

MATEMATIČKA FIZIKA I (ispitna pitanja, 2000)

Prva grupa pitanja

1. Vektorski prostor, linearna kombinacija, linearna nezavisnost.
2. Bazis i dimenzija. Izomorfizam prostora jednake dimenzije nad istim poljem. Reprezentovanje.
3. Skalarni proizvod; ortonormirani skup; Bessel-ova i Schwarz-ova nejednakost; Fourier-ovi koeficijenti; Parseval-ova jednakost.
4. Potprostori; operacije sa potprostorima.
5. Projekcioni teorem. Gram-Schmidt-ov postupak i njegovo geometrijsko tumačenje.
6. Vektorski prostor i algebra operatora. Reprezentovanje operatora.
7. Defekt i rang operatora. Sylvester-ov zakon defekta.
8. Nesingularni i invertibilni operatori. Rang matrice.
9. Reprezentovanje i promena bazisa.
10. Linearni funkcionali; Riesz-Fréchet-ov teorem.
11. Adjungovani operator i osobine adjungovanja.
12. Klasifikacija operatora u odnosu na adjungovanje. Hermitski operatori.
13. Projektori, algebarsko i geometrijsko značenje.
14. Zbir projektora.
15. Proizvod projektora.
16. Razlika projektora.
17. Unitarni operatori.
18. Svaki linearni operator u kompleksnom vektorskom prostoru ima bar jednu svojstvenu vrednost i bar jedan odgovarajući svojstveni vektor.
19. Ako operatori A i B iz $\hat{L}(V, V)$ komutiraju, svojstveni potprostori jednog su invarijantni za drugi. Operatori A i B imaju bar jedan zajednički svojstveni vektor.
20. Za dati linearni operator A koji deluje na konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V postoji ortonormiran svojstveni bazis ako i samo ako je A normalan operator.
21. Svojstvena dekompozicija jedinice. Svojstveni projektor. Spektralna forma.
3. Ako je V realni vektorski prostor, onda svaki operator $A \in \hat{L}(V, V)$ ima bar jedan jednodimenzionalni ili dvodimenzionalni invarijantni potprostor.
4. Ortogonalni operatori: definicija i opšti oblik.
5. Za dati linearni operator A koji deluje na konačnodimenzionalnom euklidskom prostoru V postoji ortonormirani svojstveni bazis ako i samo ako je operator A simetričan.
6. Dualni prostor vektorskog prostora: definicija. Reprezentovanje linearnih funkcionala. Biortogonalni bazis.
7. Ako se sa starog bazisa u vektorskom prostoru V pređe na novi bazis matricom prelaska $\mathcal{T}$ kako se pri tom prelasku transformiše biortogonalni bazis?
8. Dualni prostor unitarnog prostora. Dualizam. Dualni bazis.
9. Polilinearni funkcional. Tenzor. Veza između polilinearnog funkcionala i tenzora.
10. Zbir, proizvod i kontrakcija tenzora.
11. Simetrični i antisimetrični tenzori. Simetrizacija i antisimetrizacija.
12. Direktan proizvod matrica: definicija i osnovne osobine.
13. Tenzorski proizvod vektorskih prostora $V \otimes V$. Generalizacija: tenzorski proizvod više različitih vektorskih prostora.
14. Veza između bilinearne forme na $V \otimes V$ i linearnog funkcionala na V . Generalizacija: veza između tenzora i vektora iz tenzorskog proizvoda prostora.
15. Tenzorski proizvod linearnih operatora. Tenzorski proizvod unitarnih prostora.
16. Simetrični i spoljašnji kvadrat vektorskih prostora. Generalizacija: Simetrični i spoljašnji m -ti stepen prostora.
17. Invarijante operatora: divergencija i rotor.
18. Diferencijabilno skalarno polje: gradijent i izvod u pravcu.
19. Diferencijabilno vektorsko polje: divergencija, rotor i izvod u pravcu.
20. Hamilton-ov operator ∇ : kompozicije Hamilton-ovog operatora i delovanje Hamilton-ovog operatora na proizvode polja.
21. Specijalni tipovi vektorskih polja. Potencijali.
22. Krivolinijske koordinate.

Druga grupa pitanja

1. Spektralna karakterizacija normalnih operatora.
2. Funkcije normalnih operatora.