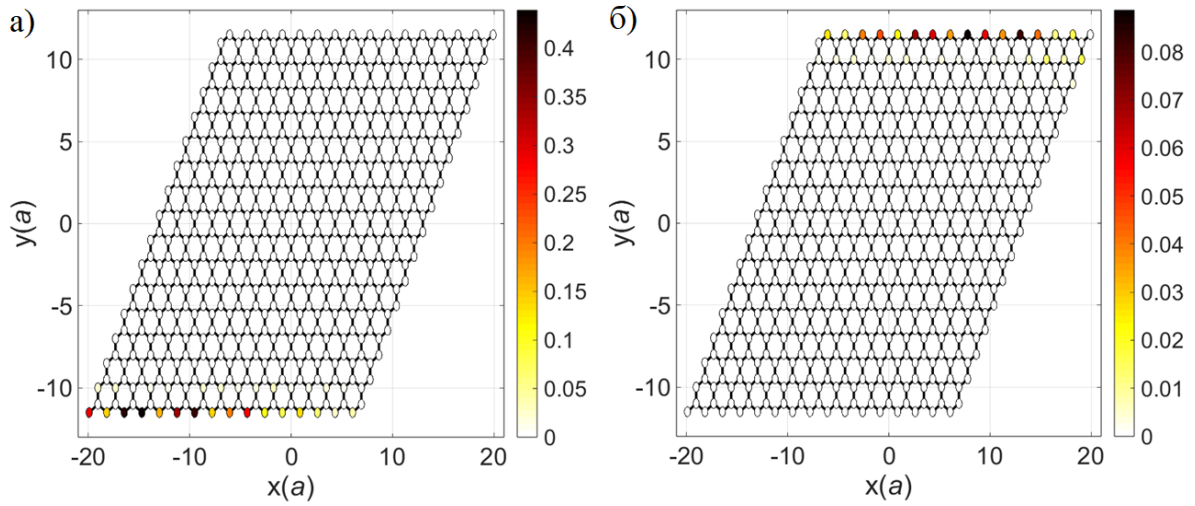
еквивалентне и посебно су истакнуте на Слици 7.10(б). Присуство ивичних мода на нултој енергији уочава се у опсегу $2\pi/(3\sqrt{3}) < |k_x| < 4\pi/(3\sqrt{3})$, као што је приказано на Слици 7.10(в).

Овакав спектар је добијен нумеричком методом суперћелија, уз претпоставку да су моде бесконачно проширене у y -правцу, док је у решеткином простору формирана трака од ивичних хексогона у x -правцу.



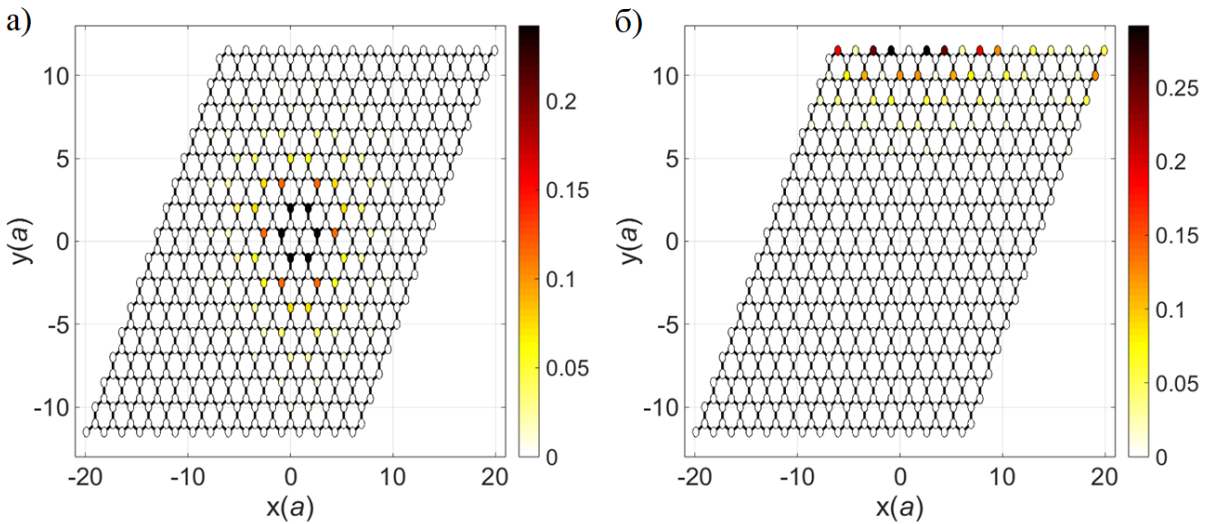
Слика 7.10: а) Спектар својствених вриједности добијен у случају без дисторзије; б) Спектар пројектован у $k_x - k_y$ раван са означеним Дираковим тачкама $K_{\pm}$; в) Спектар добијен нумеричким методом суперћелија који показује присуство ивичних мода.

Нулте моде, креиране без присуства дисторзије, представљају композитне моде чије су компоненте простране дуж ивица система, али на супротним странама подрешетки, као што је приказано на Слици 7.11. Интензитет ових мода експоненцијално опада са удаљавањем од ивица система, што указује на њихову локализовану природу.



Слика 7.11: Профил амплитуда компонената ивичне моде креираних у одсуству дисторзије: а) компонента у подрешетки A и б) компонента у подрешетки B .

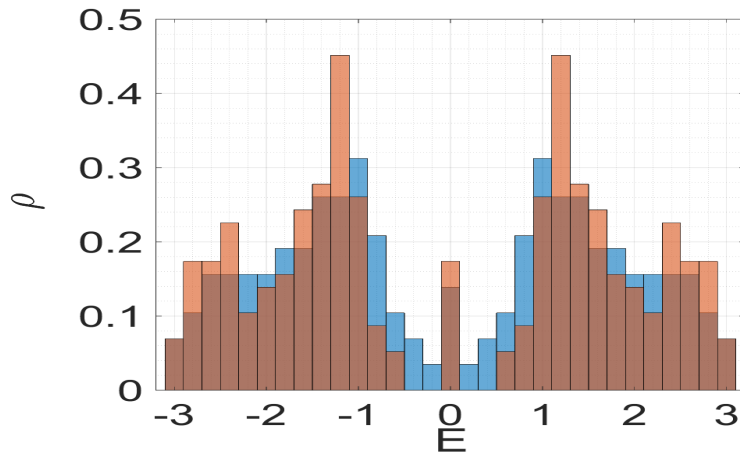
Након увођења дисторзије у ромбичну решетку, примјењене на исти начин као код хексагоналне решетки — помјерањем таласовода у подрешетки B према изразу 5.12 са фиксном фазом $\alpha = -\pi/2$ и истим интензитетом деформације — у енергетском спектру се појављују нулте моде које настају као посљедица тополошког фазног прелаза. И ове моде задржавају композитни карактер: у подрешетки A мода се везује за тополошки дефект и локализује око центра вртлога, док се у подрешетки B јавља одговарајућа ивична компонента, као што је приказано на Слици 7.12.



Слика 7.12: Профил амплитуда нултих мода у присуству дисторзије, приказан засебно за обје подрешетке: а) подрешетка A и б) подрешетка B .

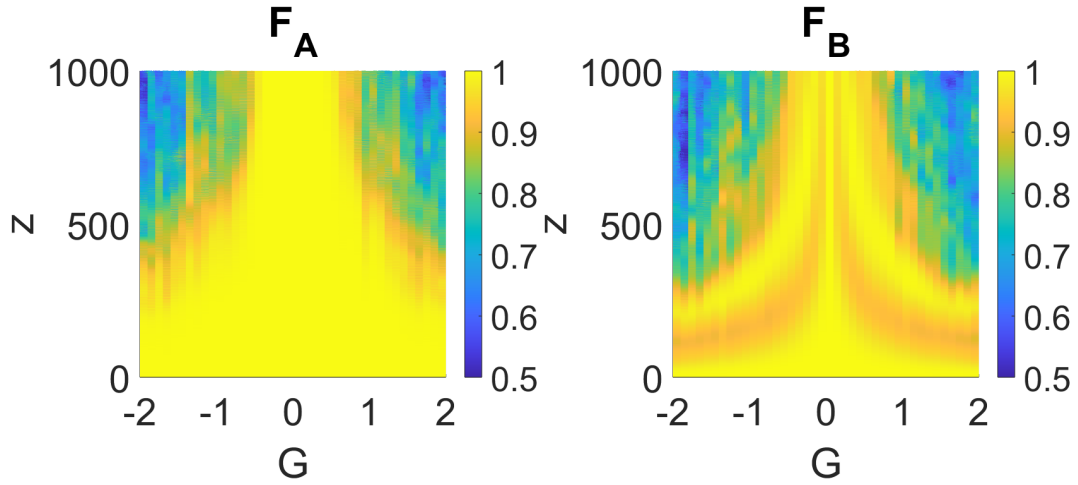
На Слици 7.12 упоређени су спектри добијени у случајевима са и без дисторзије.

је, при чему је приказана густина расподеле својствених вриједности. Уочава се да се у обје фамилије нултих мода јавља више парова мода, али да су у систему са дисторзијом нулте моде знатно изолованије од остатка спектра. У наставку испитујемо њихову стабилност у присуству нелинеарности и неуређености у решетки.



Слика 7.13: Густина расподеле својствених вриједности ρ у случају са (смеђа боја) и без (плава боја) дисторзије.

Посматрањем преклапања као мере сличности пратили смо утицај нелинеарности у објема подрешеткама на динамику нултих мода. За мале вриједности нелинеарности, $|G| < 0.5$, вртложна компонента нулте моде остаје добро очувана, са високом вриједношћу фиделитија током цијеле пропагације. У овом режиму нелинеарност није довољно јака да изазове значајно мијешање унутар енергетских зона, па тополошка заштита остаје доминантан ефекат. У подрешетки B , која подржава ивичну компоненту, при малим нелинеарностима уочава се „дишући“ карактер. За веће вриједности нелинеарности, $|G| > 0.5$, појављује се значајно мијешање мода које доводи до наглог пада фиделитија у објема подрешеткама током пропагације, што указује на деградацију тополошки заштићене локализације.

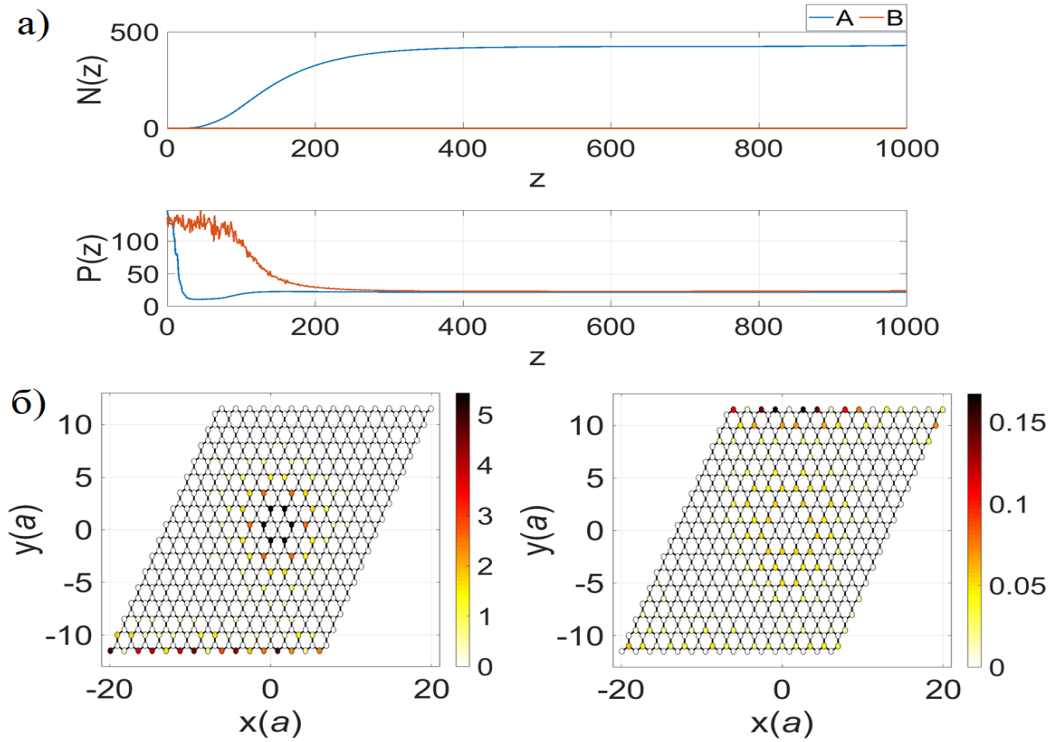


Слика 7.14: Вриједности преклапања у обје подрешетке за јачину нелинеарности у опсегу $G = [-2, 2]$ током пропагације.

Код хексагоналне решетке је претходно утврђен однос параметара појачања и губитака који обезбјеђује најбоље услове за ласерски режим рада кроз нулту моду. Исти сет параметара примјењујемо и на ромбичну решетку, при чему истовремено испитујемо могућност остваривања ласерског режима рада за обје фамилије ивичних мода.

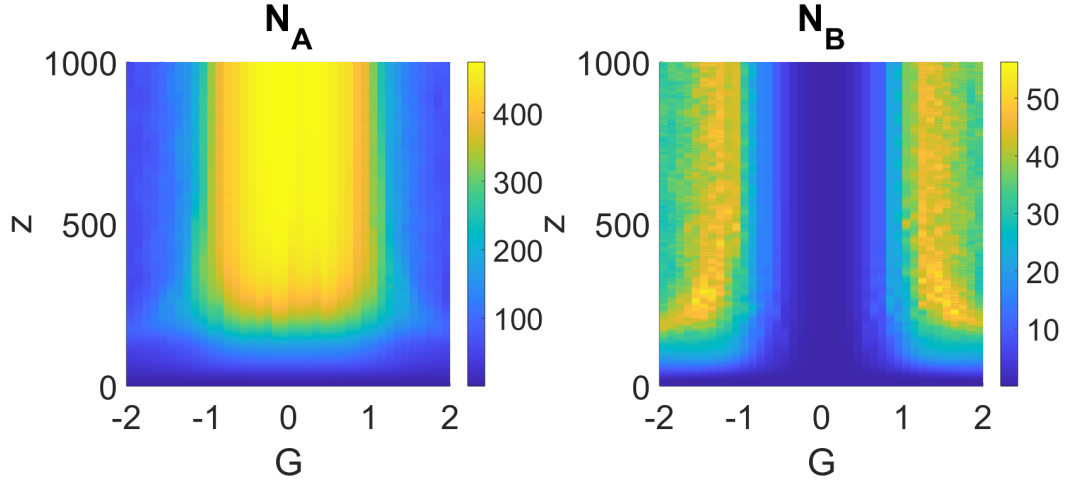
У случају без дисторзије, користећи параметре $\Gamma_A/\gamma_A = 10$, $\gamma_B/\gamma_A = 10$, $\Gamma_B = 0$ и $\gamma_A = 0.01$, постигнут је ласерски режим рада кроз ивичне компоненте, што потврђује раст норме за приближно два реда величине. Међутим, репови ових мода продиру дубоко у решетку, чиме се нарушава ефикасност ласерског режима због смањене локализације, што је додатно потврђено повећаним вриједностима партиципационог броја. Овај ефекат делокализације може се ублажити повећањем броја јединичних ћелија у систему.

Након увођења дисторзије и коришћења иницијалног стања у виду оптичког поља врло слабог интензитета са насумично изабраним амплитудама и фазама (иницијални позадински шум), при истим вриједностима параметара као у претходном случају, постиже се стабилан ласерски режим. На Слици 7.15(б) уочава се да се у подрешетки A ласерски рад одвија кроз вртложну компоненту нулте моде, као и кроз ивичну компоненту из фамилије ивичних мода. Повећање појачања присутно је и у подрешетки B , али је, према профилу амплитуда, оно значајно слабије. Норма и партиципациони број, приказани на Слици 7.15(а), показују да се стабилан ласерски режим успоставља након $z \approx 300$, при чему компоненте кроз које се одвија ласерски рад задржавају високу компактност.



Слика 7.15: а) Норма N и партиципациони број P у ромбичној решетки са дисторзијом. Параметри су $\Gamma_A/\gamma_A = 10$, $\gamma_B/\gamma_A = 10$, $\Gamma_B = 0$, $\gamma_A = 0.01$. Ласерски режим је иницијализован из насумичног позадинског шума. Плаве и црвене криве одговарају компонентама пропадајуће моде у подрешеткама A и B , редом. б) Профили амплитуде у дужини $z = 1000$.

Показано је да присуство Керове нелинеарности изазива нерегуларности у дишућим нултим модама и појачано спрезање са модама које настају у линеарном балку. Утицај нелинеарности на ефикасност ласерског режима рада је испитана уз помоћ норми, приказаних на Слици 7.16. За слабе нелинеарности ($|G| < 1$) уочава се стабилан ласерски режим рада у обје подрешетке, са нормом у опсегу $(0.9 - 1)N_{sat}$, при чему се стационарно стање постиже већ око $z \approx 300$. То значи да је спрезање између вртложне и ивичних нултих мода веома слабо, а мијешање са балк модама занемарљиво. Насупрот томе, за јаче нелинеарности ($|G| > 1$) јављају се израженији ефекти: норма у подрешетки A опада, у B расте, што указује на прерасподјелу интензитета вртложне нулте моде. Овај процес доводи до смањења кохерентног појачања моде у ласерском режиму.



Слика 7.16: Утицај нелинеарности на ласерски режим кроз нулту моду при параметрима $\Gamma_A = 0.1$, $\gamma_B/\gamma_A = 0.01$, илустрован је приказом норми у подрешеткама. Јачина нелинеарности је варирана у интервалу од $G = [-2, 2]$.

7.2 Квази-1Д системи са флуksom

У овом дијелу дисертације представљамо резултате истраживања добијене за квази-једнодимензионалне траке налик графену, а потом и за траке налик дијаманту. Редом су анализирани енергетски спектри у присуству синтетичког флуksа, појава ивичних мода насталих као посљедица тополошког фазног прелаза, као и израчунате тополошке инваријанте које потврђују тополошку заштиту добијених мода. За први модел трака налик графену биће приказана и детаљна експериментална реализација, која пружа директну потврду нумерички добијених резултата.

У наставку слиједи систематско представљање резултата за квази-1Д системе.

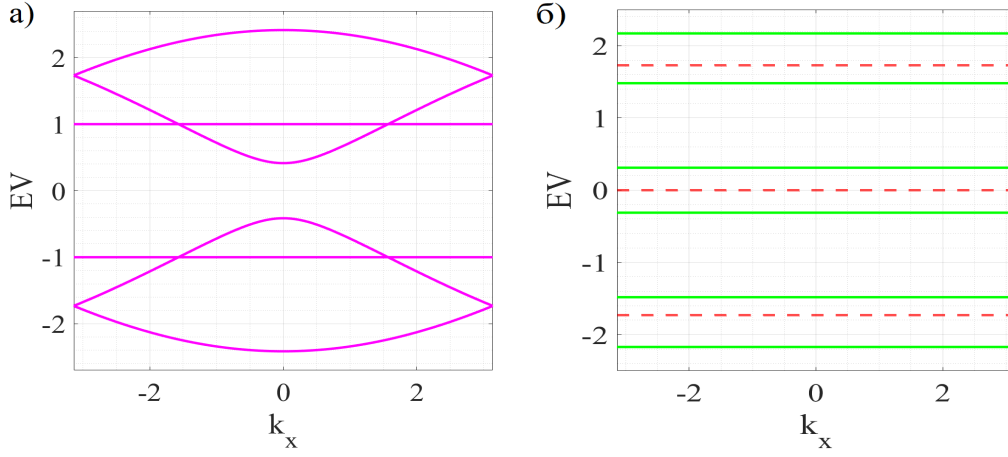
7.2.1 Квази-1Д траке налик графену

Полазимо од траке чија је структура приказана на Слици 6.1, а ефективни Хамилтонијан дат изразом 6.1. Синтетички флуks уводимо кроз комплексне константе спрезања и пратимо његов утицај на спектар својствених вриједности, добијен рјешавањем својственог проблема Хамилтонијана.

У одсуству флуksа, спектар се састоји од шест енергетских зона: двије су равне, а четири дисперзивне, Слика 7.17 а). Пошто нема изолованих зона, тополошка инваријанта није дефинисана. Процјеп око нулте енергије остаје празан, што указује на тополошки тривијалан случај.

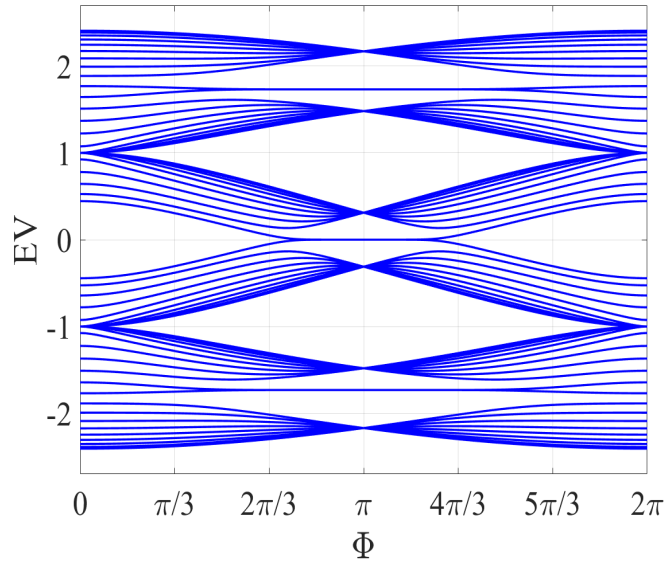
Увођењем флуksа нарушава се огледалска симетрија, али хирална симетрија Хамилтонијана остаје очувана, што је одговорно за симетричан спектар у односу на нулту енергију.

За специфичну вриједност флуksа $\Phi = \pi$, Ахаронов–Бомов ефекат доводи до потпуне деструктивне интерференције и трансформише све дисперзивне зоне у равне. Спектар тада садржи шест равних зона, Слика 7.17 б), а у процјепима између њих јављају се три пара ивичних мода на енергијама $E_V = 0, \pm\sqrt{3}$.



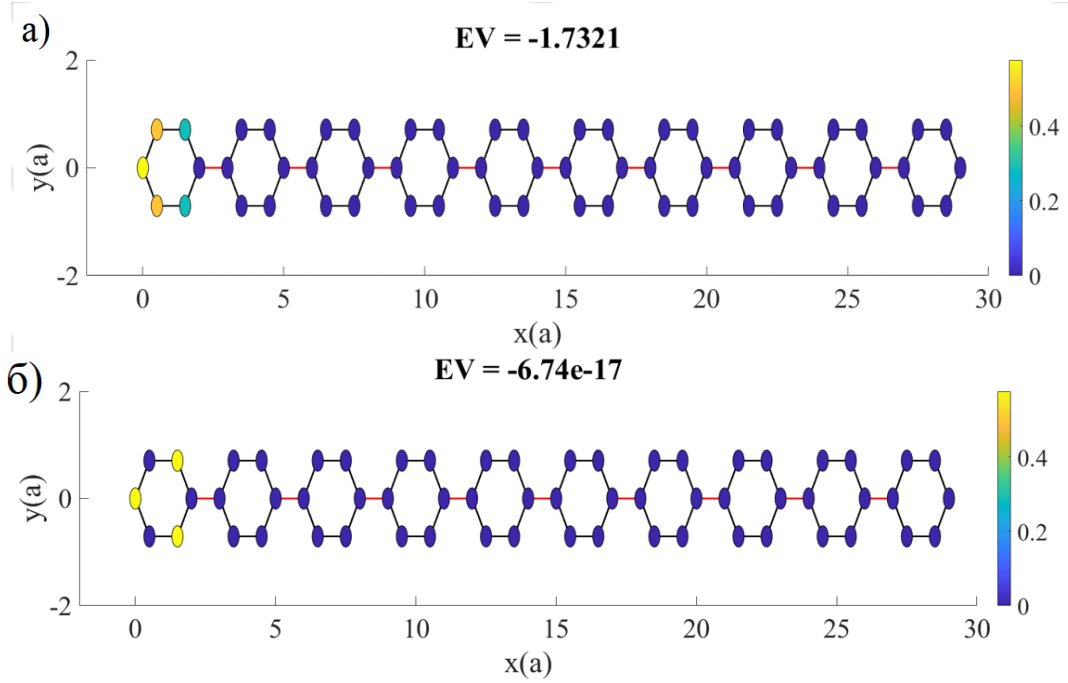
Слика 7.17: Спектар својствених вриједности EV за: а) нулти флуks и б) π флуks. Испрекидане линије црвене боје означавају енергије на којима се појављују дублети ивичних мода.

На Слици 7.18 приказан је спектар својствених вриједности у зависности од јачине флуksа, који варира у опсегу параметра $\Phi \in [0, 2\pi]$. Дублети ивичних мода ($E_V = \pm\sqrt{3}$), који се налазе између спољашњих зона, појављују се када се отворе процјепи око $\Phi \approx \pi/3$. Ови дублети опстају све док се процјепи поново не затворе, при $\Phi \approx 5\pi/3$. Процјеп између зона око нулте енергије почиње да се отвара за $\Phi \approx 2\pi/3$, када се јавља још један пар мода на нултој енергији — такозване нулте моде. Оне нестају из спектра када се процјеп затвори, приближно при $\Phi \approx 4\pi/3$. Из ових резултата закључујемо да синтетички флуks утиче на енергетски спектар изазивајући отварање и затварање процјепа, односно могуће тополошке фазне прелазе.



Слика 7.18: Спектар својствених вриједности у првој Брилуеновој зони у функцији укупног флукса Φ .

Као посљедица деструктивне интерференције, из профила ивичних мода се уочава да таласоводи који повезују јединичне ћелије A и D носе нулту свјетлосну снагу, што у потпуности спречава транспорт стања и појаву дисперзије. На Слици 7.19 приказана је по једна ивична мода из дублета, насталих на енергијама $E_V = 0$ и $E_V = -\sqrt{3}$. Важна је чињеница да је нулта мода савршено компактна: она има једнаке амплитуде које су присутне искључиво у три таласовода ивичне јединичне ћелије. Суперпозиција било којих стања из равних зона не може довести до формирања овако компактних мода.



Слика 7.19: а) Ивична мода локализована на енергији $EV = -\sqrt{3}$; б) Нулта мода локализована на енергији $EV = 0$.

У наставку фокусираћемо се на квантитативну карактеризацију тополошких својстава трака путем Закове фазе — 1Д аналогије Беријеве фазе. Закова фаза представља интегралну мјеру која квантификује геометријске особине Блохових стања унутар енергетске зоне и пружа директан увид у тополошку природу система. Према принципу балк–ивица кореспонденције, цјелобројна вриједност Закове фазе, изражена у јединицама π , кореспондира броју парова ивичних мода који настају унутар енергетског процјепца. Ова веза између балк топологије и ивичних стања омогућава да тополошка инваријанта добијена из зонске структуре предвиди присуство робусних ивичних мода у коначним системима.

За израчунавање Закове фазе примјењена су два комплементарна поступка: (i) метод пројектора, који се заснива на формализму Блохових вектора, и (ii) метод средњег хиралног помјераја МХД (mean chiral displacement, MCD), који је проширење стандардног метода средњег помераја МФД (mean field displacement, MFD) прилагођеног за примјену у системима са хиралном симетријом.

У оквиру метода пројектора, централна величина је пројектор на својствено стање $\hat{P}(k) = |u_n(k)\rangle\langle u_n(k)|$, који омогућава да се тополошка инваријанта директно повеже са геометријом зоне:

$$Z_p = \text{Im} \left(\ln \left(\text{Tr} \left[\prod_{n=1}^L \hat{P}(k_n) \right] \right) \right), \quad (7.1)$$

гдје $k_n = \frac{2\pi n}{L}$ означава дискретне вриједности таласног броја добијене дискретизацијом Брилуенове зоне на L тачака.

Процедура нумеричког израчунавања Z_p почиње рјешавањем својственог проблема Хамилтонијана траке у k -простору, дискретизованом на L тачака са

размаком $2\pi/L$. За сваки дискретни таласни број k_i ($i = 1, \dots, L$, $k \in [-\pi, \pi]$) у првој Брилуеновој зони одређује се скуп од шест својствених вриједности и одговарајућих нормализованих својствених вектора, при чему свака својствена вриједност припада једној енергетској траци.

На основу тог скупа формира се матрица пројектора димензије 6×6 , која представља корелациону матрицу између својствених вектора добијених за све k -вриједности. Закове фазе, израчунате према једначини 7.1 за сваку изоловану енергетску зону, приказане су у Табели 7.1.

Табела 7.1: Вриједности Закове фазе за изоловане енергетске зоне у зависности од великог флукса $\Phi = 2\pi G$.

Φ	Зона 1	Зона 2	Зона 3	Зона 4	Зона 5	Зона 6
0	-0,034	-0,460	0,4945	0,4857	0,3556	-0,841
$\frac{\pi}{5}$	1	-1	0	0	-1	1
$\frac{2\pi}{5}$	-1	1	0	0	1	-1
$\frac{3\pi}{5}$	1	-1	0	0	1	1
$\frac{4\pi}{5}$	1	-1	-1	-1	-1	1
π	1	-1	1	-1	-1	1
$\frac{6\pi}{5}$	-1	-1	-1	1	1	-1
$\frac{7\pi}{5}$	1	-1	0	0	-1	1
$\frac{8\pi}{5}$	-1	1	0	0	1	-1
$\frac{9\pi}{5}$	-1	1	0	0	1	-1
2π	0,467	-0,969	0,501	-0,115	0,729	-0,614

Уколико упоредимо добијене вриједности Закове фазе са спектром својствених вриједности, Слика 7.18, уочавамо да се цјелобројне вриједности Закове фазе изолованих енергетских зона јављају управо у тренутку када се у спектру отварају процјепи. Ова корелација указује на постојање тополошке заштите ивичних мода које се формирају унутар тих процјепи.

Концептуална основа метода МФД и МХД почива на Бери фази, која описује акумулацију глобалне фазе када Блохов својствени вектор прати затворену путању у $\mathbf{k}$ -простору унутар прве Брилуенове зоне. У 1Д периодичним системима, у базису Ваниер (Wannier) функција Бери фаза је директно пропорционална помјерању центра масе базних функција. Као последица, МФД је широко коришћен у 1Д системима са двије зоне за одређивање тополошке инваријанте изолованих зона на основу средњег помјерања центра таласног пакета побуђеног из једног чвора:

$$\text{MFD}(L_z) = \frac{1}{L_z} \int_0^{L_z} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (x_n(z) - x_n(0)) |\psi_n(z)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |\psi_n(z)|^2} dz, \quad (7.2)$$

гдје је L_z дужина пропагације у смјеру z , x_n позиција у траци, а $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]^T$ таласни пакет. Закова фаза се затим добија као

$$Z_p[\pi] = 2\pi \text{MFD}.$$

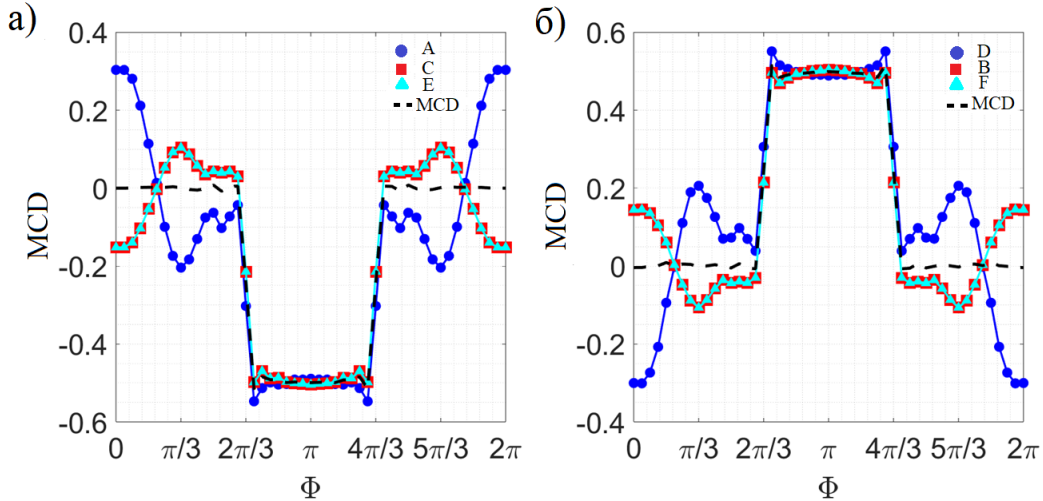
Цјелобројна вриједност Z_p (у јединицама π) директно је повезана са бројем ивичних мода које се формирају у процјепима између изолованих зона,

непосредно након тополошке фазне транзиције, чиме се потврђује булк-ивица кореспонденција.

Иако је МФД метод првобитно развијен за 1Д решетке са двије зоне, може се примијенити и на системе са више енергетских зона, под условом да геометрија и симетрије дозвољавају редукцију на ефективани дво-зонски спектар. У хиралним решеткама са више чворова по јединичној ћелији, МХД се добија тако што се израчунава МФД за различите иницијалне побуде које припадају различитим подрешеткама, а затим се њихов просјек користи за дефинисање Закове фазе.

$$Z_p = \frac{2 \text{MCD}}{\pi}. \quad (7.3)$$

У нашем случају, средња јединична ћелија хиралне траке садржи шест чворова (три са сваке подрешетке). Побуђујемо сваки чвор у средњој јединичној ћелији и узимамо просечну вриједност три МФД мерења да одредимо Закову фазу централних зона, Слика 7.20. Резултујуће вриједности Закове фазе се поклапају са онима у Табели 7.1.



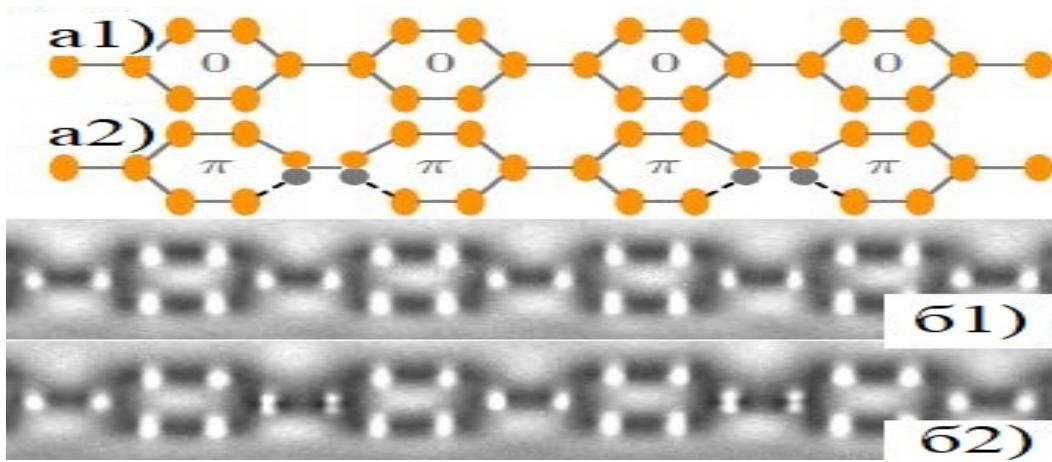
Слика 7.20: МХД (црна испрекидана линија) за различите вриједности параметра флукса добијен усредњавањем МФД вриједности за таласоводе: а) A, C, E ; б) B, D, F .

Након добијања изузетно добрих резултата нумеричким симулацијама, указала се потреба и прилика да се они експериментално потврде. Детаљи експерименталне поставке и процеса фабрикације траке већ су описани у претходном поглављу.

Први кључни изазов било је увођење синтетичког флукса у фотонску траку. Ово је реализовано примјеном мултиорбиталног спрезања: одређен број једномодних (S) таласовода замијењен је мултимодним (P) таласоводима, чиме је остварена контролисана фазна разлика између спрегнутих стања таласовода која одговара ефективном флуксу π . Управо је ова вриједност, према нумеричким симулацијама, дала најизразитије тополошке ефекте. У складу с тим, трака изграђена искључиво од S таласовода третира се као тополошки тривијална,

док трака која садржи комбинацију S и P таласовода представља платформу за тестирање тополошке нетривијалности.

Модификована структура траке након замјене одговарајућих таласовода приказана је на Слици 7.21. Док је јединична ћелија теоријског модела садржала шест таласовода, имплементација синтетичког флуksа захтјевала је њено проширење на дванаест. У овом поступку, S таласоводи који повезују хексагоне унутар једне ћелије замијењени су P таласоводима. Да би се обезбиједило стабилно спрежање између S и P таласовода, примјењен је протокол за оптимално подешавање, којим су њихове константе пропагације усклађене у сусједним таласоводима. Овај услов је постигнут за таласну дужину око 640 nm, што је коришћено у нашим експериментима.



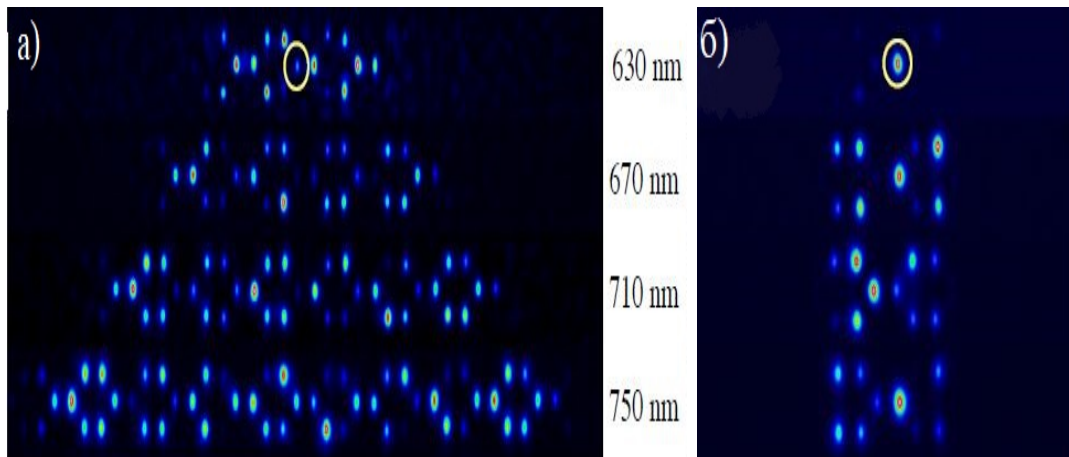
Слика 7.21: а) S и SP конфигурације трака, гдје је јачина флуksа назначена унутар сваке јединичне ћелије; б) Сlike израђених решетки добијене свјетлосним микроскопом.

Да бисмо боље разумјели динамику и транспорт мода у квази-једнодимензионим тракама, експериментално смо посматрали како се свјетлост шири кроз решетку у зависности од улазне побуде и примјењеног синтетичког флуksа. Понашање транспорта директно одражава тополошка својства система, па је овај приступ погодан за провјеру предвиђања нумеричких симулација.

За контролу режима транспорта користимо чињеницу да се константе спрежања у фотонским тракама готово линеарно мијењају са таласном дужином побуде. Промјена таласне дужине се може тумачити као испитивање система у различитим „динамичким временима“ V_z , без потребе да се мијења сама геометрија решетки. У експерименту је зато примјењен суперконтинуумски (SC) ласер у опсегу 630–750 nm, при чему је снажно фокусиран како би се селективно побудили појединачни чворови.

У тривијалном случају (без синтетичког флуksа), на Слици 7.22 а) су приказани резултати побуде D таласовода добијени за различите таласне дужине упадног ласерског снопа. Види се да као резултат добијамо транспорт сличан дискретној дифракцији у 1Д решеткама, тј. балистички тип транспорта. Активиран је само дисперзивни дио спектра и не долази до побуде равних зона.

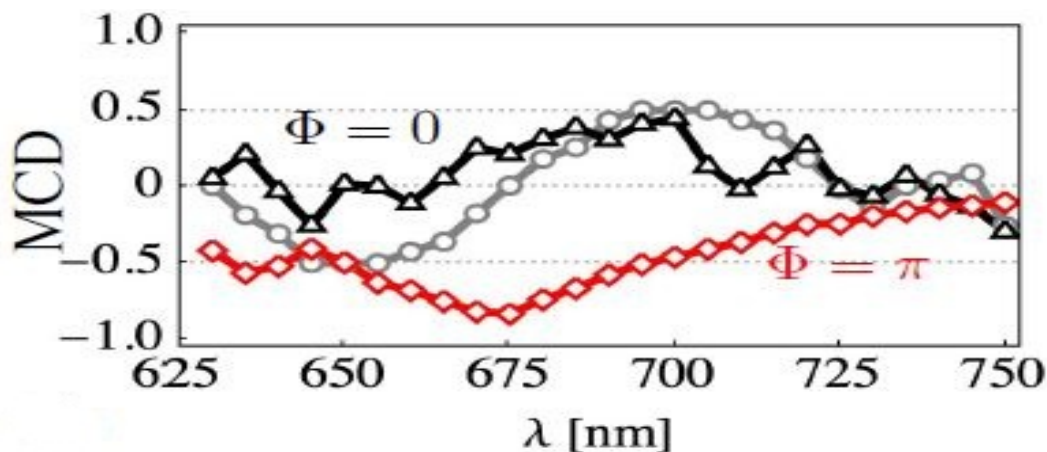
Уколико посматрамо идентичну побуду, али сада у нетривијалној решетки у присуству флукса π , видимо да свјетлост остаје заробљена осцилујући унутар једне јединичне ћелије, Слика 7.22 б). Постоји баријера, изазвана присуством флукса, коју свјетлост не може да савлада и настави транспорт кроз решетку. Ово је резултат деструктивне интерференције изазване Ахаронов Бом ефектом, када у систему имамо присутне само равне зоне. Ефекат заробљавања свјетлости је детектован за широк опсег таласних дужина.



Слика 7.22: Излазни интензитети за екситацију D таласовода (означен жутом кружницом) у центру рибона за: а) тривијалну траку ($\Phi = 0$) и б) нетривијалну траку ($\Phi = \pi$). Таласне дужине екситације су дате између двије слике и исте су за обје траке.

У циљу карактеризације булк транспорта, МХД је одређен као средња вриједност експериментално одређених МФД-а добијених побуђивањем A , C и E чворова, што је у складу са хиралном симетријом система, Слика 7.23. У случају тривијалног флукса ($\Phi = 0$), вриједности МХД-а осцилују око нуле, што је знак да је Закова фаза једнака нули. Свјетлост се у том режиму снажно шири кроз решетку, што смо видјели на Слици 7.22 а), а блага варијација у вриједностима МХД-а је последица нехомогености у траци, насталих приликом фабрикације. Подаци означени сивом бојом су добијени ако се посматрају само побуде у C и E таласоводима, пошто ови таласоводи углавном активирају равне зоне и свјетлост остаје ограничена унутар једне јединичне ћелије.

Када се уведе нетривијалан флукс ($\Phi = \pi$), слика се драматично мијења: МХД поприма вриједности близу -0.5 , што недвосмислено указује на тополошку нетривијалност. Најјачи ефекат јавља се око таласне дужине од 640 nm , када се у потпуности испуњава услов за нетривијалност. На овај начин, експериментално је показано да се тривијалне и нетривијалне фазе зоне могу динамички разликовати, зависно од уведеног флукса.

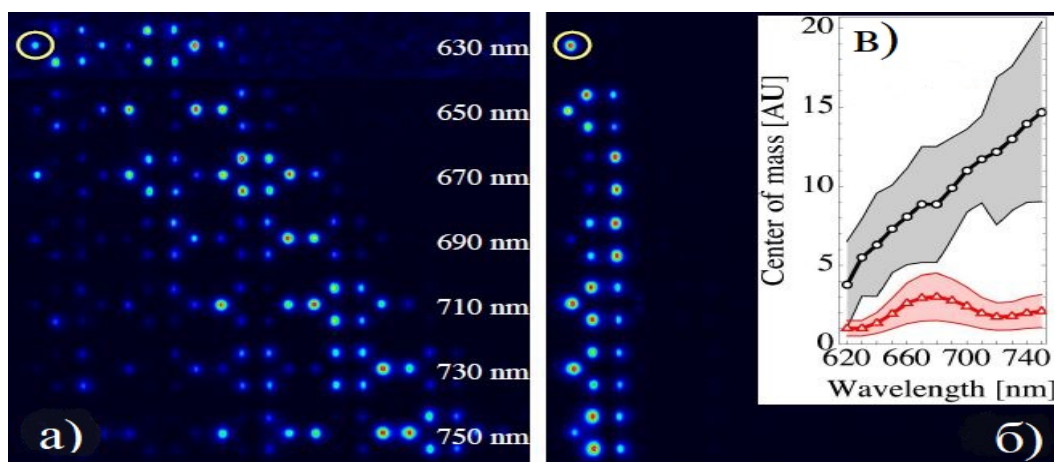


Слика 7.23: Експериментално добијене вриједности МХДа у зависности од улазне таласне дужине за тривијалну ($\Phi = 0$) и нетривијалну траку ($\Phi = \pi$).

Побуда таласовода A , на лијевој ивици решетке омогућава нам испитивање ивичне екситације. У тривијалној решетки са $\Phi = 0$, свјетлост се само шири дуж решетке, при чему се ивица понаша као одбијајућа баријера, Слика 7.24 а). Ово директно произилази из недостатка тополошке заштите у тривијалним решеткама.

Супротно томе, када је присутан нетривијалан флукс, Слика 7.24 б), свјетлост остаје заробљена у првој јединичној ћелији, локално осцилујући услед истовремене побуде три пара ивичних мода који се тада јављају у систему, јер свака ивична мода има највећу амплитуду баш у таласоводу A . Центар масе је приказан на Слици 7.24 в) као функција таласне дужине, при чему обојена површина показује други моменат као индикатор дисперзије.

Иако је услов за подешавање оптимизован око 640 nm , наши резултати показују да услов деструктивне интерференције при $\Phi = \pi$ важи и изван нултог режима подешавања. Међутим, мјерења се заустављају на 750 nm да би се избегли ефекти сљедећих најближих сусједа.

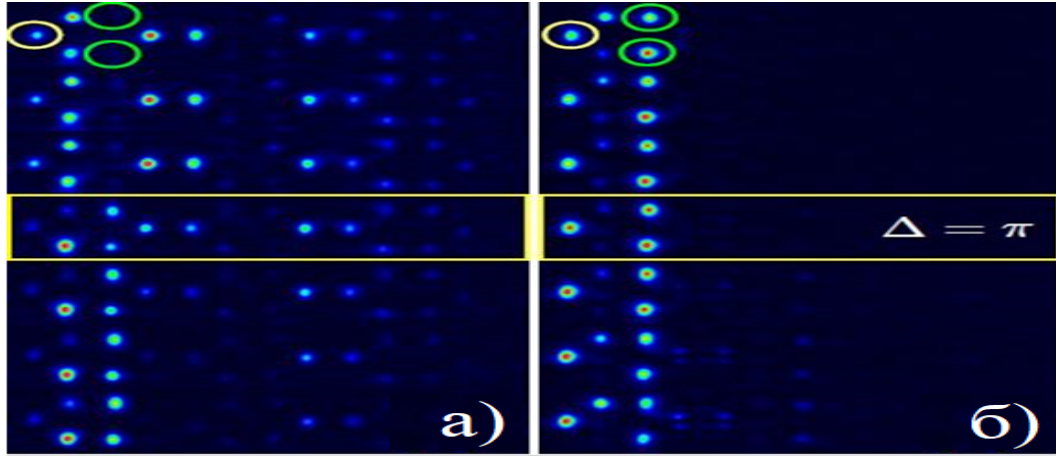


Слика 7.24: Ивична побуда A таласовода код: а) тривијалне траке; б) нетривијалне траке. в) Центар масе у зависности од таласне дужине.

Даље је истраживана робусност компактних нултих ивичних мода. За то је коришћена поставка са генератором слика, која омогућава истовремену побуду више чворова решетке са задатом амплитудом и фазном структуром. Конструисано је улазно стање са три чвора на таласној дужини 640 nm и побуђени су чворови A , C и E на лијевој ивици, Слика 7.25. Као што показују жути и зелени кругови на Слици 7.25, таласоводи C и E су побуђени у фази, док се релативна фаза (Δ) у A варира око π .

Резултати за тривијалну решетку Слика 7.25 а) показују јасне знаке дисперзије и осцилација између равних зона, без тенденције ка локализацији на ивици. Насупрот томе, за $\Phi = \pi$ уочавамо на Слици 7.25 б) да свјетлост остаје заробљена у првој јединичној ћелији, са готово потпуним одуством дисперзије у балк решетке.

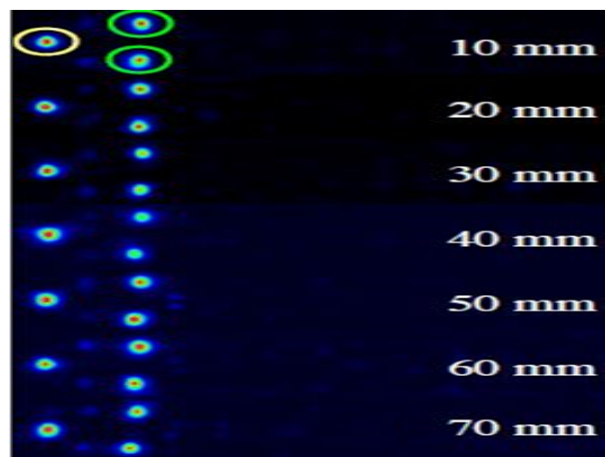
Ова локализација се одржава без обзира на фазну структуру улазног стања, показујући робусност компактних ивичних мода према фазним девијацијама. Ово је посебно значајно у примјенама у којима је фаза упадног зрака подложна случајним флуктуацијама.



Слика 7.25: Робусност компактних ивичних мода на варијације фазе улазног снопа побуде код: а) тривијалне траке; б) нетривијалне траке.

На крају, испитујемо стабилност и робусност пропагације компактних ивичних мода узимајући у обзир грешке у изради. Фазу улазног стања фиксирамо на $\Delta = \pi$ и конструишемо z -scan конфигурацију, у којој побуђени чворови A , C и E (у првој јединичној ћелији) имају пуну дужину пропагације, док преостали чворови решетке имају краћу дужину z_s .

Да бисмо пратили еволуцију стања, израдили смо 14 решетки са различитим z_s и приказали сет излазних профила на Слици 7.26. Уочавамо одличну стабилност пропагације компактних ивичних мода. Пошто је свака решетка израђена независно, на сваком узорку је присутна случајна неуређеност. Из тога слиједи да је нулта ивична мода веома отпоран на мање девијације у структури решетке.

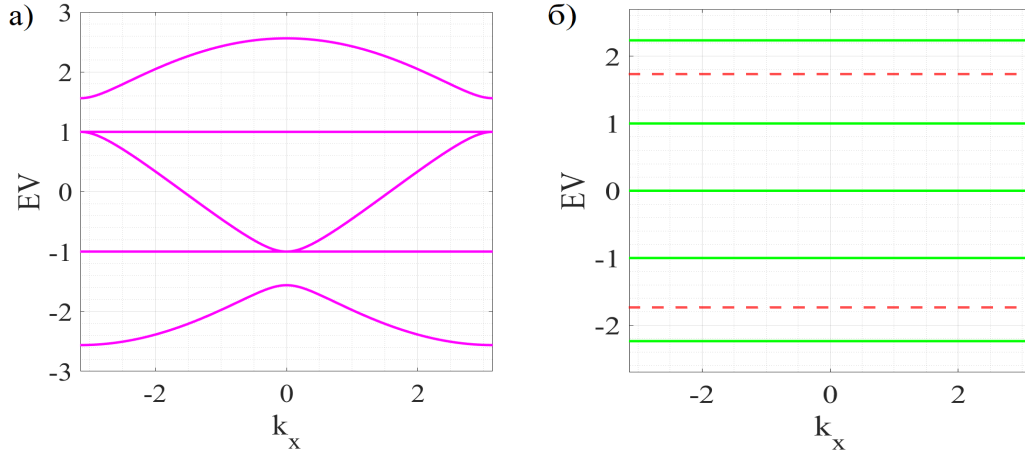


Слика 7.26: Отпорност компактне ивичне моде на неуређености настале приликом фабрикације траке.

Након спроведене детаљне нумеричке и експерименталне анализе прве траке, којом је потврђено постојање савршено компактних и тополошки заштићених нултих мода, појавила се идеја да се исти тип локализованих стања испита у другачијој геометријској конфигурацији, измјеном симетријских својстава трака.

Други модел трака налик графену приказан је на Слици 6.2 и описан Хамилтонијаном 6.2. Редослијед испитивања и примјењена методологија остају идентични као у претходном случају, што омогућава директно поређење резултата. За разлику од прве траке, овдје јединичне ћелије дијеле један таласовод са сусједном ћелијом ради формирања хексагона. Ова геометријска промјена нарушава поједине симетрије присутне у претходном моделу — нарочито хиралну симетрију, која је кључна за тополошку заштиту у бипартитним системима налик графену.

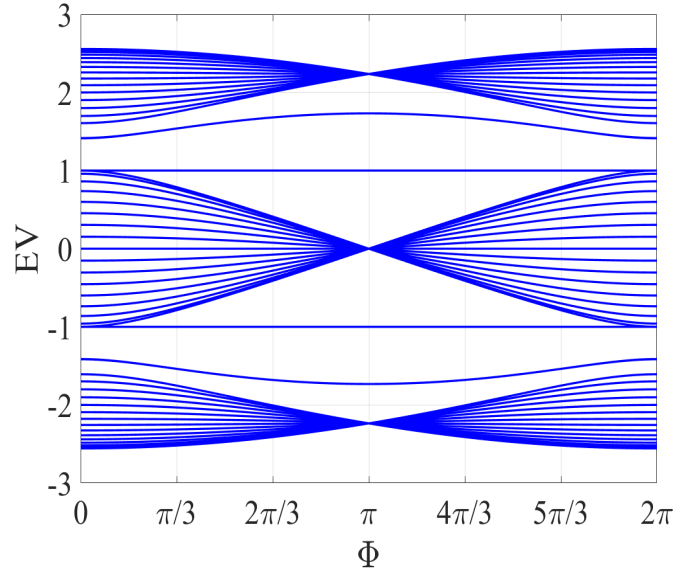
Након рјешавања својственог проблема без уведеног флукса, спектар се састоји од пет енергетских трака, двије равне и три дисперзивне, Слика 7.27. Уочава се појава локализованог стања у процјепу између спољашњих зона, које је везано за додатни таласовод убачен ради формирања затворене структуре. Сличне локализоване моде познате су и код цик-цак трака графена [?, ?], гдје настају као посљедица граничних услова, али немају тополошку заштиту: оне су осетљиве на мале геометријске поремећаје или варијације параметара спрезања и лако нестају услед пертурбација. У нашем случају, одсуство хиралне симетрије и изостанак квантизованих тополошких инваријанти потврђују да изолована мода није тополошке природе, већ представља геометријски индуковано стање. Ово указује да само присуство моде у процјепу, без анализе симетрија и инваријанти, није довољно за доказивање тополошке робустности.



Слика 7.27: Спектар својствених вриједности EV за: а) нулти флукс и б) π флукс. Испрекидане линије црвене боје означавају енергије на којима се појављују ивичне моде.

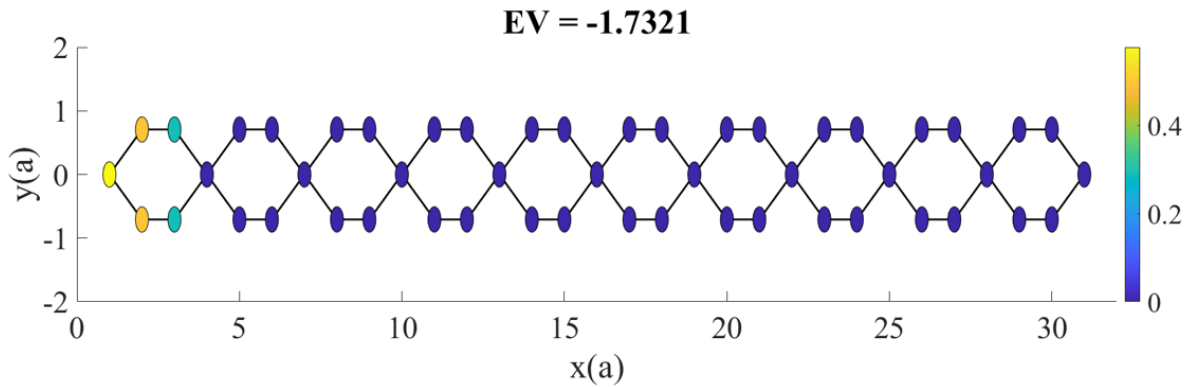
Вриједност флукса $\Phi = \pi$ производи исти кључни ефекат као у претходном моделу: све енергетске траке постају равне услед Ахаронов–Бомове деструктивне интерференције, а између њих се јављају ивичне моде, Слика 7.27. Међутим, за разлику од првог модела, на нултој енергији више не постоји дублет нултих мода; присутна је само равна зона која подржава постојање компактних, локализованих стања. Ово указује да промјеном геометрије и симетрије траке бива нарушен услов за формирање тополошки заштићених нултих мода.

Даље, праћење спектра својствених вриједности при постепеном повећању јачине флукса показује да равне зоне креиране у одсуству флукса, на енергијама $EV = \pm 1$, остају равне за све вриједности Φ , Слика 7.28. Процјеп који постоји већ од нултог флукса остаје отворен током цијелог процеса, што имплицира да у овом систему не долази до тополошког фазног прелаза. У складу са тим, локализована стања која се јављају нису посљедица тополошке робусности већ су условљена геометријским факторима и остају осјетљива на поремећаје у структури или у параметрима спрезања.



Слика 7.28: Спектар својствених вриједности у првој Брилуеновој зони у функцији укупног флукса Φ .

Ивичне моде које се јављају у одсуству флукса настављају да постоје за све вриједности Φ , али њихов просторни профил постаје све ужи са повећањем флукса. Највећи степен просторне компактности постиже се у случају $\Phi = \pi$, што је приказано на Сlici 7.29.



Слика 7.29: Ивична мода локализована на енергији $EV = -\sqrt{3}$.

Сумирајући, ивичне моде у овом моделу потичу из саме геометрије траке, а не из балк топологије. То је у складу са ранијим квалитативним запажањима и сада је кванитативно потврђено: (i) не долази до карактеристичног „затварања–поновног отварања“ процјепа при промјени флукса (изостанак тополошког прелаза), (ii) Закове фазе израчунате пројектор-методом за све изоловане траке остају нецјелобројне (Табела 7.2), па стога нема балк–ивица кореспонденције која би гарантовала ивичне моде, и (iii) моде јесу присутне и без флукса и постају уже с порастом флукса, али им робусност осјетно зависи од детаља граничних

услова и локалних поремећаја. Ови налази досљедно указују на тополошки тривијалан карактер уочених ивичних стања.

Табела 7.2: Вриједности Зак фазе за изоловане енергетске зоне у зависности од великог флуksа $\Phi = 2\pi G$.

Φ	Зона 1	Зона 2	Зона 3	Зона 4	Зона 5
0	-0,5654	0	-0,8674	0	-0,5654
$\frac{\pi}{5}$	0,1500	0,7517	-0,8799	-0,3642	0,8073
$\frac{2\pi}{5}$	0,2755	0,8361	-0,8934	-0,7507	0,7022
$\frac{3\pi}{5}$	0,3934	-0,9636	-0,8984	0,1194	-0,0125
$\frac{4\pi}{5}$	0,5104	-0,6677	-0,8946	0,1722	-0,1395
π	0,6419	-0,5844	-0,8808	-0,4841	-0,2473
$\frac{6\pi}{5}$	0,8202	0,1095	-0,8567	0,5446	0,9781
$\frac{7\pi}{5}$	-0,6943	0,6142	-0,8246	-0,9481	-0,8367
$\frac{8\pi}{5}$	-0,5090	0,8926	-0,7907	-0,5497	-0,6987
$\frac{9\pi}{5}$	-0,7604	0,8468	-0,7724	0,5001	0,0802
2π	0,9693	-0,2450	-0,4428	-0,2255	-0,2527

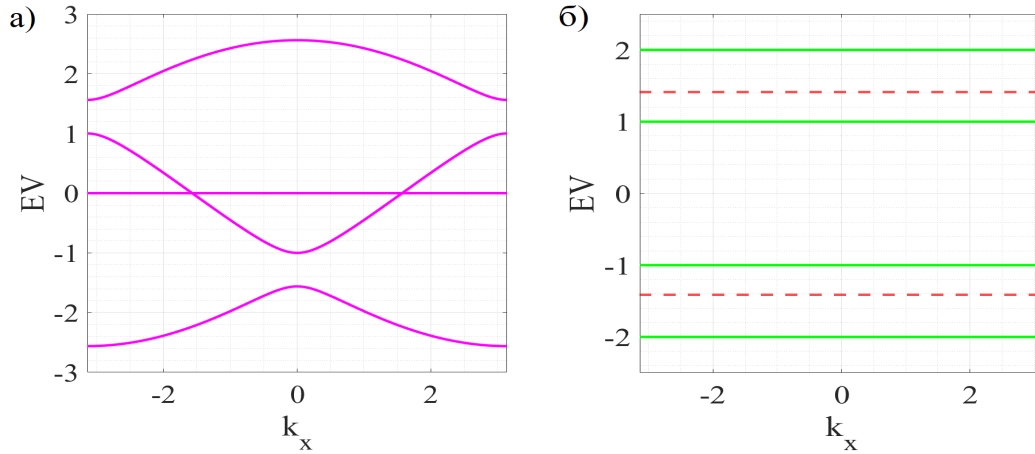
7.2.2 Квази-1Д траке налик дијаманту

Први анализирани модел заснива се на дијамантској јединичној ћелији (градивном елементу), од које је формирана квази-једнодимензионална трака приказана на Слици 6.3. Њена динамика описана је ефективним Хамилтонијаном 6.3. Тополошки прелаз се индукује увођењем синтетичког флуksа једнаке јачине у сваку јединичну ћелију. Рјешавањем својственог проблема Хамилтонијана добијамо спектар својствених вриједности.

У одсуству флуksа, спектар садржи четири енергетске зоне: двије изоловане и двије сингуларне, Слика 7.30а. Потпуно равна зона на нулој енергији потиче из геометријских својстава дијамантске ћелије и указује на постојање компактних локализованих стања која нису тополошки заштићена. Како се флуks постепено повећава, ова равна зона постаје дисперзивна, што потврђује њену геометријску, а не тополошку природу.

Спектар садржи и два енергетска процјена који у режиму без флуksа немају стања унутар процјена, што додатно потврђује одсуство тополошког фазног прелаза.

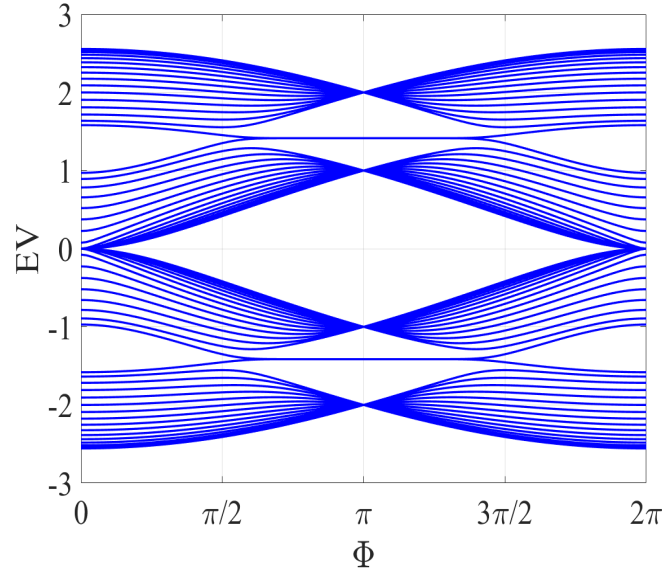
За $\Phi = \pi$, деструктивна интерференција узрокује колапс дисперзивних зона у равне, формирајући потпуно раван мултизонски спектар, Слика 7.30 б). Поравнање настаје услед дегенерације $4(N - 1)$ својствених вриједности које колабирају у четири равне зоне, симетрично распоређене око $EV = \pm 1$ и $EV = \pm 2$. У процјепима између равних зона јављају се двоструко дегенерисани парови ивичних мода на енергијама $EV = \pm\sqrt{2}$. Као директна посљедица деструктивне интерференције, профили ових ивичних мода имају нулту снагу на повезујућим чворовима (A или C), што у потпуности спречава транспорт стања и дисперзију.



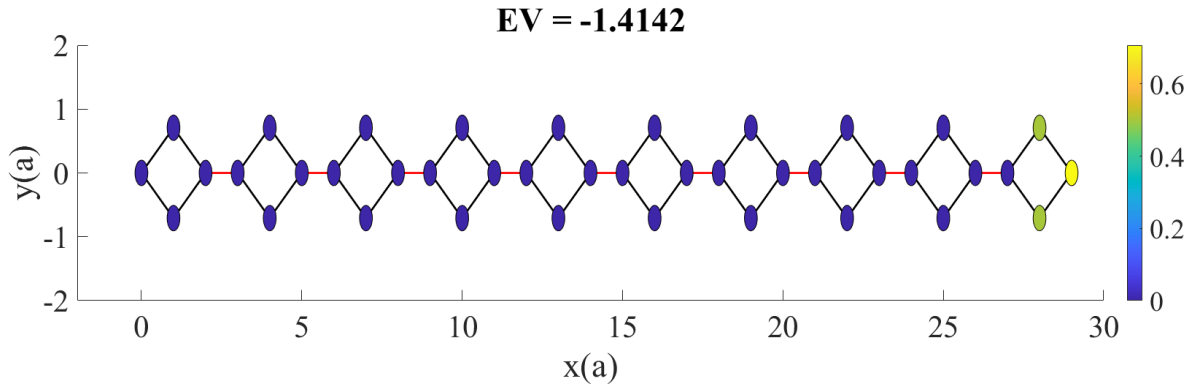
Слика 7.30: Спектар својствених вриједности EV за: а) нулти флукс и б) π флукс. Испрекидане црвене линије означавају енергије на којима се јављају ивичне моде.

Израчунали смо спектар својствених вриједности EV за низ различитих вриједности параметра флукса, како бисмо добили референтни приказ утицаја флукса на енергетску структуру система, Слика 7.31. Уочава се да постепено повећање синтетичког флукса трансформише иницијално равну зону на нултој енергији у дисперзивни, уз истовремену појаву енергетског процјепа око нулте енергије. Тај процјеп остаје празан, без ивичних стања, за све разматране вриједности флукса, што потврђује његову тополошку тривијалност.

Како параметар флукса достиже приближно $\Phi \approx \pi/2$, спољашњи енергетски процјеп се затвара, а затим поново отвара. Након поновног отварања, унутар тог процјепа појављују се ивичне моде које опстају све док се процјеп не затвори у околини $\Phi \approx 3\pi/2$. Профили ових ивичних мода показују да су оне снажно локализоване на ивичним јединичним ћелијама, при чему повезујући чвор остаје ненасељен, Слика 7.32.



Слика 7.31: Спектар својствених вриједности у првој Брилуеновој зони у функцији укупног флукса Φ .

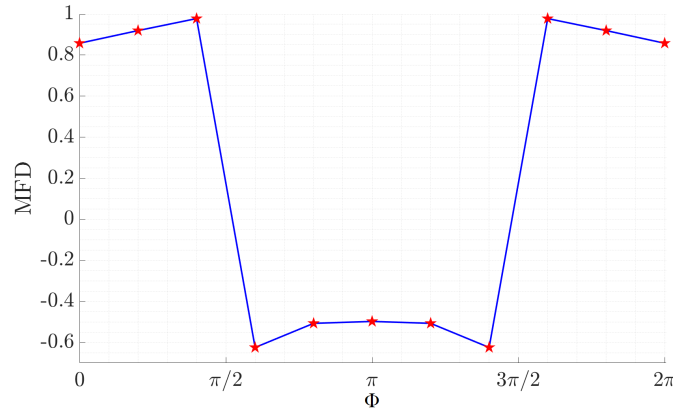


Слика 7.32: Ивична мода локализована на енергији $EV = -\sqrt{2}$.

Да бисмо провјерили да ли су уочене ивичне моде заиста тополошки заштићене, прво смо примијенили пројектор-метод за израчунавање Закове фазе, при чему су добијене вриједности приказане у Табели 7.3. При нултом флуксу, израчунате инваријанте указују на нетривијалност унутрашњих зона. Међутим, како су унутрашње зоне сингуларне ('преклапају се') и тиме нису изоловане тополошка карактеризација зона понаособ нема физичког смисла. Са постепеним повећањем флукса, отварају се енергетски процјепи у спектру и у њима се појављују нове ивичне моде. У том режиму зоне између којих се моде јављају постају окарактерисане цјелобројном вриједношћу Закове фазе, што посредно указује на тополошки карактер креираних ивичних мода. Након поновног затварања процјепна, одговарајуће зоне постају тополошки тривијалне.

Табела 7.3: Зак фаза изолованих зона добијена нумеричким методом пројектора у функцији укупног флуksа $\Phi = 2\pi G$.

Φ	Зона 1	Зона 2	Зона 3	Зона 4
0	0	-1	-1	0
$\frac{\pi}{5}$	0	0	0	0
$\frac{2\pi}{5}$	0	0	0	0
$\frac{3\pi}{5}$	1	-1	-1	1
$\frac{4\pi}{5}$	-1	-1	1	-1
π	-1	1	1	-1
$\frac{6\pi}{5}$	-1	1	1	-1
$\frac{7\pi}{5}$	-1	1	1	-1
$\frac{8\pi}{5}$	0	0	0	0
$\frac{9\pi}{5}$	0	0	0	0
2π	0	-0,118	0,118	0



Слика 7.33: МФД за различите вриједности флуksа.

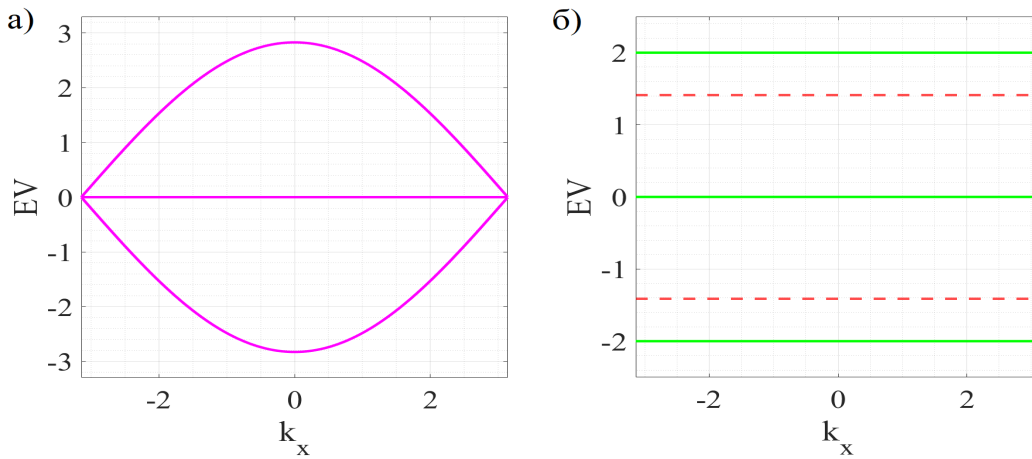
Резултати добијени методом средњег помјераја додатно потврђују ову слику. Као што је приказано на Слици 7.33, у наведеном опсегу вриједности флуksа МФД задржава константну вриједност близу -0.5 , што одговара квантованој Заковој фази и указује на нетривијалну тополошку природу зона. Ови резултати су добијени за иницијалну побуду у таласоводу A који се налази у центру траке, а исти ефекат је добијен и при побуђивању таласовода C . Насупрот томе, побуђивање таласовода B или D доводи до локализованог одзива без значајног ширења побуде дуж траке. Стога МФД јасно описује тополошки транспорт дуж траке, у којем активну улогу имају само таласоводи типа A и C .

Обје методе потврдиле су постојање тополошке заштите, што указује да су добијене моде робусне на спољашње пертурбације.

Други модел трака са градивним елементима типа дијаманта приказан је на Слици 6.4, док је његов ефективни Хамилтонијан дат изразом 6.4. Из облика Хамилтонијана јасно је да ова трака посједује хиралну симетрију. За разлику од претходне траке, овдје сусједне јединичне ћелије дијеле заједнички сајт, што утиче на његове спектралне и тополошке особине.

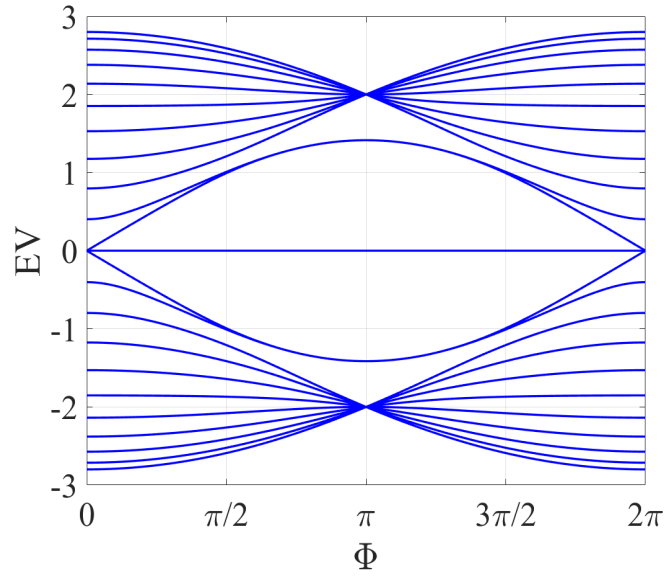
У одсуству флукса, спектар својствених вриједности садржи равну зону на нултој енергији, заједно са двије дисперзивне зоне. У овом режиму у спектру нема процјеп, што је јасно видљиво на Слици 7.34(а), гдје су приказане својствене вриједности добијене из дисперзионе релације.

Као и у претходном случају, при $\Phi = \pi$, деструктивна интерференција доводи до формирања потпуно равног спектра, који садржи три равне зоне симетрично смјештене на $EV = 0, \pm 2$. Унутар процјеп између ових равних зона наставља да постоји дублет двоструко дегенерисаних ивичних мода на енергији $EV = \pm\sqrt{2}$, што је приказано на Слици 7.34(б).

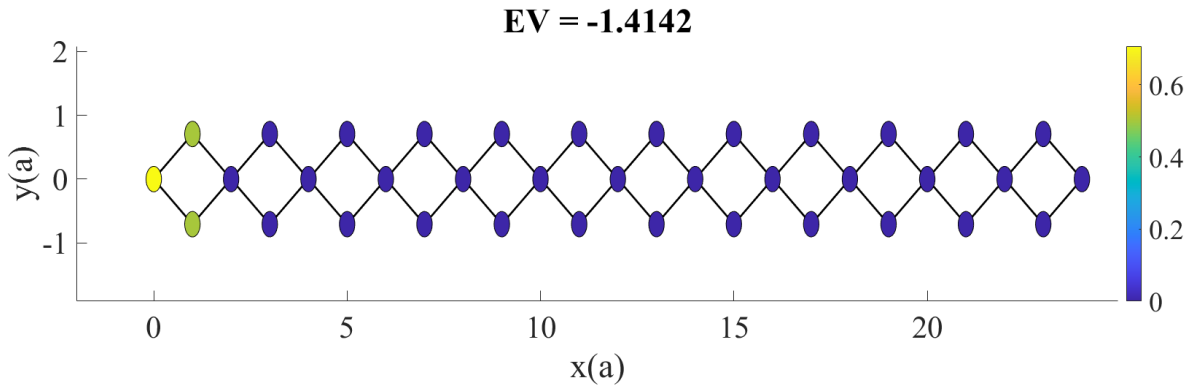


Слика 7.34: Спектар својствених вриједности EV за: а) нулти флукс и б) π флукс. Испрекидане црвене линије представљају енергије на којима се јављају ивичне моде.

Из еволуције спектра при промјени флукса, приказане на Слици 7.35, уочава се да равна зона остаје фиксирана на нултој енергији за све вриједности флукса. Како се флукс повећава, између равне зоне и сусједних дисперзивних трака отварају се енергетски процјепи. Унутар ових процјеп јављају се ивичне моде које опстају све док се процјепи поново не затворе, што указује потенцијално на њихову тополошку природу у овом опсегу параметара. Профили ових ивичних мода показују да су оне снажно локализоване на ивичној јединичној ћелији, као што је приказано на Слици 7.36.



Слика 7.35: Спектар својствених вриједности у првој Брилуеновој зони у функцији укупног флукса Φ .



Слика 7.36: Ивична мода локализована на енергији $EV = -\sqrt{2}$.

Користећи претходно описане методе за испитивање тополошке заштите уочених ивичних мода, израчунали смо Закове фазе и установили да је равна зона тополошки нетривијална за све вриједности флукса, осим за нулу, док преостале двије траке остају тополошки тривијалне, Табела 7.4. Иако Закова фаза указује на тополошку нетривијалност равне зоне, добијене вриједности МФД-а остају приближно нула. Ово привидно неслагање потиче из природе равних зона: оне имају константне енергетске вриједности независне од таласног броја, што значи да је групна брзина $\partial E / \partial k$ повезана са таласним пакетом једнака нули, па нема преноса енергије ни просторног транспорта. Како МФД мјери просјечно помјерање центра таласног пакета током пропагације, он остаје нула када побуда остаје локализована, чак и у случају тополошки нетривијалне зоне. Поред тога, због хиралне симетрије система, својствена стања равне зоне

могу имати симетричне просторне расподеле које додатно поништавају нето помјерање. Ово наглашава да ненулта Закова фаза сама по себи не гарантује уочљив транспорт у МФД-мјерењима за системе са равним зонама.

Табела 7.4: Зак фаза изолованих зона добијена нумерички методом пројектора у функцији великог флуksа $\Phi = 2\pi G$.

Φ	Зона 1	Зона 2	Зона 3
0	0	0	0
$\frac{\pi}{5}$	-0,496	-1	-0,496
$\frac{2\pi}{5}$	-0,498	-1	-0,498
$\frac{3\pi}{5}$	-0,498	-1	-0,498
$\frac{4\pi}{5}$	-0,499	-1	-0,499
π	-0,499	1	-0,499
$\frac{6\pi}{5}$	-0,499	-1	-0,499
$\frac{7\pi}{5}$	-0,499	1	-0,499
$\frac{8\pi}{5}$	-0,498	-1	-0,498
$\frac{9\pi}{5}$	-0,496	1	-0,496
2π	-0,469	0,960	-0,469

7.3 Потенцијалне примјене

Резултати приказани у претходним поглављима — нумерички и експериментално потврђена појава компактних, тополошки заштићених нултих мода у хексагоналним и ромбичним решеткама, као и у квази-једнодимензионалним тракама са синтетичким флуksом — пружају основу за више потенцијалних примјена у фотоници и сродним областима. Ови налази су у складу са ранијим радовима који показују да тополошка фотоника омогућава робусне, дисперзионо контролисане моде са високим степеном локализације и стабилности на поремећаје [19, 63, 18, 114].

Једна од кључних примјена односи се на интегрисане фотонске ласере. У овој дисертацији показано је да хексагонална решетка са дисторзијом подржава стабилан ласерски режим рада нултих мода, што је у сагласности са извештајима о тополошким ласерима у фотонским резонаторима [115, 35]. Практична имплементација овог концепта може се остварити коришћењем мултијезгарних влакана или директног ласерског уписивања таласовода, при чему селективна активација језгара и таласовода омогућава контролисано појачање и губитке [116, 117]. У таквим структурама, компактне моде омогућавају високу ефикасност због ограниченог просторног ширења и смањених губитака енергије.

Компактне тополошке моде, нумерички и експериментално добијене у квази-1Д тракама са синтетичким флуksом, настале су као последица Ахаронов-Бомовог ефеката у широком спектралном опсегу. Ова појава је позната по својој робусности према варијацијама параметара [118], што их чини погодним за широкопојасно фотонско рачунарство и квантне комуникационе канале, гдје

је потребно одржати коерентност и стабилност моде у присуству флуктуација фаза.

Даље, фотонске меморије и сензори са повећаном стабилношћу могу имати користи од ових резултата. Локализоване моде отпорне на дефекте пружају платформу за дуготрајну кохерентну меморију и прецизна мерења у условима структурних несавршености. Ово је у складу са недавним студијама које су истакле предност тополошке робустности у фотонским сензорима и меморијама [33].

Коначно, примјена неермитских модела (са контролисаним појачањем и губицима) може да прошири једносмјерни транспорт и омогући ултра-нискоенергетску фотонску електронику [119]. У овом раду показано је да се комбинација појачања и губитака може користити за постизање ласерског режима и стабилизацију ивичних мода, што указује на њихову примјенљивост у будућим тополошким оптичким колима.

Глава 8

Закључак

У овој дисертацији истраживани су механизми настанка и особине тополошки заштићених ивичних мода у квази-једнодимензионалним и дводимензионалним фотонским решеткама. Основни циљ рада био је да се утврди на који начин увођење синтетичког флуksа и геометријских модификација утиче на појаву и карактер робусних ивичних мода, као и да се идентификују услови под којима ове моде задржавају стабилност у присуству поремећаја, нелинеарности и губитака. Добијени резултати продубљују разумевање односа између симетрија, геометрије и тополошке заштите у фотонским решеткама.

У првом делу рада анализиране су дводимензионалне фотонске решетке — хексагонална у армчер конфигурацији и ромбична у цик-цак конфигурацији. Додавањем дисторзије у једну подрешетку индуковали смо тополошки дефект, што је довело до формирања нултих ивичних мода. Показано је да геометрија снажно утиче на појаву ових мода: хексагонална решетка подржава једну фамилију компактних мода са вртложном и ивичном компонентом, док ромбична, поред дефектних, показује и фамилију ивичних мода искључиво геометријског порекла, независно од дисторзије. Анализа је проширена на систем са Керовом нелинеарношћу, гдје је показано да у присуству слабе нелинеарности вртложна компонента нулте моде остаје очувана, што посредно потврђује доминацију ефекта тополошке заштићености. Са порастом јачине нелинеарности долази до резонантног мешања ивичних мода са модама из булка што доводи до изражене дисперзије ивичних-нултих мода.

Увођењем у систем неермитских ефеката и пажљивим подешавањем сатурационог појачања и губитака, постигнут је стабилан ласерски режим рада кроз нулте ивичне моде. Посебно је значајно што се овај режим успоставља чак и када је иницијална побуда реализована као random-phase excitation — униформно оптичко поље са насумично распоређеним фазама, што је стандардна техника у експериментима дискретне фотонице за активирање великог броја нормалних мода [?, ?]. Ова робусност указује да тополошка заштита ивичних стања омогућава формирање стабилног ласерског зрачења чак и под условима који имитирају шумовито иницијално поље, што има велики потенцијал за практичну имплементацију фотонских тополошких ласера.

Други део рада посвећен је квази-једнодимензионалним тракама. Својства четири различитих конфигурација трака са градивним елементима типа хекса-

гона (траке типа графена) и дијаманта, испитивана су у присуству синтетичког флукса. Најзначајнији резултати постигнути су за траку налик графену са шест таласовода по јединичној ћелији: показано је да увођење флукса отвара енергетске процепе и ствара тополошки заштићене ивичне моде. За $\Phi = \pi$, Ахаронов–Бомов ефекат доводи до формирања потпуно равног спектра и дублета компактних нултих мода локализованих на само три таласовода ивичне ћелије траке. Њихова тополошка природа потврђена је независним израчунавањем Закове фазе методама пројектора и средњег хиралног помераја (МХД). Експериментална реализација овог модела спроведена је техником директног ласерског уписивања таласовода у боросиликатно стакло. Синтетички флукс постигнут је спрезањем једномодних (S) и мултимодних (P) таласовода. Испитивањем балк и ивичних побуда показана је јасна разлика између тополошки тривијалних и нетривијалних трака, а добијени експериментални подаци — укључујући мерење МХД-а и испитивање робусности на фазне девијације и фабрикационе несавршености — у потпуности су потврдили нумеричке резултате. Анализа преосталих квази-1Д модела показала је да, иако не генеришу потпуно компактне моде на нултој енергији, увођење флукса и у њима индукује настанак тополошки заштићене ивичне моде. Ови резултати указују на нове могућности примјене синтетичког флукса као контролног параметра за дизајн фотонских структура са специфичним транспортним својствима.

На основу свих представљених резултата може се закључити да је основни циљ ове дисертације у потпуности остварен. Остварена открића пружају нова сазнања која значајно продубљују разумевање механизма који повезују симетрије, геометрију и тополошку заштиту у фотонским решеткама. Ови резултати не само да обогаћују фундаментално знање о тополошким феноменима у фотоници, већ и отварају пут ка њиховој примјени у развоју напредних фотонских уређаја и технологија.

Библиографија

- [1] F. D. M. Haldane and S. Raghu. Possible realization of directional optical waveguides in photonic crystals with broken time-reversal symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 100:013904, 2008.
- [2] S. Raghu and F. D. M. Haldane. Analogs of quantum-hall-effect edge states in photonic crystals. *Phys. Rev. A*, 78:033834, 2008.
- [3] M. Z. Hasan and C. L. Kane. Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.*, 82:3045–3067, 2010.
- [4] X.-L. Qi and S.-C. Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83:1057–1110, 2011.
- [5] D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters*, 49(6):405–408, 1982.
- [6] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Physical Review Letters*, 45(6):494–497, 1980.
- [7] Z. Wang, Y. Chong, J. D. Joannopoulos, and M. Soljačić. Observation of unidirectional backscattering-immune topological electromagnetic states. *Nature*, 461:772–775, 2009.
- [8] S. A. H. Gangaraj and F. Monticone. Physical violations of the bulk-edge correspondence in topological electromagnetics. *Phys. Rev. Lett.*, 124:153901, 2020.
- [9] Ján Zak. Berry’s phase for energy bands in solids. *Physical Review Letters*, 62(23):2747–2750, 1989.
- [10] S. Longhi. Selective and tunable excitation of topological non-hermitian quasiedge modes. *Proc. R. Soc. A*, 478:20210927, 2022.
- [11] Tomoki Ozawa, Hannah M. Price, Alberto Amo, Nathan Goldman, Mohammad Hafezi, Ling Lu, Mikael C. Rechtsman, David Schuster, Jonathan Simon, Oded Zilberberg, and Iacopo Carusotto. Topological photonics. *Reviews of Modern Physics*, 91(1):015006, 2019.

- [12] D. Leykam, E. Smolina, A. Maluckov, S. Flach, and D.A. Smirnova. Probing band topology using modulational instability. *Phys. Rev. Lett.*, 126:073901, 2021.
- [13] Ling Lu, John D. Joannopoulos, and Marin Soljačić. Topological photonics. *Nature Photonics*, 8(11):821–829, 2014.
- [14] Pavel A. Maksimov, A. V. Rozhkov, and Artem O. Sboychakov. Localized electron states near the armchair edge of graphene. *Phys. Rev. B*, 88(245421), 2013.
- [15] Jin-Shi Xu, Kai Sun, Yong-Jian Han, Chuan-Feng Li, Jiannis K. Pachos, and Guang-Can Guo. Simulating the exchange of majorana zero modes with a photonic system. *Nat. Commun.*, 7(13194), 2016.
- [16] Ramy El-Ganainy, Konstantinos G. Makris, Mercedeh Khajavikhan, Ziad H. Musslimani, Stefan Rotter, and Demetrios N. Christodoulides. Non-hermitian physics and pt symmetry. *Nature Physics*, 14:11–19, 2018.
- [17] D. Aasen, M. Hell, R.V. Mishmash, A. Higginbotham, J. Danon, M. Leijnse, T.S. Jespersen, J.A. Folk, C.M. Marcus, K. Flensberg, and J. Alicea. Milestones toward majorana-based quantum computing. *Phys. Rev. X*, 6:031016, 2016.
- [18] M. C. Rechtsman et al. Photonic floquet topological insulator. *Nature*, 496:196–200, 2013.
- [19] M. Hafezi, S. Mittal, J. Fan, A. Migdall, and J. M. Taylor. Imaging topological edge states in silicon photonics. *Nat. Photon.*, 7:1001–1005, 2013.
- [20] A. B. Khanikaev et al. Photonic topological insulators. *Nat. Mater.*, 12:233–239, 2013.
- [21] L.-H. Wu and X. Hu. Scheme for achieving a topological photonic crystal by using dielectric material. *Phys. Rev. Lett.*, 114:223901, 2015.
- [22] J. K. Asbóth, L. Oroszlány, and A. Pályi. *Lecture Notes in Physics*, Vol. 919. Springer Verlag, Berlin, 2016.
- [23] I. Mondragon-Shem, T. L. Hughes, J. Song, and E. Prodan. Topological criticality in the chiral-symmetric aiii class at strong disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 113:046802, 2014.
- [24] W. P. Su, J. R. Schrieffer, and A. J. Heeger. Solitons in polyacetylene. *Phys. Rev. Lett.*, 42:1698–1701, 1979.
- [25] A. Szameit et al. Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica. *Opt. Express*, 13:10552–10557, 2005.
- [26] Adrian J. Menssen, Jun Guan, David Felce, Martin J. Booth, and Ian A. Walmsley. Photonic topological mode bound to a vortex. *Phys. Rev. Lett.*, 125(117401), 2020.

- [27] Hao Lin and Ling Lu. Dirac-vortex topological photonic crystal fibre. *Light Sci Appl*, 9(202), 2020.
- [28] Zhen Zhu, Hao Zheng, and Jin feng Jia. Majorana zero mode in the vortex of artificial topological superconductor. *J. Appl. Phys.*, 129(151104), 2021.
- [29] W. Gao, B. Yang, B. Tremain, et al. Experimental observation of photonic nodal line degeneracies in metacrystals. *Nat. Commun.*, 9:950, 2018.
- [30] Kenta Takata and Masaya Notomi. Photonic topological insulating phase induced solely by gain and loss. *Phys. Rev. Lett.*, 121(213902), 2018.
- [31] Mehdi Parto, William Hayenga, Alireza Marandi, Demetrios N. Christodoulides, and Mercedeh Khajavikhan. Non-hermitian and topological photonics: optics at an exceptional point. *Nanophotonics*, 10(1):403–423, 2021.
- [32] Pablo Resendiz-Vazquez, Konrad Tschernig, Armando Perez-Leija, Kurt Busch, and Roberto de J. Leon-Montiel. Topological protection in non-hermitian haldane honeycomb lattices. *Physical Review Research*, 2(013387), 2020.
- [33] D. Smirnova, D. Leykam, Y. Chong, and Y. Kivshar. Nonlinear topological photonics. *Appl. Phys. Rev.*, 7:021306, 2020.
- [34] S. Mukherjee and M.C. Rechtsman. Observation of floquet solitons in a topological bandgap. *Science*, 368:856–859, 2020.
- [35] G. Harari, M. A. Bandres, Y. Lumer, M. C. Rechtsman, Y. D. Chong, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and M. Segev. Topological insulator laser: theory. *Science*, 359:1230, 2018.
- [36] M. A. Bandres, S. Wittek, G. Harari, M. Parto, J. Ren, M. Segev, D. N. Christodoulides, and M. Khajavikhan. Topological insulator laser: experiments. *Science*, 359:123, 2018.
- [37] J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis, A. Saxena, A. Comech, and R. Lan. Stability of solitary waves and vortices in a 2d nonlinear dirac model. *Phys. Rev. Lett.*, 116:214101, 2016.
- [38] A. R. Parker. Diffracting optics in animals: diversity and biological significance. In *European Optical Society Meeting Digest Series*, volume 18, page 27, 1998.
- [39] P. Vukusic, J. R. Sambles, and C. R. Lawrence. Colour mixing in wing scales of a butterfly. *Nature*, 404:457, 2000.
- [40] P. Vukusic and J. R. Sambles. Photonic structures in biology. *Nature*, 424:852, 2003.
- [41] Jean-Pierre Vigneron. Natural photonic crystals. *Physics Reports*, 495(6):187–251, 2012.

- [42] J. J. Gao, Y. Yang, Y. Zhang, S. Zhang, and Q. Li. Stimuli-responsive photonic actuators for integrated biomimetic and intelligent systems. *Responsive Materials*, 1(e20230008), 2023.
- [43] P. Wu, J. Wang, and L. Jiang. Bio-inspired photonic crystal patterns. *Mater. Horiz.*, 7:338–365, 2020.
- [44] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, Hoboken, NJ, 8th edition, 2005.
- [45] Ivan L. Garanovich, Stefano Longhi, Andrey A. Sukhorukov, and Yuri S. Kivshar. Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides. *Physics Reports*, 518(1):1–79, 2011.
- [46] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade. *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2nd edition, 2008.
- [47] J. C. Knight. Photonic crystal fibres. *Nature*, 424:847–851, 2003.
- [48] Kuon Inoue and Kazuo Ohtaka, editors. *Photonic Crystals: Physics, Fabrication and Applications*, volume 94 of Springer Series in Optical Sciences. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [49] E. Ozbay. The magical world of photonic metamaterials. *Optics and Photonics News*, 19:22, 2008.
- [50] J.-Y. Oh, E. Plum, J. Zhang, and N. I. Zheludev. An electromechanically reconfigurable plasmonic metamaterial operating in the near-infrared. *Nature Nanotechnology*, 8:252, 2013.
- [51] N. Yu and F. Capasso. Flat optics with designer metasurfaces. *Nature Materials*, 13:139, 2014.
- [52] E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical Review Letters*, 58:2059, 1987.
- [53] S. John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Physical Review Letters*, 58:2486, 1987.
- [54] D. N. Christodoulides, F. Lederer, and Y. Silberberg. Discretizing light behaviour in linear and nonlinear waveguide lattices. *Nature*, 424:817–823, 2003.
- [55] Lord Rayleigh. The propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. *Philosophical Magazine*, 24:145–159, 1887.
- [56] V. P. Bykov. Spontaneous emission from a medium with a band spectrum. *Quantum Electronics*, 4:861–871, 1975.

- [57] Thomas F. Krauss, Richard M. De La Rue, and Stuart Brand. Two-dimensional photonic-bandgap structures operating at near-infrared wavelengths. *Nature*, 383:699–702, 1996.
- [58] Philip Russell. Photonic crystal fibers. *Science*, 299:358–362, 2003.
- [59] J. W. Fleischer, M. Segev, N. K. Efremidis, and D. N. Christodoulides. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices. *Nature*, 422:147–150, 2003.
- [60] M. Campbell, D. N. Sharp, M. T. Harrison, R. G. Denning, and A. J. Turberfield. Fabrication of photonic crystals for the visible spectrum by holographic lithography. *Nature*, 404:53–56, 2000.
- [61] A. Szameit, J. Burghoff, T. Pertsch, S. Nolte, A. Tünnermann, and F. Lederer. Two-dimensional soliton in cubic fs laser written waveguide arrays in fused silica. *Optics Express*, 14:6055–6062, 2006.
- [62] Daniel Leykam. Wave and spectral singularities in photonic lattices. PhD thesis, The Australian National University, 2015.
- [63] J. Noh, W. A. Benalcazar, S. Huang, M. J. Collins, K. Chen, T. L. Hughes, and M. C. Rechtsman. Topological protection of photonic mid-gap cavity modes. *Nature*, 536(7614):195–199, 2016.
- [64] Yonatan Plotnik, Mikael C. Rechtsman, Daohong Song, Matthias Heinrich, Julia M. Zeuner, Stefan Nolte, Yaakov Lumer, Natalia Malkova, Jingjun Xu, Alexander Szameit, Zhigang Chen, and Mordechai Segev. Observation of unconventional edge states in ‘photonic graphene’. *Nature Materials*, 13:57–62, 2014.
- [65] D. Leykam and S. Flach. Perspective: Photonic flatband. *APL Photonics*, 3:070901, 2018.
- [66] M. I. Molina and G. P. Tsironis. Absence of localization in a nonlinear random binary alloy. *Physical Review Letters*, 73(3):464–467, 1994.
- [67] Qiuchen Yan, Xiaoyong Hu, Yulan Fu, Cuicui Lu, Chongxiao Fan, Qihang Liu, Xilin Feng, Quan Sun, and Qihuang Gong. Quantum topological photonics. *Advanced Optical Materials*, 9(15)(2001739), 2021.
- [68] Dominik Blömer, Alexander Szameit, Felix Dreisow, Thomas Schreiber, Stefan Nolte, and Andreas Tünnermann. Nonlinear refractive index of fs-laser-written waveguides in fused silica. *Optics Express*, 14(6):2151–2157, 2006.
- [69] S. Maruo, O. Nakamura, and S. Kawata. Three-dimensional microfabrication with two-photon-absorbed photopolymerization. *Optics Letters*, 22:132–134, 1997.
- [70] R. Vogel and H. P. Herzig. Ion exchange in glass: A review. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 185:240–247, 1995.

- [71] A. E. Siegman. Lasers. University Science Books, Mill Valley, CA, 1986. p. 457, paraxial approximation discussion.
- [72] A. Yariv. Coupled-mode theory for guided-wave optics. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 9:919–933, 1973.
- [73] Alexander Szameit and Stefan Nolte. Discrete optics in femtosecond-laser-written photonic structures. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 43(16):163001, July 2010.
- [74] James Munkres. Topology. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 2000.
- [75] Glen E. Bredon. Topology and Geometry. Springer, New York, NY, 1997.
- [76] Shun-Qing Shen. Topological invariants in condensed matter physics. *Physics Reports*, 507(1):1–95, 2012.
- [77] Xiao-Gang Wen. Topological phases of matter. *Advances in Physics*, 48(3):383–484, 2002.
- [78] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London A. Mathematical and Physical Sciences*, 392(1802):45–57, 1984.
- [79] F. D. M. Haldane. Model for a quantum hall effect without landau levels: Condensed-matter realization of the "parity anomaly". *Physical Review Letters*, 61:2015–2018, 1988.
- [80] P. St-Jean, V. Goblot, E. Galopin, A. Lemaître, T. Ozawa, L. Le Gratiet, I. Sagnes, J. Bloch, and A. Amo. Lasing in topological edge states of a one-dimensional lattice. *Nature Photonics*, 11:651–656, 2017.
- [81] A. Trombettoni and A. Smerzi. Discrete solitons and breathers with dilute bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, 86(11):2353–2356, 2001.
- [82] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays. *Physical Review Letters*, 81(16):3383–3386, 1998.
- [83] R. Iwanow, R. Schiek, G. I. Stegeman, T. Pertsch, F. Lederer, Y. Min, and W. Sohler. Observation of discrete quadratic solitons. *Physical Review Letters*, 93(11):113902, 2004.
- [84] L. Fan, J. Wang, L. T. Varghese, H. Shen, B. Niu, Y. Xuan, A. M. Weiner, and M. Qi. An all-silicon passive optical diode. *Science*, 335(6067):447–450, 2012.
- [85] Y. Ota, R. Katsumi, K. Watanabe, S. Iwamoto, and Y. Arakawa. Topological photonic crystal nanocavity laser. *Communications Physics*, 1(1):86, 2018.

- [86] D. A. Dobrykh, A. V. Yulin, A. P. Slobozhanyuk, A. N. Poddubny, and Y. S. Kivshar. Nonlinear control of electromagnetic topological edge states. *Physical Review Letters*, 121(16):163901, 2018.
- [87] R. Ma, B. Saxberg, C. Owens, N. Leung, Y. Lu, J. Simon, and D. I. Schuster. A dissipatively stabilized mott insulator of photons. *Nature*, 566:51–57, 2019.
- [88] J. Meier, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, Y. Silberberg, R. Morandotti, H. Yang, G. Salamo, M. Sorel, and J. S. Aitchison. Experimental observation of discrete modulational instability. *Physical Review Letters*, 92:163902, 2004.
- [89] K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita. Observation of modulational instability in optical fibers. *Physical Review Letters*, 56:135–138, 1986.
- [90] Falk Lederer, George I. Stegeman, Demetri N. Christodoulides, Gaetano Assanto, Moti Segev, and Yaron Silberberg. Discrete solitons in optics. *Physics Reports*, 463:1–126, 2008.
- [91] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. Studies of nonlinear problems. Technical Report LA-1940, Los Alamos National Laboratory, 1955. Los Alamos Report.
- [92] R. Morandotti, H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, M. Sorel, and J. S. Aitchison. Self-focusing and defocusing in waveguide arrays. *Physical Review Letters*, 86:3296–3299, 2001.
- [93] Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press, San Diego, 2003.
- [94] Yuzhou G. N. Liu, Pawel S. Jung, Midya Parto, Demetrios N. Christodoulides, and Mercedeh Khajavikhan. Gain-induced topological response via tailored long-range interactions. *Nature Physics*, 17:704–709, 2021.
- [95] Haoran Xue, Qiang Wang, Baile Zhang, and Y. D. Chong. Non-hermitian dirac cones. *Phys. Rev. Lett.*, 124(236403), 2020.
- [96] Bofeng Zhu, Qiang Wang, Daniel Leykam, Haoran Xue, Qi Jie Wang, and Y. D. Chong. Anomalous single-mode lasing induced by nonlinearity and the non-hermitian skin effect. *Phys. Rev. Lett.*, 129(013903), 2022.
- [97] Bofeng Zhu, Qiang Wang, Yongquan Zeng, Qi Jie Wang, and Y. D. Chong. Single-mode lasing based on pt -breaking of two-dimensional photonic higher-order topological insulator. *Phys. Rev. B*, 104(L140306), 2021.
- [98] Orazio Svelto. *Principles of Lasers*. Springer, New York, NY, 5th edition, 2010.
- [99] Mohammad-Ali Miri and Andrea Alù. Topological on-chip lasers. *Applied Physics Reviews*, 8:070901, 2019.
- [100] Fei Gao and et al. Higher-order topological insulator lasers. *Laser and Photonics Reviews*, 18:2400694, 2024.

- [101] Daniel Leykam and et al. Nonlinear and non-hermitian physics in topological photonics. *Physical Review A*, 110:063502, 2024.
- [102] R. Jackiw and S.-Y. Pi. Chiral gauge theory for graphene. *Physical Review Letters*, 98:266402, 2007.
- [103] R. Jackiw and P. Rossi. Zero modes of the vortex-fermion system. *Nucl. Phys. B*, 190:681–691, 1981.
- [104] Claudio Chamon, Chang-Yu Hou, Christopher Mudry, Shinsei Ryu, and Luiz Santos. Masses and majorana fermions in graphene. *Phys. Scr.*, T146, 2012.
- [105] C.-Y. Hou, C. Chamon, and C. Mudry. Electron fractionalization in two-dimensional graphene-like structures. *Phys. Rev. Lett.*, 98:186809, 2007.
- [106] Jiho Noh, Wladimir A. Benalcazar, Sheng Huang, Matthew J. Collins, Kevin P. Chen, Taylor L. Hughes, and Mikael C. Rechtsman. Topological protection of photonic mid-gap defect modes. *Nat. Photonics*, 12:408–415, 2018.
- [107] Li Wang, Ruo-Yang Zhang, Meng Xiao, Dezhan Han, C T Chan, and Weijia Wen. The existence of topological edge states in honeycomb plasmonic lattices. *New J. Phys.*, 18, 2016.
- [108] M. Nedić, G. Gligorić, J. Petrovic, and A. Maluckov. Nonlinearity and lasing topological zero-mode in distorted photonic lattice. *Phys. Lett. A*, 477:128893, 2023.
- [109] Milica Nedić, Goran Gligorić, Jovana Petrovic, and Aleksandra Maluckov. Zero-mode diversity in photonic graphene with vortex distortion: nonlinear response and driving. *Optical and Quantum Electronics*, 56:1183, 2024.
- [110] M. Tovmasyan, S. Peotta, P. Törmä, and S. D. Huber. Effective theory and emergent $su(2)$ symmetry in the flat bands of attractive hubbard models. *Physical Review B*, 94:245149, 2016.
- [111] V. A. J. Pyykkönen, S. Peotta, and P. Törmä. Suppression of nonequilibrium quasiparticle transport in flat-band superconductors. *Physical Review Letters*, 130:216003, 2023.
- [112] P. Törmä. Essay: Where can quantum geometry lead us? *Physical Review Letters*, 131:240001, 2023.
- [113] J. S. Hofmann, F. F. Assaad, and A. P. Schnyder. Edge instabilities of topological superconductors. *Physical Review B*, 93:201116, 2016.
- [114] R. A. Vicencio, G. Caceres-Aravena, and L. E. F. Torres. Topological and flat-band states induced by hybridized linear interactions in one-dimensional photonic lattices. *Physical Review A*, 92(4):043803, 2015.

- [115] Babak Bahari, Sabyasachi Barik, Hamid Hodaei, Midya Parto, Payam Aleahmad, Miguel A. Bandres, Steffen Wittek, Demetrios N. Christodoulides, and Mordechai Segev. Nonreciprocal lasing in topological cavities of arbitrary geometries. *Science*, 358(6366):636–640, 2017.
- [116] G. Corrielli, V. D’Ambrosio, L. Marrucci, A. Allevi, E. Santamato, M. DeMicheli, and D. DeRossi. Phase-locked multicore all-fiber lasers: Modeling and experimental investigation. *Journal of the Optical Society of America B*, 24(9):1721–1728, 2007.
- [117] S. Mukherjee, D. Mogilevtsev, G. Y. Slepyan, T. H. Doherty, and R. R. Thomson. Dissipatively coupled waveguide networks for coherent diffusive photonics. *Nature Communications*, 8, 2017.
- [118] S. Mukherjee, M. Di Liberto, P. Öhberg, R. R. Thomson, and N. Goldman. Experimental observation of aharonov-bohm cages in photonic lattices. *Physical Review Letters*, 121(7):075502, 2018.
- [119] Midya Parto, Steffen Wittek, Hossein Hodaei, Gal Harari, Miguel A. Bandres, Jinhan Ren, Mikael C. Rechtsman, Mordechai Segev, Demetrios N. Christodoulides, and Mercedeh Khajavikhan. Edge-mode lasing in 1d topological active arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 120(113901), 2018.

Биографија

Милица Недић је основну школу „Младен Стојановић” у Љубији завршила 2010. године са одличним успјехом (5,00). Средњу школу ЈУ Гимназија „Свети Сава” у Приједору завршила је 2014. године такође са одличним успјехом (5,00). Основне академске студије, смјер „Теоријска и експериментална физика”, завршила је на Физичком факултету Универзитета у Београду 2019. године са просјечном оцјеном 8,41 (осам и 41/100).

Мастер академске студије је завршила на Физичком факултету Универзитета у Београду, смјер „Теоријска и експериментална физика”. Мастер рад под називом „Особине спинских лавина у неуређеним тракастим феромагнетним системима” одбранила је 4. 9. 2020. године под руководством др Светислава Мијатовића са просјечном оцјеном 10. Добитница је награде „Проф. др Љубомир Ћирковић” за најбољи мастер рад одбрањен на Физичком факултету школске 2019/2020. Резултати овог мастер рада објављени су у научном часопису *Physical Review E*.

Докторске академске студије је уписала 2020. године, студијски програм „Физика кондензоване материје и статистичка физика”. Запослена је у Институту за нуклеарне науке „Винча” Универзитета у Београду, Институту од националног значаја за Републику Србију, у лабораторији за атомску физику (040) као истраживач сарадник, гдје је и завршила израду докторске дисертације која је резултирала са три објављена рада у научним часописима *Physics Letters A*, *Optical and Quantum Electronics* и *Physical Review Letters*.

Учествовала је на радионицама „16th Photonics Workshop 2023” и „18th Photonics Workshop 2025”, на Копаонику, гдје је оба пута одржала предавање да би представила резултате свог рада. У Валенсији (Шпанија) је имала постер презентацију на конгресу „5th World Congress on Lasers Optics and Photonics”, гдје је добила награду за најбоље израђен постер. Учествовала је и у организацији конференције „PHOTONICA 2023” која је одржана у Српској академији наука и умјетности у Београду, гдје је уједно имала и постер презентацију. Постер презентације је такође представила на конференцијама „PHOTONICA 2025” у Београду и „Photonics Ireland 2025” у Корку, Ирска.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора: _____

Број индекса: _____

Да је докторска дисертација под насловом _____

Изјављујем:

- да су резултати сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени;
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора: _____

У Београду, _____

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: _____

Број индекса: _____

Студијски програм: _____

Наслов рада: _____

Ментор: _____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора: _____

У Београду, _____

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Мој уставник у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступан у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одређене садржаје у одобраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без приписивања (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без приписивања (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је састављен део ове изјаве).

Потпис аутора: _____

У Београду, _____
