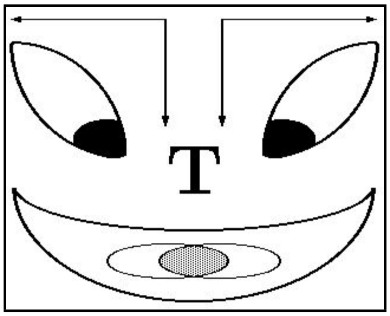
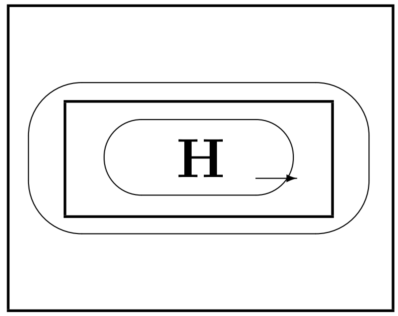
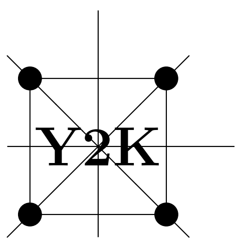
FIZIČKI FAKULTET

Univerzitet u Beogradu

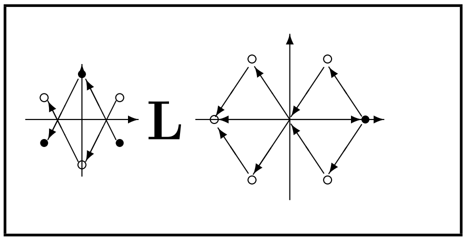


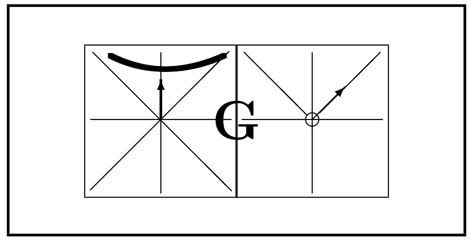


HILBERT-OVI PROSTORI I GRUPE



M. Damnjanović





Beograd, 2000. godine

PREDGOVOR

Ovaj deo predmeta Matematička fizika II prvi put sam predavao tokom 1985. godine. Izgledalo mi je razumljivo što slušaoci nisu najbolje pratili predavanja, i pored zainteresovanosti za pomalo mitologizovanu teoriju Lie-jevih grupa: kada se, po običaju, zanemare subjektivni činioci, preostaju objektivne poteškoće pri izvođenju kursa. Teorija je veoma obimna (preko hiljadu strana preciznog izlaganja), a još je u fazi razvoja pa nije sasvim strukturirana. Dalje, materija zahteva dosta predznanja, pre svega linearne algebre i, u predviđenom kontekstu, teorije konačnih grupa.

Bio sam uveren da će studenti, već rutinirani u neprekidnom učenju, uspeti da savladaju kurs na osnovu beležaka. Na ispitu sam bio neprijatno iznenađen[1]. Beleške su bile nepotpune, a pomoćna literatura neukusno neprijemčiva.

Tako je nastala ideja da se da doprinos pokušajima jasnog izlaganja ove materije na tridesetak strana (originalnost se ogleda u primeni srpskohrvatskog jezika[2] i uverenju da se ovakav poduhvat može ostvariti), a lični razlozi su učinili da se to sada realizuje. Osnovni deo posla je bio izbor gradiva; rukovodio sam se iskustvom i postojećim izborima u dodacima knjiga iz fizike. Nastojanja da se ta materija izloži jednostavno svodila su se na izbacivanje dokaza pojedinih teorema, zatim samih teorema i, konačno, nekih poglavlja (zasad ne svih !). Rezultat pretenduje da bude potpun, u smislu da je za njegovo razumevanje nužno samo predznanje koje (po definiciji) studenti imaju sa prethodnih kurseva, i da se ne sumnja u dokazivost izloženih stavova (što ni autoru nije uvek lako).

Za razliku od shvatanja u drugim oblastima, želja mi je da u sećanju studenata ostane pre svega tehnika rešavanja pojedinih problema. U tom smislu težište kursa je na samostalnoj izradi predviđenih zadataka, pre svega onih bez posebnih oznaka ($^\circ$ označava teorijske dopune, među kojima su i teži zadaci, $^\bullet$).

Delovi napisani sitnijim slovima se pri pripremi ispita mogu izostaviti.

V. Januar, 1989., M.D.

P.S. Prinuđen da otvorim novo poglavlje (Hilbert-ovi prostori i operatori) trudio sam se da održim stilsko jedinstvo. Zadatak je bio olakšan sličnim ograničenjima u detaljnosti izlaganja (tj. odnosom dozvoljenog prostora i obima materijala koji treba pokriti). Došlo je do izvesnih pomeranja i korekcija starih delova. Preostaje mi da poželim da jedini novi prostori na kojima će naši studenti ratovati budu Hilbert-ovi.

X. Novembar, 1991., M.D.

[1] Prirodno, to se ubrzo prenelo i na ispitivane.

[2] N. B. (20. Dec. 1995.) U međuvremenu se tekst spontano preveo na srpski jezik.

P.P.S. Više godina sam smatrao da tekst o konačnim grupama treba skratiti, i prilagoditi potrebama ostatka kursa i drugih predmeta. Koautor tog teksta, prof. Milan Vujičić je dosta dugo odsutan iz zemlje; shvatiši da ću prestati da držim kurs Matematičke fizike II, te ubrzo izgubiti stvarni motiv za ovakvom finalizacijom, odlučio sam da to konačno sam učinim. Drago mi je da ukažem na pomoć koju su mi svojim ispravkama i sugestijama pružili saradnici i studenti, pre svih M. Đurđević, I. Milošević, D. Stojković, T. Vuković, B. Nikolić, A. Balaž, V. Arsenijević i E. Dobardžić.

IV. Decembar, 1997., M.D.

Sadržaj

UVOD

Ubrzo po nastanku, početkom veka, kvantnoj teoriji su dotadašnji matematički okviri fizike postali preuski. John von Neumann (1903-1957) ju je 1927. nastanio u Hilbert-ov prostor. To je vektorski prostor, sa određenim topološkim karakteristikama koje dozvoljavaju rad i u beskonačnodimenzionalnom slučaju; jasno, on sadrži kvantnomehanička stanja realnog fizičkog sistema. Otklonivši neke tehničke probleme, Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984, Nobel-ova nagrada za fiziku 1933.) i Laurent Schwartz (1915, Fields-ova medalja 1950.) su nam unekoliko olakšali izlete u ove prostore.

Simetriji, staroj velikoj ideji i fizike i matematike, kvantna teorija je dala fundamentalno mesto u zamenu za neograničenu mogućnost korišćenja. Radikalno primenjujući matematičku pozadinu simetrije, teoriju grupa, Eugen Wigner (1902-1995, Nobel-ova nagrada za fiziku 1963.) je svrstao sebe među velikane fizike, simetrijske principe u temelje nauke, a teoriju grupa u vodeće discipline matematike. Različiti sistemi imaju različite simetrije, zahtevajući različite grupe za njihov opis. Za fiziku molekula značajne su pre svega konačne grupe. Polimeri, slojevi i kristali se opisuju beskonačnim, ali prebrojivim grupama, po mnogo čemu sličnim konačnim grupama. U fizici elementarnih čestica, ali i u drugim oblastima, potrebne su i neprekidne grupe, sa neprebrojivo mnogo elemenata. Dobar primer je skup realnih brojeva sa sabiranjem kao operacijom, ili, za fiziku već i arhetipska rotaciona grupa, koja predstavlja simetrije atoma vodonika. Sa algebarskog stanovišta i ovo su grupe, ali sa dodatnom, topološkom strukturom.

Formalizam kvantne teorije zahteva da se, kao i sve ostalo, i simetrije smeste u Hilbertov prostor, te one ulaze indirektno, ovlašćujući pogodne operatore da reprezentuju njihov iskustveni smisao. Tako je Eugen Wigner uočio da su za fiziku od prevashodnog značaja reprezentacije grupa, i to unitarnim operatorima. Upravo poslednji zahtev, proistekao iz prvih principa, pravi razliku u tretmanu različitih tipova grupa. Pogled unapred pokazuje da se unitarnost lako ispunjava kada je moguće usrednjavanje funkcija na grupi. Malo ohrabrenje fizičarima je pretežno pojavljivanje konačnih i kompaktnih grupa, za koje se usrednjavanje može izvršiti, čime sve reprezentacije postaju unitarne, a teorija relativno jednostavna. Ipak, nada da fizičari nisu baš "uvek na gubitku" brzo slabi kada se ispostavi da upravo najvažnija, Poincaré-ova grupa, insistira na svojoj nekompaktnosti.

Stoga se teorija reprezentacija neprekidnih grupa izučava na nešto drugačijim osnovama. Ovaj komplikovani zadatak rešava se, na tipično fizičarski način, radikalnim uprošćavanjem. Naime, postulira se glatkost, tj. višestruka (čak beskonačna) diferencijabilnost, svega što se uopšte može diferencirati, čime se izdvajaju tzv. Lie-jeve grupe. Pojavljuje se moćan aparat analize (podsećajući da ga je baš kao matematičko sredstvo fizike stvorio Isaac Newton, 1642-1727), koji, kao što su za sve nas pokazali Sofus Lie (1842-1899), Elia Cartan (1869-1951), Hermann Weyl (1885-1955) i mnogi drugi, rešava većinu problema. Skromna cena za ovaj dobitak je nužnost proučavanja teorije Lie-jevih algebri. To su izvedene, komplikovanije strukture, sa dve operacije, sa više zakona, ali samim tim i sa više mogućnosti za dedukciju. Danas je prilično uobičajeno da se prvo proučavaju algebre, pa tek onda grupe, što će u narednom tekstu biti usvojeno. Poslednji deo posvećen je primeni opštih rezultata na grupe koje su važne u fizici. Posebno mesto tu zauzima Poincaré-ova grupa, odnosno izlaganje rezultata koje su ne tako davno izveli naši savremenici, vodeći fizičari Eugen Wigner i Steven Weinberg (1933, Nobel-ova nagrada za fiziku 1979.).

Glava 1

TOPOLOŠKI PROSTORI I MNOGOSTRUKOSTI

Sve savremene fizičke teorije svoje zakone formulišu koristeći matematičku analizu: nekad je to eksplicitno, u različitim diferencijalnim jednačinama, nekad sakriveno u operatorima za koje se u konkretnim primerima ispostavi da su diferencijalni. U svom standardnom, dobro poznatom obliku, aparat analize se razvija u konačnodimenzionalnim realnim vektorskim prostorima, što nije dovoljno za opis obilja fizičkih problema. Stoga mu je nužno proširiti oblast primene, a prvi korak u tome je uočavanje onih osobina $\mathbb{R}^n$ koje su suštinske za razvoj ideja analize. U tom smislu su najdalji srodnici prostora $\mathbb{R}^n$ topološki prostori: uvode se rudimentarni pojmovi analize (npr. okoline tačaka ili granične tačke), no njihov sadržaj je često udaljen od onog očekivanog na osnovu intuicije školovane na $\mathbb{R}^n$. Metrički prostori su nešto bliži $\mathbb{R}^n$ u istom smislu. Tek mnogostrukosti dozvoljavaju potpunu upotrebu aparata analize, te daju okvir za zasnivanje fizičkih teorija.

1.1 TOPOLOŠKI PROSTORI

Ekstrakcijom bitnih postavki analize, ubrzo se dolazi do pojmova okoline tačke i konvergencije. Njihova najopštija formulacija se daje u topološkim prostorima. Stoga je topologija, disciplina koja ih proučava, postala jedna od osnovnih oblasti matematike: direktno se nastavlja na teoriju skupova, a ugrađena je u većinu drugih matematičkih teorija. Danas je već sasvim jasno da je upoznavanje sa elementima topologije nezaobilazno u teorijskoj fizici.

1.1.1 Struktura topološkog prostora

Budući jedna od osnovnih matematičkih struktura, topološki prostor se uvodi na osnovu elementarne teorije skupova.

Definicija 1.1 Topološki prostor *je uređeni par* $(X, \mathcal{T})$ *skupa* X *i podskupa* $\mathcal{T}$ *partitivnog skupa skupa* X *sa osobinama:*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(ii) *svaka unija skupova iz* $\mathcal{T}$ *je skup iz* $\mathcal{T}$;

(iii) *presek konačno mnogo skupova iz $\mathcal{T}$ je skup iz $\mathcal{T}$.*

Elementi skupa X se nazivaju *tačke*, elementi skupa $\mathcal{T}$ *otvoreni skupovi*, a komplementi otvorenih skupova su tzv. *zatvoreni skupovi*. Neki podskupovi u X mogu biti i otvoreni i zatvoreni (kao što su $\emptyset$ i X), ili ni jedno ni drugo. *Pokrivač* skupa X je skup podskupova u X, takav da njihova unija daje ceo skup X; pokrivač se naziva *otvorenim* ako se sastoji iz otvorenih podskupova.

Na istom skupu se mogu zadati različite topologije, što znači da struktura topološkog prostora nije određena samim skupom X, već se posebno uvodi, u zavisnosti od osobina koje prostor treba da ima. Uspostavljanje topološke strukture eksplicitnim nabrajanjem svih otvorenih skupova je moguće samo u krajnje jednostavnim primerima. Umesto toga, koristi se *predbaza*: to je svaki podskup skupa $\mathcal{T}$ iz koga se dozvoljenim operacijama (proizvoljne unije preseka konačno mnogo podskupova) može dobiti svaki neprazan otvoreni skup, i time rekonstruisati $\mathcal{T}$. Svaki pokrivač skupa X je predbaza neke topologije. Kaže se da je topologija $\mathcal{T}$ *finija* od topologije $\mathcal{T}'$ na istom skupu, ako je $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.

Zadatak 1.1: Na skupu $X = \{a, b, c\}$ odrediti sve moguće topologije.

Podstruktura se uvodi na prirodan način:

Definicija 1.2 *$(X', \mathcal{T}')$ je topološki* potprostor *prostora $(X, \mathcal{T})$ ako je X' podskup u X, a otvoreni skupovi iz $\mathcal{T}'$ su preseci otvorenih skupova iz $\mathcal{T}$ i X'.*

Otvoreni skupovi su osnov za određenje pojma susedstva, okoline, što konačno omogućuje razvijanje ideje bliskih tačaka u $\mathbb{R}^n$. *Okolina* O_x tačke x je svaki podskup skupa X koji sadrži otvoren skup kome pripada x. *Kvaziokolina* tačke x je okolina te tačke iz koje je izuzeta sama tačka x.

Neprekidna preslikavanja se pojavljuju kao morfizmi topoloških prostora.

Definicija 1.3 *Preslikavanje ψ topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ u prostor $(X', \mathcal{T}')$ je* neprekidno *ako je za svaki otvoreni skup $T' \subset X'$ i skup $\psi^{-1}(T') \subset X$ otvoren.* Homeomorfizam (topološki izomorfizam) *dva topološka prostora je preslikavanje ψ koje je obostrano jednoznačno, neprekidno i ψ^{-1} je neprekidno.*

Povezujući otvorene skupove, neprekidna preslikavanja u svoju definiciju uključuju okoline tačaka: okolina lika je lik okoline originala; u $\mathbb{R}^n$ se to pojavljuje kao uobičajeni $\varepsilon - \delta$ koncept neprekidnosti [A1]. U ovom kontekstu se često pojavljuje i problem kako odabrati topologiju na skupu Y da preslikavanje f topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_X)$ na Y bude neprekidno. Ovakva topologija postoji, i u opštem slučaju nije jedinstvena. No, jednoznačno je određena najfinija među takvim topologijama, tzv. *faktor topologija*, u kojoj je otvoreni skup svaki skup $U \subset Y$ za koji je $f^{-1}(U)$ otvoren (očigledno je u pitanju topologija, jer je inverzna slika unije ili preseka podskupova jednaka uniji, odnosno preseku, inverznih slika podskupova). Kao i svaki izomorfizam, homeomorfizam uspostavlja relaciju ekvivalencije u skupu topoloških prostora. Osobine prostora koje se održavaju pri homeomorfnim preslikavanjima nazivaju se *topološke invarijante*.

Zadatak 1.2: Odrediti koji su od prostora iz zadatka 1.1 međusobno homeomorfni. Neka je $X' = \{a, b\} \subset X = \{a, b, c\}$. Za svaku topologiju iz zadatka 1.1 odrediti topologiju na X' tako da je X' potprostor. Proveriti da li je *kanonična injekcija* $i : X' \hookrightarrow X$ definisana sa $i(x) = x$ neprekidna.

Zadatak 1.3:° Pokazati da je preslikavanje $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ neprekidno ako i samo ako je za svaki zatvoreni skup skup $C' \subset X'$ i $f^{-1}(C') \subset X$ zatvoren.

Zadatak 1.4: Na realnoj osi otvoreni intervali čine predbazu *standardne* topologije. Kakvi su skupovi: (a, b), (a, ∞), $[a, b]$, $\{a\}$, $(a, b]$. Uporediti $\epsilon - \delta$ definiciju neprekidnosti sa definicijom 1.3.

Definicija 1.4 Direktni proizvod *topoloških prostora* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(X', \mathcal{T}')$ *je skup* $X \times X'$ *sa topologijom čija je predbaza* $\{T \times T' \mid T \in \mathcal{T}, T' \in \mathcal{T}'\}$.

1.1.2 Granične tačke i zatvarač

Okoline tačaka omogućavaju nov pogled na topologiju: iz svih mogućih podskupova koji sadrže neku tačku, topologija izdvaja otvorene okoline; time se u specifičnom smislu određuje odnos tačaka prema nekom podskupu (leme 1.1, 1.2), što sa svoje strane daje ekvivalentni opis topologije preko novog pojma, konvergencije.

Definicija 1.5 Granična tačka *podskupa* A *topološkog prostora je svaka tačka* $x \in X$ *čija svaka kvaziokolina sadrži neku tačku iz* A. Zatvarač $\overline{A}$ *podskupa* A *je presek svih zatvorenih skupova koji sadrže* A. *Skup* A *je* gust *u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$ *ako je* $\overline{A} = X$.

Zadatak 1.5: Na skupu $X = \{a, b, c\}$ je zadata topologija $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$. Odrediti okoline i kvaziokoline svih elemenata. Na osnovu toga za sve podskupove u X naći granične tačke i zatvarač i ispitati da li su gusti.

Jedna značajna karakterizacija otvorenih i zatvorenih skupova, vezana za intuitivni nastanak ovih pojmova, dobija se preko okolina:

Lema 1.1 *Podskup* A *topološkog prostora* $(X, \mathcal{T})$ *je:*

(i) *otvoren ako i samo ako sadrži bar jednu okolinu svake svoje tačke.*

(ii) *zatvoren ako i samo ako sadrži sve tačke koje nemaju okoline disjunktne sa* A.

▬*Dokaz:* (i) Neka je T unija svih otvorenih podskupova u A. Sledi da je T podskup u A, i to otvoren. Ako A sadrži okolinu svake svoje tačke x, tada je x iz T, tj. $A = T$. U obrnutom smeru je iskaz očigledan, jer ako je A otvoren, on je jedna okolina svake svoje tačke.
(ii) Skup A je zatvoren ako i samo ako je $B = X \backslash A$ otvoren. B sadrži neku okolinu svake svoje tačke, i ona je disjunktna sa A. Prema tome, ako i samo ako svaka okolina neke tačke ima neprazan presek sa A, tačka pripada skupu $X \backslash B = A$. ∎

Treba istaći da granična tačka skupa ne mora nužno da bude iz skupa. Tako je npr. u gruboj topologiji $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ svaka tačka prostora X granična tačka svakog podskupa $A \subset X$. U stvari, samo zatvoreni skupovi sadrže sve svoje granične tačke, o čemu govori

Lema 1.2 **(i)** *Podskup topološkog prostora je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje granične tačke.*

(ii) *Unija podskupa i svih njegovih graničnih tačaka je zatvoren skup, i to baš zatvarač podskupa.*

Dokaz: (i) Neka je $T_x^o = T_x \backslash \{x\}$. Skup A sadrži svaku svoju graničnu tačku ako i samo ako $\forall T_x^o\ T_x^o \cap A \neq \emptyset$ povlači $x \in A$, a ovo je ekvivalentno iskazu da svaka okolina tačaka iz A ima neprazan presek sa A.
(ii) Prvo treba pokazati da je navedena unija zatvoren skup, tj. da je komplement ove unije otvoren. Neka je $x \in X$ iz navedenog komplementa. Tada postoji otvorena okolina T_x tačke x koja je disjunktna sa A. Pri tome nijedna tačka ove okoline nije granična za A, jer bi inače ta okolina morala da sadrži i neku tačku iz A. Unija svih ovakvih okolina je otvorena, te je i ceo komplement otvoren. Sada je preostalo da se dokaže da se prisajedinjenjem graničnih tačaka dobija upravo zatvarač. Ako je x granična tačka za A, onda je ona i granična tačka za svaki nadskup skupa A, te pripada svakom zatvorenom nadskupu od A, stoga i zatvaraču $\overline{A}$. Obrnuto, pošto je već dokazano da je pomenuta unija zatvoreni skup, ona je i nadskup zatvarača, te mu je jednaka. ∎

Lema 1.2 pokazuje da se topologija na skupu može uvesti nekim pravilom —*konvergencija* — koje svakom podskupu pridružuje sve njegove granične tačke: konvergencija određuje sve zatvorene, samim tim i otvorene skupove, pa je ekvivalentna zadavanju topologije.

Zadatak 1.6:° Pokazati da je skup racionalnih brojeva gust u $\mathbb{R}$.

1.1.3 Klasifikacija topoloških prostora

Topološki prostori su matematičke strukture nastale uopštavanjem osobina iskustvenih prostora $\mathbb{R}^n$ i njihovih podskupova. Zato su najvažniji primeri topoloških prostora vektorski prostori $\mathbb{R}^n$, sa topologijom čija je predbaza skup svih otvorenih lopti u $\mathbb{R}^n$. Na primer, *standardna topologija* u $\mathbb{R}$ je određena predbazom čiji su elementi otvoreni intervali; slično, predbaza standardne topologije u $\mathbb{R}^3$ su otvorene lopte (bez graničnih sfera). Za ovu topologiju pojam neprekidnosti se poklapa sa uobičajenim pojmom u analizi. Ubuduće će pod $\mathbb{R}^n$ biti podrazumevan upravo ovaj topološki prostor.

Neke od poznatih osobina podskupova u $\mathbb{R}^n$ ne slede iz definicije 1.1, pa se dodatno uvode. Ovde će biti razmotrene osobine povezanosti, različivosti, separabilnosti i kompaktnosti, jer su važne u teoriji Hilbert-ovih prostora i Lie-jevih grupa. Osobina povezanosti bazira na uobičajenoj predstavi o skupovima u $\mathbb{R}^3$ koji se sastoje od jednog ili više odvojenih delova, komponenti. Različivost je uopštenje ideje razlikovanja dve tačke u $\mathbb{R}^3$, u smislu mogućnosti da se svaka od njih okruži malom loptom tako da se ove lopte ne seku. Separabilnost omogućava karakterizaciju celog prostora preko podskupa sa prebrojivo mnogo elemenata (npr. linearne kombinacije bazisa sa racionalnim koeficijentima u vektorskom prostoru). Kompaktnost je generalizacija osobine nekih skupova u $\mathbb{R}^3$ da su ograničeni na neki konačni deo celog prostora i da imaju jasno izraženu granicu.

Definicija 1.6 *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *je:*

(i) povezan *ako nije disjunktna unija dva neprazna otvorena podskupa, a maksimalni povezani potprostor* X_x *koji sadrži tačku* $x \in X$ *naziva se* komponenta *tačke* x*;*

(ii) putno povezan *ako za sve parove tačaka* x *i* y *iz* X *postoji put* γ *iz* x *u* y*, gde je (neprekidni)* put *ili* kriva *iz* x *u* y *neprekidno preslikavanje* γ *intervala* $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *u* X *takvo da je* $\gamma(0) = x$ *i* $\gamma(1) = y$*;*

(iii) Hausdorff-ov *(ili T_2-različiv) ako svake dve tačke imaju disjunktne okoline*[1]*;*

(iv) separabilan *ako u njemu postoji prebrojiv gust podskup;*

(v) kompaktan *ako svaki otvoren pokrivač sadrži konačan potpokrivač*[2]*.*

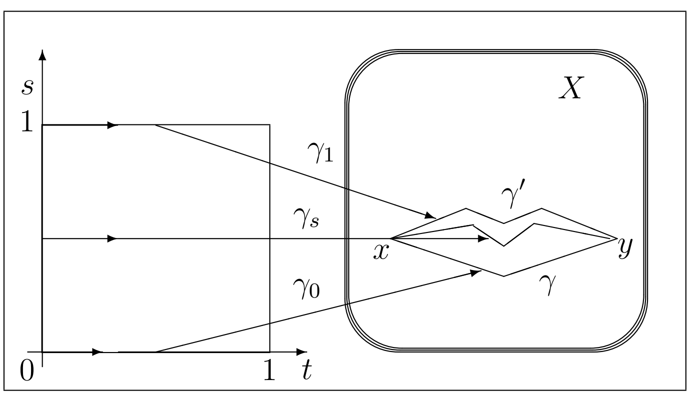
Povezanost i putna povezanost nisu u opštem slučaju ekvivalentne osobine; pokazuje se da iz druge sledi prva, ali ne i obrnuto.

Zadatak 1.7: Proveriti osobine prostora iz zadatka 1.1.

Kod putno povezanih prostora može se definisati jedna grupa, vezana za *petlje*, tj. zatvorene puteve iz x u x. γ je nulta petlja iz x ako je $\gamma(t) = x$ za $t \in [0, 1]$. Ako su γ i γ' dve petlje iz x, njihova kompozicija, petlja $\gamma' * \gamma$, je sukcesivni obilazak γ i γ':

$$(\gamma' * \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma'(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Dva puta γ i γ' iz x u y su *homotopna* ako postoji neprekidna deformacija kojom se jedan preslikava u drugi (precizno, postoji neprekidno preslikavanje h kvadrata $[0, 1] \times [0, 1]$ u X takvo da je $h(0, t) = \gamma(t)$ i $h(1, t) = \gamma'(t)$; tako se intuitivan pojam neprekidne deformacije γ u γ' vidi kao postojanje neprekidne familije međupoložaja γ_s, $s \in [0, 1]$, između x i y, nastalih pri "prevlačenju", deformisanju puta γ u γ', slika 1.1). Homotopija je relacija ekvivalencije među putevima između istih tačaka: klase homotopije su međusobno homotopni putevi. Pokazuje se da je skup klasa homotopije petlji u nekoj tački grupa u odnosu na kompoziciju indukovanu kompozicijom petlji. Kod putno povezanih prostora ova grupa je ista u svakoj tački: ako je γ petlja u x, a γ_{xy} put iz x u y, $\gamma_{xy} * \gamma * \gamma_{yx}$ je petlja u y, i postoji bijektivna veza među petljama u različitim tačkama. Stoga je ona karakteristika samog prostora i naziva se *fundamentalna grupa*, $\pi_1(X)$. Kaže se da je prostor *prosto povezan* ako je ova grupa jednočlana, odnosno π_1-povezan u opštem slučaju.



Slika 1.1: **Homotopni putevi.**

Različivost, separabilnost, povezanost, putna povezanost, fundamentalna grupa i kompaktnost spadaju u topološke invarijante. Pokazuje se da je direktni proizvod topoloških prostora povezan, prosto povezan, kompaktan ako i samo ako su i faktor prostori takvi.

[1]Često se i za ovaj pojam koristi termin separabilnost, koji u ovom tekstu ima drugo značenje.
[2]Ponekad se ovo svojstvo naziva i bikompaktnost.

1.2 METRIČKI PROSTORI

Za precizno izražavanje bilo kakvih razmišljanja, znači u fizici, neophodno je uvesti kvantifikaciju veličina. Najjednostavniji primer je rastojanje u $\mathbb{R}^3$. Već uvedeni topološki pojmovi se u $\mathbb{R}^3$ lako izražavaju, jer predbazu standardne topologije čine otvorene lopte (uopštenja otvorenih intervala iz $\mathbb{R}$), a za njihovu definiciju se koristi upravo rastojanje među tačkama. Daljom generalizacijom se dobija pojam metrike, neophodan za uspostavljanje veze konvergencije (time i topologije) u dosadašnjem smislu sa onim iz realne analize.

Definicija 1.7 *Metrički prostor je par (X, d) skupa X i nenegativne funkcije (metrika) na skupu $X \times X$, sa sledećim osobinama:*

(i) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ za sve x, y iz X (simetričnost);

(iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ za sve x, y, z iz X (nejednakost trougla).

Otvorena lopta radijusa r sa centrom u x je podskup $B(x, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X | d(x, y) < r\}$. Ako se skup svih otvorenih lopti metričkog prostora uzme za predbazu, dobija se tzv. *metrička topologija*. U odnosu na nju, zatvorene lopte (u definiciji otvorene lopte se znak $<$ zameni sa $\leq$) postaju zatvoreni skupovi.

Poseban značaj metričkih prostora se ogleda u mogućnosti da se pojam konvergencije nizova formuliše kao u $\mathbb{R}^n$, preko brojnih nizova u $\mathbb{R}$.

Definicija 1.8 *Niz $\{x_n\} = \{x_1, x_2, ...\}$ elemenata metričkog prostora (X, d) konvergira ka tački $x \in X$, $\{x_n\} \to x$ ili $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, ako niz realnih brojeva $\{d(x_n, x)\}$ konvergira ka 0. Niz $\{x_n\}$ se naziva fundamentalan (Cauchy-jev) ako za svako $\epsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je za sve prirodne brojeve $n, m > n_0$ ispunjeno $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Metrički prostor je potpun ako je svaki fundamentalni niz konvergentan.*

U odnosu na metričku topologiju skup limesa konvergentnih nizova iz $A \subset X$ se poklapa sa zatvaračem skupa A: svaka tačka x iz A je limes konstantnog niza $x_n = x$, a tačka x iz $\overline{A} \backslash A$ se može dobiti kao limes niza $\{x_n\}$ iz A (npr. $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ postoji po definiciji 1.5, a konvergira ka x u smislu definicije 1.8). To znači da je zatvoren skup onaj koji sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova. Lako je proveriti da je svaki konvergentni niz fundamentalan, te potpunost prostora omogućuje izjednačavanje pojmova konvergencije i fundamentalnosti nizova; ovo je važno jer konvergencija operiše sa već poznatom graničnom tačkom niza, a njeno nalaženje često predstavlja tehnički problem.

U istom prostoru se može naći više različitih metrika, koje indukuju svoje topologije i konvergencije; ako je potrebno takvi pojmovi biće razlikovani dodavanjem oznake metrike: d-konvergencija, $\xrightarrow{d}$, d-potpunost, itd.

Zadatak 1.8: U vektorskom prostoru $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ je zadat skalarni proizvod. Pokazati da je rastojanje $d_2(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x - y\|$ jedna metrika u $\mathcal{H}$. Da li je $\mathbb{F}^n$ sa standardnim skalarnim proizvodom d_2-potpun?

Zadatak 1.9: $C_0^\infty(\mathbb{R})$ je skup svih beskonačno diferencijabilnih kompleksnih (ili realnih) funkcija realnog argumenta, koje su samo unutar nekog konačnog intervala nenulte (nekad ista oznaka podrazumeva i određenu topologiju, što ovde nije slučaj). Pokazati da je ovaj skup vektorski prostor. U tom prostoru je zadat jedan skalarni proizvod izrazom $(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f^* g \, \mathrm{d}t$. Pokazati da prostor nije d_2-potpun (zadatak 1.8). (Uputstvo: razmotriti niz $k_n(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{n-1}{n} \\ a_n(|t|), & \frac{n-1}{n} < |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases}$, gde je $a_n(t) = (1 + e^{\frac{n}{n-1-nt} - \frac{2}{t^2-1}})^{-1}$.) Pokazati da je $d_\infty(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|x(t) - y(t)| | t \in \mathbb{R}\}$ druga metrika u istom prostoru. Da li je $C_0^\infty(\mathbb{R})$ d_∞-potpun? Napisati eksplicitno uslove konvergencije za obe metrike.

1.3 MNOGOSTRUKOSTI

Realni vektorski prostori su strukture na kojima je razvijen aparat analize, u ovom trenutku verovatno najvažnije matematičko oruđe fizike. Međutim, ispostavilo se da različiti fizički sistemi ne dozvoljavaju opis u terminima vektorskih prostora (npr. konfiguracioni prostori različitih prostih sistema ne moraju biti linearni: konfiguracioni prostor dvostrukog klatna je torus), mada zadržavaju neophodnost diferencijalnog računa. Tako je došlo do uopštavanja pojma vektorskog prostora.

1.3.1 Struktura mnogostrukosti

Definicija 1.9 *Hausdorff-ov topološki prostor $(M, \mathcal{T})$ je n-dimenzionalna glatka* mnogostrukost *ako*

(i) *postoji* atlas *skupa M, tj. skup uređenih parova (*karte*) $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ skupova U_α, koji obrazuju otvoreni pokrivač skupa M, i homeomorfizama ψ_α sa U_α u $\mathbb{R}^n$;*

(ii) *atlas je gladak: za svaka dva nedisjunktna skupa U_α i U_β, realna funkcija realnih promenljivih $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ je beskonačno diferencijabilna na $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.*

Drugim rečima, u okolini svake tačke mnogostrukost izgleda kao prostor $\mathbb{R}^n$, a sve okoline su glatko spojene (sl. 1.2). Svaka karta (U_α, ψ_α) uvodi sistem koordinata na U_α, tako što tački m iz U_α pridružuje koordinate njenog lika $\psi_\alpha(m)$ iz $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 1.10: Može li kompaktna mnogostrukost imati atlas sa samo jednom kartom?

Zadatak 1.11: Uvesti strukturu mnogostrukosti na kružnicu S^1.

Zadatak 1.12: Pokazati da su $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$ mnogostrukosti.

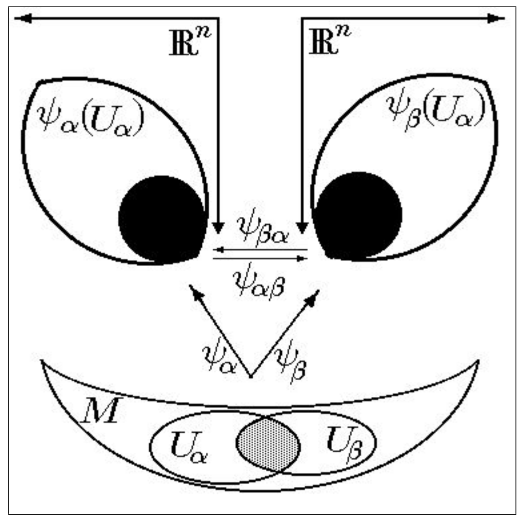
Lokalno predstavljanje mnogostrukosti u $\mathbb{R}^n$ omogućuje prenošenje aparata analize na njih. Osnovna ideja je uvođenje pojma glatkosti za funkcije među mnogostrukostima, što se obično čini u dva koraka.

Definicija 1.10 *Preslikavanje $f : M \to \mathbb{R}$ je glatko u tački $m \in U_\alpha \subset M$, ako je realna funkcija realnih promenljivih $f_\alpha = f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ beskonačno diferencijabilna u $\psi_\alpha(m)$. Preslikavanje $f : M \to \mathbb{R}$ je glatko na M, ako je glatko u svakoj tački m iz M.*

Skup preslikavanja iz M u $\mathbb{R}$ glatkih u tački $m \in M$ se označava sa $C^\infty_m(M)$, a algebra glatkih funkcija (operacije su proizvod i linearne kombinacije) na M sa $C^\infty(M)$. U drugoj etapi se ista ideja uopštava:

Definicija 1.11 *Preslikavanje $F : M \to N$ mnogostrukosti M na mnogostrukost N je glatko ako je za svako $f \in C^\infty(N)$ preslikavanje $f \circ F : M \to \mathbb{R}$ iz $C^\infty(M)$. Obostrano glatka bijekcija F se naziva* difeomorfizam *(ili* izomorfizam *mnogostrukosti M i N.*

Difeomorfizam je relacija ekvivalencije među mnogostrukostima. U tom smislu se dve difeomorfne mnogostrukosti smatraju jednakima. Na istom topološkom prostoru se mogu zadati različiti atlasi, i time dobiti različite mnogostrukosti. Ukoliko je identično preslikavanje skupa M na sebe difeomorfizam u odnosu na različite atlase $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, smatra se da je u pitanju ista mnogostrukost, te se pod atlasom mnogostrukosti zapravo podrazumeva skup svih mogućih atlasa difeomorfno povezanih identičnim preslikavanjem. Odmah je jasno da je pojam karte drastično proširen, tj. karta iz bilo kog atlasa postaje karta ovako shvaćene mnogostrukosti. Skup takvih karata daje maksimalni atlas, tzv. *glatku strukturu* na M.



Slika 1.2: **Karte na mnogostrukosti.**

Pokazuje se da je svaku mnogostrukost moguće difeomorfno preslikati u neku hiperpovrš realnog prostora dovoljno velike dimenzije. To omogućava da se pojmovi uvedeni unutrašnje, u terminima same mnogostrukosti, uporede sa odomaćenim geometrijskim predstavama iz euklidskih prostora. Na primer, u $\mathbb{R}^n$ skup je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen, a povezanost i putna povezanost su ekvivalentni.

Prilikom razmatranja fizičkih problema često se relevantna mnogostrukost može na određeni način faktorisati, tj. shvatiti kao proizvod više mnogostrukosti (npr. kada se razmatra konfiguracioni ili fazni prostor složenog sistema). Ne ulazeći u opštiju konstrukciju *raslojenih prostora*, takođe neizbežnih u fizici, biće razmotren samo najjednostavniji slučaj.

Definicija 1.12 Direktni proizvod *mnogostrukosti M i N (dimenzija n_M i n_N) sa atlasima $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ je mnogostrukost $M \times N$ dimenzije $n_M + n_N$ sa atlasom $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \psi_\alpha \times \varphi_\beta)\}$.*

Ovde je atlas direktni proizvod atlasa faktor mnogostrukosti, pri čemu su preslikavanja karata $\psi_\alpha \times \varphi_\beta : M \times N \to \mathbb{R}^{n_M + n_N}$ su $(\psi_\alpha \times \varphi_\beta)(m,n) = (\psi_\alpha(m), \varphi_\beta(n)))$.

Za proizvod povezanih mnogostrukosti se dokazuje

Lema 1.3 *Ako su M i N povezane mnogostrukosti, onda je $\pi_1(M \times N) = \pi_1(M) \times \pi_1(N)$.*

Zadatak 1.13: Pokazati da je torus difeomorfan proizvodu $S^1 \times S^1$.

Zadatak 1.14:• Dokazati lemu 1.3.

1.3.2 Tangentni prostor

Definicija 1.13 Glatka kriva *je preslikavanje* $\gamma : [0,1] \to M$ *koje može biti prošireno do glatkog preslikavanja nekog otvorenog intervala u* M*.*

To znači da za neko $\varepsilon > 0$ postoji preslikavanje $\gamma : [-\varepsilon, 1+\varepsilon] \to M$ koje je glatko: naime, za svaku tačku $t \in [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ se može naći neko $\delta > 0$, tako da deo krive $\gamma((t-\delta, t+\delta))$ bude u jednoj karti U_α mnogostrukosti; glatkost znači da je preslikavanje $\psi_\alpha \circ \gamma : (t-\delta, t+\delta) \to \psi_\alpha(U_\alpha)$ (iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^n$) beskonačno diferencijabilno za svaku tačku intervala.

Definicija 1.14 Tangentni vektor *na krivu* γ *u tački* $m = \gamma(t_m)$ $(t_m \in [0,1])$ *je preslikavanje* $\gamma_*(t_m) : C^\infty_m(M) \to \mathbb{R}$ *dato sa* $\gamma_*(t_m)f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=t_m}$ *za svako* $f \in C^\infty_m(M)$*.*

Posebno, kada je M neka hiperpovrš u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$, uobičajena predstava tangentnog vektora koordinatno ("parametarski") zadate krive $\gamma(t) = \mathbf{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ u tački $m = \mathbf{x}(t_m)$ je vektor $\mathbf{x}_{\gamma(t_m)} = (\frac{dx^1(t_m)}{dt}, \ldots, \frac{dx^n(t_m)}{dt})$. Diferencijalno-geometrijska definicija 1.14 isti pojam uvodi kao preslikavanje iz $C^\infty_m(M)$ u $\mathbb{R}$:

$$\gamma_*(t_m)f = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} f|_{\mathbf{x}=\gamma(t_m)}, \tag{1.1}$$

tj. kao izvod u pravcu tangente na krivu $\gamma(t)$.

$\gamma_*(t_m)$ je očigledno linearno preslikavanje (uz prirodnu definiciju linearnih kombinacija funkcija iz $C^\infty_m(M)$), a zadovoljava i Leibnitz-ovo pravilo, te je u pitanju *diferenciranje* u $C^\infty_m(M)$. Mada je (1.1) izvedena za funkcije iz $\mathbb{R}^n$, ona obuhvata i opšti slučaj mnogostrukosti: na karti (U_α, ψ_α), kojoj pripada $\gamma(t_m)$, kriva γ određuje krivu $\gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \psi_\alpha \circ \gamma$ u $\psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, a funkcija f realnu funkciju realnih promenljivih f_α (iz definicije 1.10), i (1.1) važi za njih; no, tada je $\gamma_{\alpha*}(t_m)f_\alpha = \frac{d}{dt}(f \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \gamma)|_{t=t_m} = \gamma_*(t_m)f$, što znači da se (1.1) odnosi i na proizvoljnu mnogostrukost, pri čemu su x^i koordinate na razmatranoj karti. Konceptualni značaj ovog zaključka leži u mogućnosti da se u (1.1) $\gamma_*(t_m)$ shvati kao linearna kombinacija vektora *koordinatnog bazisa* $\partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i}$: $\gamma_*(t_m) = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt}\partial_i|_{t_m}$. Postaje očigledno da za različite krive kroz tačku m, tangentni vektori čine vektorski n-dimenzionalni *tangentni prostor*, $T_m(M)$. U terminima obične geometrije, to je hiperravan tangenti na mnogostrukost u tački m. Ako se za apsolutni bazis u $\mathbb{R}^n$ uzme koordinatni bazis $\partial_i|_{t_m}$, tj. tangentni vektori na koordinatne linije, uspostavlja se potpuna korespondencija intuitivne slike tangentnog prostora i tangentnih vektora, sa diferencijalno-geometrijskom definicijom.

Zadatak 1.15: Za skup matrica $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, pokazati da čine mnogostrukost u $\mathbb{R}^4$ (prostor svih matrica $\mathbb{R}^{22}$), i odrediti tangentni prostor u jediničnoj matrici.

Treba zapaziti da različite krive kroz m mogu imati iste tangentne vektore, tj. da je korespondencija krivih i tangentnih vektora jednoznačna samo u jednom smeru. Očigledno je, međutim, da za svaki vektor $X_m \in T_m(M)$ postoji bar jedna kriva γ kroz m, za koju je X_m tangentni vektor: $X_m = \sum_i q^i\partial_i$ je tangentni vektor krive $\gamma(t) = \psi_\alpha^{-1}(tq^1 + m^1, \ldots, tq^n + m^n)$ (za $t = 0$), pri čemu su m^i koordinate tačke $\psi_\alpha(m)$. U istom kontekstu se i različite parametrizacije iste (u običnom geometrijskom smislu) krive moraju smatrati različitim, sa različitim, mada kolinearnim, tangentnim vektorima: ako je $s = s(t)$ realna funkcija na $[0, 1]$, onda je $\gamma_*(t_m) = \frac{ds}{dt}\gamma_*(s(t_m))$.

Glava 2

HILBERT-OVI PROSTORI I OPERATORI

Fizički sistemi se opisuju nekim skupom stanja, i najčešće je to vektorski prostor. Različite fizičke veličine, kao i promene stanja opisuju se operatorima u takvim prostorima.

2.1 HILBERT-OVI PROSTORI I RASPODELE

Za fiziku su najvažniji prostori realnih ili kompleksnih funkcija definisanih na nekom podskupu u $\mathbb{R}^n$ (ređe u $\mathbb{C}^n$). Konačno-dimenzionalni primeri su prostori polinoma P_k stepena manjeg od k, sa skalarnim proizvodom $\int_a^b f^*(t)g(t)\rho(t)\,\mathrm{d}t$ (gde je $\rho(t)$ pozitivna neprekidna funkcija na $[a,b]$; u slučaju realnih polinoma nema konjugacije).

Jasno, od svojih poklonika fizika očekuje znatno više. Polinomi određenog stepena, ili slične simplifikacije, nedovoljan su okvir za postavku različitih problema, obično izraženih preko neprijatno brojnih i komplikovanih diferencijalnih jednačina klasične ili kvantne teorije. Kao rezultat fizičkih zahteva, pojavljuju se separabilni Hilbert-ovi prostori. Međusobno su izomorfni (ako su iste dimenzije). Za konačno-dimenzionalne slučajeve je stoga dovoljno proučiti prostore brojnih kolona, dok se prostor brojnih nizova (odnosno beskonačnih kolona) pojavljuje kao predstavnik klase beskonačno-dimenzionalnih prostora. Za konstrukciju najčešće potrebnog beskonačno-dimenzionalnog prostora, Lebesgue-ovog, pojam funkcije se mora generalisati, čime se dobijaju raspodele. One i same nalaze svoje mesto u fizičkim problemima.

2.1.1 Hilbert-ovi prostori

Već je pokazano (zadatak 1.8) da su vektorski prostori sa skalarnim proizvodom jedna klasa metričkih prostora, sa rastojanjem $d_2(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x-y\|$ kao metrikom. Takvi prostori ne moraju biti potpuni (zadatak 1.9), niti metrička topologija a priori obezbeđuje svojstvo separabilnosti.

Definicija 2.1 Hilbert-ov prostor *nad poljem $\mathbb{F}$, $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ je vektorski prostor (nad poljem $\mathbb{F}$) sa skalarnim proizvodom, potpun u odnosu na metriku d_2.*

Zadatak 2.1: Da li je $C_0^\infty(\mathbb{R})$ Hilbert-ov prostor? A prostor $\mathcal{L}_c^2([-1,1])$ neprekidnih funkcija na intervalu $[-1,1]$, sa skalarnim proizvodom $(f,g)=\int_{-1}^1 f^*(t)g(t)\,\mathrm{d}t$?

Zadatak 2.2: • l^2 je skup realnih (ili kompleksnih) nizova $x=\{\xi_n\}$ za koje je $\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^2<\infty$, u kome je definisan skalarni proizvod sa $(x,y)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^\infty \xi_i^*\eta_i$. Pokazati da je l^2 Hilbert-ov prostor.

Potpunost znači da svaki Cauchy-jev niz u odnosu na normu definisanu skalarnim proizvodom konvergira elementu iz $\mathcal{H}$. Međutim u prostoru sa skalarnim proizvodom može se definisati još jedan tip konvergencije, tzv. *slaba konvergencija*, $\xrightarrow{w}$ (za razliku od obične, tzv. jake): niz $\{x_n\}$ slabo konvergira ka vektoru x ako za svako $y\in\mathcal{H}$ brojni niz $\{(x_n,y)\}$ konvergira ka (x,y). Definicije konvergencija i potpunosti, uz oznake vezane za vektorske prostore postaju:

$$\{x_n\}\to x: \qquad \|x_n-x\|\to 0; \tag{2.1}$$

$$\{x_n\}\ \ \mathrm{Cauchy-jev}: \qquad \|x_n-x_m\|\to 0; \tag{2.2}$$

$$\mathrm{potpunost}: \quad \|x_n-x_m\|\to 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x\in\mathcal{H} \quad \|x_n-x\|\to 0; \tag{2.3}$$

$$\{x_n\}\xrightarrow{w} x: \qquad \forall y\in\mathcal{H} \quad \{(x_n,y)\}\to(x,y). \tag{2.4}$$

Ako nije naglašeno da se radi o slaboj podrazumava se d_2-konvergencija.

Zadatak 2.3: Pokazati da jaka konvergencija povlači slabu. Ispitati obe konvergencije niza $\{x^{(n)}\}$ iz l^2 definisanog sa $\xi_i^{(n)}=\delta_{ni}$.

Konvergencija je nova, topološka struktura Hilbert-ovog prostora, što se odražava na značenje izvedenih pojmova, npr. podstrukture i morfizma. Homomorfizam nije samo linearno, već i neprekidno preslikavanje, sa osobinom da je niz likova konvergentnog niza i sam konvergentan, pri čemu se limes niza preslikava u limes likova. Među *linearnim funkcionalima*, tj. linearnim preslikavanjima iz $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ u $\mathbb{F}$, izdvaja se klasa *neprekidnih* funkcionala: $\phi:\mathcal{H}(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ uz uslov da je za svaki konvergentni niz $\{x_n\}$ iz $\mathcal{H}$ i niz $\{\phi(x_n)\}$ konvergentan u $\mathbb{F}$ i da je $\lim\phi(x_n)=\phi(\lim x_n)$. Samo za ovakve funkcionale važi Riesz-Fréchet-ov teorem o egzistenciji dualnog vektora. Odavde je jasno da prostor svih linearnih funkcionala nije izomorfan sa $\mathcal{H}$. *Potprostor* je zatvoreni lineal, tj. lineal $\mathcal{M}$ za koji je $\overline{\mathcal{M}}=\mathcal{M}$. Na standardan način se uvodi pojam ortokomplementa, i pokazuje se da je ortokomplement bilo kakvog skupa potprostor. Važi i teorem o projekciji:

$$\forall\mathcal{M}<\mathcal{H} \quad \forall x\in\mathcal{H} \quad \exists! m\in\mathcal{M} \quad \mathrm{i} \quad \exists! m'\in\mathcal{M}^\perp \quad : \quad x=m+m'.$$

Zadatak 2.4: Koji su od sledećih funkcionala u l^2 linearni i neprekidni ($x=\{\xi_n\}$): $\phi_1(x)=\xi_n$, $\phi_2(x)=\xi_n+\xi_{n+1}$, $\phi_3(x)=\sum_{i=1}^\infty\xi_i$, $\phi_4(x)=\sum_{i=1}^\infty|\xi_i|^2$, $\phi_5(x)=\sin\xi_n$, $\phi_6(x)=\frac{1}{\xi_n}$.

Zadatak 2.5: Ispitati da li su lineali i potprostori $\mathcal{M}_1=\{x\in l^2\mid \xi_i=0 \quad \mathrm{za} \quad i>10\}$ i $\mathcal{M}_2=\{x\in l^2\mid \sum_{i=1}^\infty\xi_i=0\}$. Da li su konačno-dimenzionalni lineali potprostori?

Kod konačno-dimenzionalnih vektorskih prostora, uslov potpunosti je uvek ispunjen, jer se svaki Cauchy-jev niz u bilo kom bazisu svodi na Cauchy-jeve, tj. konvergentne (zbog potpunosti $\mathbb{R}$) brojne nizove komponenti; kako ima samo konačno mnogo komponenti, norma vektora čije su koordinate ovi limesi je konačna, te je vektor iz prostora. S druge strane, prebrojivi skup racionalnih linearnih kombinacija vektora nekog bazisa daje gust skup u takvom prostoru, i postaje jasno da je separabilnost povezana sa postojanjem prebrojivih bazisa. Pri tome se i sam pojam bazisa uvodi u skladu sa svim postojećim strukturama (linearna, unitarna i topološka), čime se izbegavaju moguće komplikacije do kojih dovode pokušaji uopštavanja definicije bazirane samo na linearnoj [C2]:

Definicija 2.2 Ortonormirani bazis *Hilbert-ovog prostora je niz vektora* $\{e_n\}$ *sa osobinama:*

(i) $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (ortonormiranost);

(ii) *0 je jedini vektor ortogonalan na sve elemente niza (potpunost niza).*

Na osnovu ovakvog pojma bazisa, izdvaja se klasa separabilnih Hilbert-ovih prostora, u kojima je moguće relativno slobodno koristiti aparat linearne algebre (razvijen za konačno-dimenzionalne vektorske prostore), i koji su u osnovi formalizma modernih fizičkih teorija.

Teorem 2.1 *Hilbert-ov prostor je separabilan ako i samo ako sadrži prebrojivi ortonormirani bazis.*

Dokaz: Ako je separabilan, $\mathcal{H}$ sigurno sadrži gust prebrojiv podskup, npr. $Y = \{y_i \mid i = 1, 2, ...\}$. Primenjujući Gram-Schmidt-ovu proceduru na Y, dobija se ortonormirani niz $\{e_i\}$. Potrebno je pokazati još potpunost ovoga skupa. Neka je $z \in \mathcal{H}$ ortogonalan na sve vektore e_i. Pošto je Y gust, za svako $\epsilon > 0$ postoji $y \in Y$ takvo da je $\|z-y\| < \epsilon$. Iz samog algoritma Gram-Schmidt-a sledi da je y konačna linearna kombinacija $y = \sum_i \epsilon_i e_i$. Vidi se da je z vektor ortogonalan i na y, jer je ortogonalan na sve članove ove sume. Stoga je $\epsilon^2 > \|z-y\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2$, te je $\|z\| = 0$, odnosno, $z = 0$. Postojanje ortonormiranog bazisa povlači separabilnost, pošto su linearne kombinacije sa racionalnim koeficijentima gust skup. ∎

Lema 2.1 *Za ortonormirani niz* $\{e_i\}$ *sledeći iskazi su ekvivalentni:*

(i) *Potpun je;*

(ii) $\forall x \in \mathcal{H} \quad x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i(e_i, x)$ *(Fourier-ov razvoj);*

(iii) $\forall x, y \in \mathcal{H} \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}(x, e_i)(e_i, y)$ *(Parseval-ova jednakost);*

(iv) $\forall x \in \mathcal{H} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, x)|^2$ *(Pitagorina jednakost).*

Fourier-ovim razvojem se uspostavlja izomorfizam svakog separabilnog Hilbert-ovog prostora sa konačno-dimenzionalnim prostorom kolona ili prostorom l^2.

Zadatak 2.6: • Dokazati lemu 2.1. Pokazati separabilnost l^2 na dva načina.

Zadatak 2.7: Pokazati da je niz $x = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$ linearno nezavisan u odnosu na vektore apsolutnog bazisa.

Zadatak 2.8: ◦ Neka je $\mathcal{H}^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathcal{H} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}}_{n}$ n-tostruki tenzorski stepen Hilbert-ovog prostora $\mathcal{H}(\mathbb{F})$, pri čemu je $\mathcal{H}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}$. U $\mathcal{H}^n$ se skalarni proizvod indukuje iz $\mathcal{H}$ na uobičajen način. *Fock-ov prostor* $\Phi_{\mathcal{H}}$ je skup svih nizova $\{x = \{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots\} \mid x^{(i)} \in \mathcal{H}^i\}$ za koje važi $\sum_{i=1}^{\infty} \|x^{(i)}\|^2 < \infty$ sa skalarnim proizvodom $(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}(x^{(i)}, y^{(i)})$. Pokazati da je ovo Hilbert-ov prostor. Ispitati separabilnost, i naći jedan ortonormirani bazis (ako postoji) u $\Phi_{\mathcal{H}}$. Ako je $\mathcal{H} = \mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$), šta je $\Phi_{\mathcal{H}}$?

2.1.2 Raspodele

Konstrukcija za fiziku potrebnih funkcionalnih prostora obično počinje od prostora $C_0^\infty(\mathbb{R})$ svih beskonačno diferencijabilnih funkcija koje su van nekog konačnog intervala jednake nuli (ovo podseća na čest zahtev da fizičke veličine, npr. polja, budu lokalizovane u nekom delu prostora i da imaju sve izvode). Pored metrike d_2, indukovane skalarnim proizvodom $(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f^*(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, na $C_0^\infty(\mathbb{R})$ je definisana i metrika $d_\infty(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t\in\mathbb{R}}\{|x(t)-y(t)|\}$; prostor nije potpun ni za jednu od tih metrika (zadatak 1.9). Generalizacije na prostore $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ili $C_0^\infty(D)$, gde je D neki domen u $\mathbb{R}^n$, te unošenje težinske funkcije u skalarni proizvod, nije teško izvršiti.

Topologija u $C_0^\infty(\mathbb{R})$ do sada nije bila razmatrana (srećom, ozbiljno neće ni biti). U skladu sa komentarom nakon leme 1.2, dve uvedene metrike indukuju dve konvergencije i dve topologije. No, za fiziku potrebna topologija nije metrička, a zadaje se novom konvergencijom, koja je u izvesnom smislu pojačanje d_∞-konvergencije.

Definicija 2.3 *Niz funkcija $\{f_n\}$ iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$ konvergira ka funkciji $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ u Schwartz-ovom smislu, $\{f_n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} f$, ako u $\mathbb{R}$ postoji ograničeni interval izvan koga su sve funkcije niza jednake 0, a niz $\{f_n\}$ i svi nizovi izvoda $\{f_n^{(m)}\}$ konvergiraju uniformno (tj. d_∞) na $\mathbb{R}$ ka f, odnosno $f^{(m)}$.*

Ovakva konvergencija istovremeno tretira sve izvode funkcija niza, i odgovara intuitivnoj fizičkoj pretpostavci da se i izvodi bliskih polja malo razlikuju. Sada se može govoriti o neprekidnosti pojedinih preslikavanja $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Za dalju konstrukciju, a i inače u fizici, posebno su značajni neprekidni linearni funkcionali.

Definicija 2.4 **(i)** Raspodela (uopštena funkcija) *ϕ je linearni funkcional na prostoru $C_0^\infty(\mathbb{R})$ neprekidan u odnosu na Schwartz-ovu konvergenciju: $\{f_n\} \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ povlači $\{\phi(f_n)\} \to \phi(f)$.*

(ii) *Niz raspodela $\{\phi_n\}$ konvergira ka raspodeli ϕ, ako je $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \{\phi_n(f)\} \to \phi(f)$.*

Prostor svih raspodela se označava sa $C_0^\infty(\mathbb{R})'$.

Iz definicije sledi da sve funkcije iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$ pripadaju i $C_0^\infty(\mathbb{R})'$ u smislu da svaka takva funkcija f definiše neprekidni funkcional ϕ_f kao dualni u odnosu na skalarni proizvod:

$$\forall g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \phi_f(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f^*(t)g(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

Međutim, konvergencija i neprekidnost funkcionala nisu izvedeni iz metrike skalarnog proizvoda, pa nema analoga Riesz-Fréchet-ovog teorema; drugim rečima ima raspodela za koje ne postoji dualna funkcija u $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Na primer, postoje funkcije $f \notin C_0^\infty(\mathbb{R})$ koje uslovom (2.5) definišu linearni neprekidni funkcional. Ova činjenica se koristi za označavanje raspodela kao funkcija, pisanjem preko integrala (2.5) i u slučajevima kada za datu raspodelu u $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ne postoji dualna funkcija; dobijene "funkcije", za razliku od običnih, ne moraju imati definisanu vrednost u svakoj tački realne ose, jer je sam funkcional definisan na čitavim funkcijama (ovo je poreklo termina uopštena funkcija). Uz to, takvo pridruživanje funkcija funkcionalima nije ni jednoznačno (zadatak 2.10).

Definicijom 2.4 je uvedena jedna konvergencija u skupu raspodela. Nije očigledno da je funkcional ϕ, koji figuriše kao limes niza raspodela i sam raspodela; no, to potvrđuje jedna od brojnih značajnih teorema L. Schwartz-a. Izraz (2.5) daje mogućnost da se konvergencija raspodela shvati i kao konvergencija funkcija ka raspodelama, imajući u vidu pomenutu identifikaciju raspodela i funkcija. Tada za nizove iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$ definicija 2.4(ii) postaje slaba konvergencija za metriku d_2.

***Zadatak 2.9**:* Pokazati da su $\chi_{[a,b]}(t)$, gde je $\chi_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & t \in X \\ 0, & t \notin X \end{cases}$ karakteristična funkcija skupa $X \subset \mathbb{R}$, i $\theta_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$ (Heaviside-ova ili stepenasta funkcija) raspodele. Naći jedan niz iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$ koji konvergira ka $\chi_{[a,b]}(t)$.

***Zadatak 2.10**:* Koje raspodele definišu funkcije $f(t) = 0$ i $f(t) = \chi_{\{a\}}(t)$. Uopštiti rezultat.

***Zadatak 2.11**:* Pokazati da je $\delta(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(0)$ raspodela, i odrediti osnovna svojstva njoj dualne Dirac-ove δ-funkcije: $\delta(f) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

***Zadatak 2.12**:* Pokazati da niz $f_n(t) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 t^2}$ konvergira ka $\delta(t)$ (zadatak 2.11).

***Zadatak 2.13**:* Neka je $\eta(f) \stackrel{\text{def}}{=}$ v.p. $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t} f(t)\,\mathrm{d}t$ (glavna vrednost integrala). Pokazati da je ovo jedna raspodela.

Izraz (2.5), u pomenutom proširenom smislu identifikuje neke raspodele sa funkcijama, i dozvoljava uopštavanje operacija sa funkcijama na raspodele. Ali, pošto složeno pitanje kakve se "funkcije" mogu uzeti za f, u ovom tekstu nije razmatrano, operacije koje će biti nabrojane treba shvatiti uslovno: u svakom konkretnom slučaju treba proveriti da li je operacija definisana, tj. da li je njen rezultat raspodela[1]. *Izvod* raspodele ϕ je raspodela ϕ' definisana sa $\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \phi'(f) \stackrel{\text{def}}{=} -\phi(f')$ (jasno je da se ovakva definicija dobija parcijalnom integracijom u (2.5)). Na sličan način se uvode i integral raspodele, smena promenljivih, sabiranje i proizvod raspodela.

***Zadatak 2.14**:* Definisati integral raspodele.

***Zadatak 2.15**:* Neka je $a(t)$ funkcija iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$ takva da jednačina $s = a(t)$ ima jedinstveno rešenje $t = b(s)$. Iz izraza za smenu promenljivih u integralu, $\int_{\mathbb{R}} \phi(a(t)) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \phi(s) f(b(s)) |b'(s)|\,\mathrm{d}s$, izvesti smenu promenljivih kod raspodela.

***Zadatak 2.16**:* Izračunati $\theta_0(t-a),\ \theta'_a(t),\ \mathrm{sign}'(t),\ \chi'_{[a,b]}(t),\ [t]'$ (ceo deo od t), $|t|',\ |t|''$.

***Zadatak 2.17**:* Izračunati $t\delta(t),\ \delta(a(t)),\ \delta(\sin(t)),\ \delta(t^2-1),\ \delta'(t)$, i integral delta funkcije.

[1]Iskustvo svedoči da fizika zadovoljava antimarfijevski postulat: sve što je potrebno je i dozvoljeno. Tako su fizičari uspešno i tačno koristili raspodele dosta pre nego što je sadržaj ovog poglavlja i postojao: δ-funkcija (Dirac-ova!), njeno diferenciranje i sl. su i otvorili ovu oblast matematike.

2.1.3 Lebesgue-ov prostor

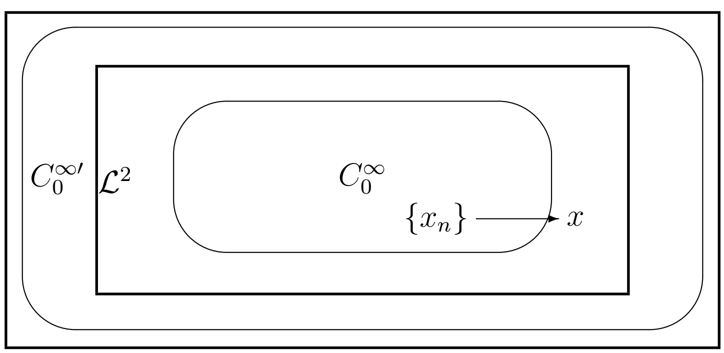
Većinu fizičkih zahteva zadovoljavaju prostori tipa $C_0^\infty(\mathbb{R})$, no oni nisu potpuni, što neke intuitivne predstave o konvergenciji može učiniti netačnim, a donekle usložnjava i za fiziku neophodnu teoriju operatora. Stoga je potrebno izvršiti "upotpunjavanje", tj. dopunjavanje limesima Cauchy-jevih nizova, čime se dobijaju funkcionalni Hilbert-ovi prostori, tzv. Lebesgue-ovi prostori. Njihov značaj se ogleda već u činjenici da su to prostori stanja kvantnih sistema, tj. njihovi vektori su fizička polja. Ispostavlja se da se upotpunjavanje može izvršiti u okviru $C_0^\infty(\mathbb{R})'$, o čemu svedoči

Lema 2.2 *Limesi Cauchy-jevih nizova iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$ su raspodele. Pri tome Cauchy-jevi nizovi $\{f_n\}$ i $\{g_n\}$ konvergiraju ka istoj raspodeli, ako je $\|f_n - g_n\| \to 0$.*

Dokaz: Neka je $\{f_n\}$ Cauchy-jev niz funkcija iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$, tj. niz koji zadovoljava uslov (2.2). Kako je $0 \leq |\|f_n\| - \|f_m\|| \leq \|f_n - f_m\|$, brojni niz $\{\|f_k\|\}$ je Cauchy-jev. Skup realnih brojeva je potpun i taj niz konvergira bez obzira na konvergentnost $\{f_n\}$. Za proizvoljnu funkciju $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ važi $|(f_n, g) - (f_m, g)| \leq \|f_n - f_m\|\|g\|$, što znači da je Cauchy-jev, tj. konvergentan i svaki brojni niz (f_n, g). S druge strane, izrazi $\forall g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \phi_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} (f_n, g)$ definišu niz raspodela, koji konvergira ka raspodeli ϕ definisanoj sa $\forall g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \phi(g) = \lim(f_n, g)$, (definicija 2.4). Pri tome Cauchy-jevi nizovi $\{f_n\}$ i $\{g_n\}$ za koje je $\|f_n - g_n\| \to 0$, definišu istu raspodelu, jer je tada $\forall h \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad |(f_n, h) - (g_n, h)| \leq \|h\|\|f_n - g_n\| \to 0$. ∎

Sada je ostatak konstrukcije jasan; preostala je

Definicija 2.5 Lebesgue-ov prostor *$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je Hilbert-ov prostor raspodela koje su limesi Cauchy-jevih nizova iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$, sa skalarnim proizvodom $(\lim f_n, \lim g_n) \stackrel{\text{def}}{=} \lim(f_n, g_n)$.*



Slika 2.1: **Konstrukcija Lebesgue-ovog prostora.** *Cauchy-jev niz $\{x_n\}$ iz C_0^∞ konvergira ka x iz $C_0^{\infty\prime}$, pa je x iz $\mathcal{L}^2$.*

Treba zapaziti da je početni prostor, $C_0^\infty(\mathbb{R})$, podskup Lebesgue-ovog, jer se za svaku funkciju početnog prostora može obrazovati niz čiji su svi elementi upravo ta funkcija, a koji očigledno konvergira ka njoj. Prostor svih raspodela je nadskup Lebesgue-ovog, jer u njemu pored raspodela iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ postoje na primer i raspodele određene preko (2.5) funkcijama koje nisu iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$ (zadatak 2.18). Potpunost Lebesgue-ovog prostora (definicija 2.5 kaže da je to Hilbert-ov prostor), nije očigledna, već se posebno dokazuje (slično potpunosti l^2,[A3]). Može se reći i da je Lebesgue-ov prostor zatvarač $C_0^\infty(\mathbb{R})$ u odnosu na metriku d_2.

Zadatak 2.18: Da li su karakteristična funkcija konačnog intervala, stepenasta funkcija i delta funkcija iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$? Objasniti.

Za kvantnomehaničke primene je važno znati da su među elementima $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ i sve neprekidne kvadratno integrabilne (tj. sa konačnom normom) funkcije (zadatak 2.19). Skup ovih funkcija se označava sa $\mathcal{L}^2_c(\mathbb{R})$. Prema tome, pokazano je da važi: $C_0^\infty(\mathbb{R}) < \mathcal{L}^2_c(\mathbb{R}) < \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) < C_0^\infty(\mathbb{R})'$. Vidi se da je prostor $\mathcal{L}^2_c(\mathbb{R})$, kao i $C_0^\infty(\mathbb{R})$ po konstrukciji, gust u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Zadatak 2.19: Pokazati da sve neprekidne kvadratno integrabilne funkcije pripadaju $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Zadatak 2.20: Proveriti da li neprekidne funkcije iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ teže nuli kad $t \to \infty$.

Postojanje ortonormiranih bazisa u Lebesgue-ovim prostorima, tj. separabilnost ovih prostora, mora se posebno proveriti. $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je separabilan Hilbert-ov prostor (zadatak 2.21). U kvantnoj mehanici je važno utvrditi separabilnost šire klase Lebesgue-ovih prostora (promena skalarnog proizvoda i domena definisanosti funkcija). Rezultate sumira

Teorem 2.2 *Neka je za $-\infty \leq a < b \leq \infty$ na intervalu (a,b) funkcija $s(t)$ nenulta (osim u najviše prebrojivo mnogo tačaka), neprekidna i zadovoljava uslov $|s(t)| \leq Ce^{-\delta|t|}$ $(0 < C, \delta < \infty)$. Tada je niz funkcija $T_s \stackrel{\text{def}}{=} \{t^n s(t) \mid n = 0, 1, \ldots\}$ potpun u $\mathcal{L}^2(a,b)$ (tj. samo je nulta funkcija ortogonalna na sve funkcije niza).*

Stoga su svi prostori $\mathcal{L}^2(a,b)$ separabilni, a ortonormirani bazisi u njima se mogu naći Gram-Schmidt-ovom procedurom iz T_s. Tako dobijeni ortonormirani bazisi su oblika $\{p_n(t)s(t) \mid n = 0, 1, \ldots\}$, gde je $p_n(t)$ polinom n-tog stepena. Teorem se može shvatiti i kao tvrđenje da su ovi polinomi ortonormirani bazisi u prostorima $\mathcal{L}^2((a,b),\rho)$, u kojima je skalarni proizvod definisan težinskom funkcijom $\rho(t) = |s(t)|^2$.

Zadatak 2.21: Pokazati separabilnost a) $\mathcal{L}^2(-1,1)$; b) $\mathcal{L}^2((0,\infty), e^{-t})$; c) $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, e^{-t^2})$ i d) $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Proveriti da se ortonormalizacijom skupa T_s iz teorema 2.2. dobijaju:

a) za $s = 1$, Legendre-ovi polinomi $P_n(t) = \frac{(-1)^n\sqrt{2n+1}}{2^n n!\sqrt{2}} \frac{d^n(1-t^2)^n}{dt^n}$;

b) za $s = 1$, Laguerre-ovi polinomi $L_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} e^t \frac{d^n e^{-t} t^n}{dt^n}$;

c) za $s = 1$, Hermite-ovi polinomi $H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}$;

d) za $s = e^{-\frac{t^2}{2}}$, Hermite-ove funkcije $\psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)$.

Zadatak 2.22: Pokazati da je u prostoru $\mathcal{L}^2(-a,a)$ niz $\{e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{\imath n\pi}{a}t} \mid n = 0, \pm 1, \ldots\}$ jedan ortonormirani bazis. Šta je Fourier-ov red periodične funkcije?

Zadatak 2.23:$^\circ$ B_0 je prostor svih trigonometrijskih polinoma (linearne kombinacije funkcija $\{e_\lambda(t) = e^{\imath\lambda t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$). Pokazati da je $\forall f, g \in B_0 \quad (f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^*(t)g(t)\,dt$ jedan skalarni proizvod u ovom prostoru). Pokazati da je Lebesgue-ov prostor B dobijen zatvaranjem B_0 u odnosu na metriku ovog skalarnog proizvoda neseparabilan.

Glavni koraci u konstrukciji Lebesgue-ovog prostora su zadavanje početnog (nepotpunog) prostora $C_0^\infty(\mathbb{R})$, definicija neprekidnosti koja određuje prostor neprekidnih linearnih funkcionala $C_0^\infty(\mathbb{R})'$, i izdvajanje $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ kao zatvarača $C_0^\infty(\mathbb{R})$ u $C_0^\infty(\mathbb{R})'$. Na taj način je zajedno sa $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ uvedena trojka $(C_0^\infty(\mathbb{R}), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), C_0^\infty(\mathbb{R})')$. Ispostavlja se da je to sasvim opšti slučaj: za svaki Hilbert-ov prostor $\mathcal{H}$ moguće je konstruisati gust podlineal $\mathcal{A}$ sa topologijom koja zadovoljava uslov da su funkcionali $\forall x \in \mathcal{H}\ \forall y \in \mathcal{A}\quad \phi_x(y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, y)$ neprekidni na $\mathcal{A}$. Tada je $\mathcal{H}$ podskup vektorskog prostora $\mathcal{A}'$ svih neprekidnih funkcionala na $\mathcal{A}$. Tako se, kao zaključak, formuliše

Definicija 2.6 Opremljeni Hilbert-ov prostor *je trojka* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{A}')$*, gde je* $\mathcal{A}$ *gust lineal u Hilbert-ovom prostoru* $\mathcal{H}$*, a* $\mathcal{A}'$ *prostor neprekidnih funkcionala na* $\mathcal{A}$*.*

2.2 OPERATORI U HILBERT-OVIM PROSTORIMA

Teorija operatora u Hilbert-ovim prostorima pored stavova opštih za sve vektorske prostore uključuje i aspekte, često veoma komplikovane, vezane za topološku strukturu. To se odnosi i na svojstveni problem. Za fiziku su od posebnog značaja hermitski (jer predstavljaju fizičke veličine, a njihove svojstvene vrednosti su brojevi koji se dobijaju fizičkim merenjima) i unitarni operatori (opisuju simetrije i evoluciju sistema).

2.2.1 Osnovne osobine operatora

Pojam linearnog operatora se uvodi kao u konačno-dimenzionalnom prostoru, osim što se ne zahteva da je operator definisan na celom prostoru; ne uključuje se neprekidnost, tj. usklađenost sa topološkom strukturom.

Definicija 2.7 Operator (linearni) A *sa* domenom $D(A) \subset \mathcal{H}$ *i* oblašću likova (kodomenom) $R(A) \subset \mathcal{H}$ *je linearno preslikavanje* $D(A)$ *na* $R(A)$*. Operator* A' *je* proširenje *operatora* A $(A \subset A')$*, ako je* $D(A) \subset D(A')$*, a* $\forall x \in D(A)\ Ax = A'x$*. Operator* A *je* ograničen *ako postoji pozitivna konstanta* K *takva da je* $\forall x \in D(A)\ \|Ax\| \leq K\|x\|$*;* norma $\|A\|$ *operatora* A *je najmanje* K *koje zadovoljava uslov ograničenosti. Operator* A *je* invertibilan *ako mu je nulpotprostor samo nulti vektor; tada postoji* inverzni operator $A^{-1} : R(A) \to D(A)$*, takav da su* AA^{-1} *i* $A^{-1}A$ *identična preslikavanja.* Zbir $A + B$ *dva operatora je operator definisan na* $D(A) \cap D(B)$ *kao* $(A+B)x = Ax+Bx$*;* proizvod BA *dva operatora je operator definisan na* $\{x \in D(A) | Ax \in D(B)\}$ *kao* $BAx = B(Ax)$*.*

Linearnost operatora, tj. zahtev da se svaka linearna kombinacija vektora iz domena preslikava u linearnu kombinaciju likova, implicitno znači i da je domen (stoga i oblast likova) lineal. Proširenje na potprostor $\overline{D(A)}$ postoji i jedinstveno je samo kada je A ograničen: tada je niz likova konvergentnog niza konvergentan, i prošireni operator $\overline{A}$ se zadaje relacijom $\overline{A} \lim x_n = \lim Ax_n$, čime se odmah dobija neprekidnost operatora $\overline{A}$ (kaže se da se A proširuje po neprekidnosti). To znači da je za linearne operatore, neprekidnost ekvivalentna ograničenosti.

Zadatak 2.24: Da li $A(\xi_0, \xi_1, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_1, \sqrt{2}\xi_2, \dots)$ i $B(\xi_0, \xi_1, \dots) \stackrel{\text{def}}{=} (0, \xi_0, \sqrt{2}\xi_1, \dots)$ definišu linearne operatore u l^2? Odrediti AB, $N = BA$, $[A, B]$. Koji su od ovih operatora ograničeni? Odrediti im nulpotprostore.

Zadatak 2.25: $k(s,t)$ je neprekidna funkcija na kvadratu $[a,b]\times[a,b]$. Sa $Kx(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s$ je zadat linearni operator u $\mathcal{L}^2(a,b)$ (*integralni operator sa jezgrom* $k(s,t)$). Odrediti osnovne osobine ovog operatora. Napisati eksplicitno izraz (x,Ky).

Zadatak 2.26: Neka je $m(t)$ neprekidna ograničena funkcija. Odrediti osobine *multiplikativnog* operatora $Mf=mf$. Može li se M izraziti kao integralni operator?

Zadatak 2.27: Pokazati da je $Df(t)=f'(t)$ linearni operator u $\mathcal{L}^2(a,b)$. Ispitati mu osnovne osobine. Uopštiti. Šta su rešenja linearne diferencijalne jednačine?

Zadatak 2.28: Ispitati osobine operatora u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$: a) $T_ax(t)=x(t+a)$ (translacija za $a\in\mathbb{R}$); b) $S_{(a,b)}x(t)=\begin{cases}x(t), & t\in(a,b)\\ 0, & t\notin(a,b)\end{cases}$ (suženje na (a,b)); c)$Df(t)=\lim_{a\to 0}\frac{T_af(t)-f(t)}{a}$. Mogu li se izraziti u obliku integralnih operatora?

Operacija adjungovanja je u konačno-dimenzionalnim prostorima zasnovana na Riesz-Fréchet-ovom teoremu, tj. činjenici da za svako x i y postoji jedinstveno rešenje z jednačine $(z,x)=(y,Ax)$. To daje mogućnost da se uvede operator $A^\dagger$ kao $A^\dagger y=z$, tj. $(A^\dagger y,x)\stackrel{\text{def}}{=}(y,Ax)$. U definiciji 2.7 se ne zahteva da je A svuda definisani operator i jedinstvenost rešenja gornje jednačine se eksplicitno obezbeđuje: očigledno, mogu se adjungovati samo operatori sa domenom gustim u $\mathcal{H}$.

Definicija 2.8 *Ako je* $\overline{D(A)}=\mathcal{H}$*, adjungovani operator* $A^\dagger$ *se definiše na* $D(A^\dagger)\stackrel{\text{def}}{=}\{y\in\mathcal{H}|\ \exists! z(y)\in\mathcal{H}\quad\forall x\in D(A)\quad(z,x)=(y,Ax)\}$ *relacijom:* $\forall x\in D(A)\ \forall y\in D(A^\dagger)\quad(y,Ax)=(A^\dagger y,x)$*. Ako je* $\forall x,y\in D(A)$ *ispunjeno* $(y,Ax)=(Ay,x)$*, tj. ako je* $A\subset A^\dagger$*, kaže se da je* A *hermitski (simetričan) operator, a autoadjungovan je ako je* $A=A^\dagger$*. Unitarni operator je invertibilni operator definisan na* $\mathcal{H}$ *takav da važi* $A^{-1}=A^\dagger$*.*

U daljem tekstu se podrazumeva da operator koji se adjunguje ima gust domen. Operator $(A^\dagger)^\dagger$ postoji samo kada je $D(A^\dagger)$ gust, i tada je proširenje operatora A. Kako je ortokomplement bilo kakvog skupa potprostor, a $R(A)$ to ne mora biti, oblast likova operatora i nulpotprostor adjungovanog operatora zadovoljavaju relaciju:

$$\overline{R(A)}=N(A^\dagger)^\perp. \tag{2.6}$$

Zadatak 2.29:• Pokazati da kada postoji $(A^\dagger)^\dagger$ važi $A\subset(A^\dagger)^\dagger$.

Zadatak 2.30:◦ Dokazati jednakost (2.6).

Zadatak 2.31: Odrediti $A^\dagger$, $B^\dagger$, $N^\dagger$ (zadatak 2.24).

Zadatak 2.32: Šta je adjungovani operator integralnog operatora? Šta su jezgra simetričnih, autoadjungovanih i unitarnih operatora?

Zadatak 2.33: Pronaći adjungovane operatore za T_a, $S_{(a,b)}$ (zadatak 2.28). Ispitati da li su unitarni, simetrični, autoadjungovani i idempotentni.

Zadatak 2.34: Izraz $Pf(t)=-\imath f'(t)$ različitim izborima domena generiše familiju *operatora impulsa* u $\mathcal{L}^2(a,b)$. Osim prirodnog, maksimalnog domena $D(P)=\{f\in\mathcal{L}^2(a,b)\mid f'\in\mathcal{L}^2(a,b)\}$, moguća su suženja. Npr. $D(P_1)=\{f\in\mathcal{L}^2(a,b)\mid f'\in\mathcal{L}^2(a,b),\ f(a)=f(b)=0\}$, $D(P_2)=\{f\in\mathcal{L}^2(a,b)\mid f'\in\mathcal{L}^2(a,b),\ f(b)=0\}$, $D(P_0)=\{f\in\mathcal{L}^2(a,b)\mid f'\in\mathcal{L}^2(a,b),\ f(a)=f(b)\}$, $D(P_\theta)=\{f\in\mathcal{L}^2(a,b)\mid f'\in\mathcal{L}^2(a,b),\ f(b)=e^{\imath\theta}f(a)\}$. Ispitati koji od ovih operatora su proširenja ili suženja drugih, koji su simetrični, a koji autoadjungovani. Razmotriti operator P u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ i $\mathcal{L}^2(0,\infty)$.

Zadatak 2.35: Neka su $p(t)$ i $q(t)$ beskonačno difrencijabilne realne funkcije, pri čemu je $p(t)$ pozitivna na intervalu $[a,b]$. *Sturm-Liouville-ov* operator u $\mathcal{L}^2(a,b)$ definiše se kao $Zf=-(pf')'+qf$ na domenu $D(Z)=\{f\in\mathcal{L}^2(a,b)\mid Zf\in\mathcal{L}^2(a,b),\ f(a)=f(b)=0\}$. Pokazati da je autoadjungovan.

Zadatak 2.36: Kakav je operator M (zadatak 2.26) u $\mathcal{L}^2(a,b)$ definisan na maksimalnom domenu. Razmotriti i slučaj $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

2.2.2 Spektar i rezolventni skup operatora

U konačno-dimenzionalnom prostoru se obično razmatraju samo operatori definisani na celom prostoru (jer se zaključci lako prenose i na operatore definisane na nekom potprostoru). *Spektar* takvog operatora A je skup $\sigma(A)$ svojstvenih vrednosti A, dok je *rezolventni skup* $\rho(A)$ komplement spektra u kompleksnoj ravni. Isti skupovi se mogu definisati i preko *rezolvente* $R_\alpha(A) \stackrel{\text{def}}{=} (A-\alpha I)^{-1}$ operatora A: $\alpha \in \rho(A)$ ako je rezolventa definisana, i tada je njen domen, tj. oblast likova operatora $A-\alpha I$, ceo prostor, a inače je $\alpha \in \sigma(A)$.

U beskonačno-dimenzionalnom Hilbert-ovom prostoru se može desiti da domen rezolvente nije ceo $\mathcal{H}$, čak i kada α nije svojstvena vrednost. To ukazuje na više tipova tačaka spektra. U daljem izlaganju spektralne teorije koristi se adjungovanje operatora, te će klasifikacija delova spektra biti izvršena za slučaj operatora sa domenom gustim u $\mathcal{H}$. U matematičkoj literaturi postoji više klasifikacija. Ovde izložena terminološki odgovara normalnim operatorima, za koje je $[A^\dagger, A] = 0$, čime su obuhvatćeni za kvantnu mehaniku relevantni autoadjungovani i unitarni operatori.

Definicija 2.9 Rezolventni skup $\rho(A)$ *operatora* A *čine kompleksni brojevi* α *za koje je* $R_\alpha(A)$ *ograničeni operator sa gustim domenom*[2] *u* $\mathcal{H}$. Spektar *operatora* A *je skup* $\sigma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}\backslash\rho(A)$, *koji se sastoji iz tri disjunktna podskupa:*

(i) α *je iz* diskretnog *spektra* $P\sigma(A)$ *(ili svojstvena vrednost za* A*) ako postoji svojstveni vektor* $x \neq 0$ *(tj.* $Ax = \alpha x$*; tada* $R_\alpha(A)$ *nije definisan);*

(ii) α *je iz* neprekidnog *spektra* $C\sigma(A)$ *ako je* $R_\alpha(A)$ *neograničeni operator definisan na gustom skupu u* $\mathcal{H}$*;*

(iii) α *je iz* rezidualnog *spektra* $R\sigma(A)$ *ako postoji* $R_\alpha(A)$*, ali mu domen nije gust u* $\mathcal{H}$.

Simetrični, autoadjungovani i unitarni operatori imaju specifične spektre, zbog čega i jesu važni u fizici.

Lema 2.3 **(i)** *Diskretni i neprekidni deo spektra simetričnog operatora su realni.*

(ii) *Spektar autoadjungovanog operatora je realan, a nema rezidualnog dela.*

(iii) *Spektar unitarnog operatora je na jediničnoj kružnici i nema rezidualnog dela.*

▬*Dokaz:* (i) Iz definicije simetričnog operatora sledi da je (x, Ax) realno za svako x iz $D(A)$, i imaginarni deo jednačine $Ax - \alpha x = y$ skalarno pomnožene sa x je $-\|x\|^2 \mathrm{Im}\alpha = \mathrm{Im}(x, y)$. Stoga, za $\alpha \notin \mathbb{R}$ i $x \neq 0$ mora biti $y \neq 0$, tj. $\alpha \notin P\sigma(A)$. Dalje, koristeći nejednakost Schwartz-a nalazi se relacija $|\mathrm{Im}\alpha|\|x\|^2 \leq \|x\|\|y\|$, iz koje se, zamenjujući $x = R_\alpha(A)y$, dobija $\|R_\alpha(A)y\| \leq \frac{\|y\|}{|\mathrm{Im}\alpha|}$, odnosno ograničenost rezolvente. To znači da broj koji nije realan ne može biti ni iz $C\sigma(A)$, tj. može pripadati rezidualnom spektru ili rezolventnom skupu simetričnog operatora.
(ii) Neka je A autoadjungovan i α (pa ni α^*) mu nije svojstvena vrednost, odnosno $N(A - \alpha I) = 0$. Zbog $\overline{R(A - \alpha I)} = N(A - \alpha^* I)^\perp = \mathcal{H}$ sledi da je $D(R_\alpha(A)) = R(A - \alpha I)$ gust u $\mathcal{H}$, i α ne može biti iz rezidualnog spektra. ∎

[2] Drugim rečima, $A - \alpha I$ je bijekcija čiji se inverz može po neprekidnosti proširiti na ceo $\mathcal{H}$.

Zadatak 2.37: Dokazati navedene osobine spektra unitarnog operatora.

Zadatak 2.38: Pokazati da ako je $\alpha \in P\sigma(A)$ onda $\alpha^* \in P\sigma(A^\dagger) \cup R\sigma(A^\dagger)$.

Weyl-ov kriterijum prepoznavanja tačaka diskretnog i neprekidnog spektra je zasnovan na postojanju aproksimativnog rešenja svojstvenog problema. Ispostavlja se da za svako α iz neprekidnog spektra postoji normirani niz $\{x_n^\alpha\}$ koji proizvoljno dobro aproksimira svojstveni vektor, u smislu $\|Ax_n^\alpha - \alpha x_n^\alpha\| \to 0$. Naravno, ovo je ispunjeno i za diskretni spektar (dovoljno je posmatrati niz čiji su svi članovi baš svojstveni vektor), ali ne i za tačke rezolventnog skupa: zbog ograničenosti rezolvente, $\|R_\alpha(A)x\| \leq \|R_\alpha(A)\|\|x\|$, sledi $\|Ax - \alpha x\| \geq \frac{\|x\|}{\|R_\alpha(A)\|}$.

Zadatak 2.39: Odrediti spektre: a) A, $A^\dagger$ i N iz zadatka 2.24; b) M iz zadatka 2.26; posebno razmotriti *operator koordinate*: $m(t) = t$; c) operatora P_i iz zadatka 2.34; d) T_a iz zadatka 2.28; e) $S_{(a,b)}$ iz zadatka 2.28.

Zadatak 2.40: *Fourier-Plancherel-ov* operator u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je $Ff(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath ts} f(s)\, \mathrm{d}s$. Odrediti mu spektar. (Uputstvo: proveriti da su Hermite-ove funkcije svojstveni vektori.)

Zadatak 2.41: Neka je A autoadjungovani operator u $\mathcal{L}^2(a,b)$. Pokazati da je $\frac{1}{\rho(t)}A$ autoadjungovani operator u $\mathcal{L}^2((a,b),\rho)$ i postaviti svojstvenu jednačinu za poslednji operator.

Ako je A' proširenje operatora A, postoje određene veze među pojedinim delovima spektra ovih operatora. Svojstveni vektor od A je svojstven i za A', te je $P\sigma(A) \subset P\sigma(A')$. Iz relacije $D(R_\alpha(A)) \subset D(R_\alpha(A'))$ sledi da ako drugi domen nije gust u $\mathcal{H}$ ne može biti ni prvi, odnosno $R\sigma(A') \subset R\sigma(A)$. Konačno, ako je $R_\alpha(A)$ neograničen, ni njegovo eventualno proširenje ne može biti ograničeno. Prema tome, u opštem slučaju proširivanje operatora dovodi do prelaska tačaka među delovima kompleksne ravni u skladu sa dijagramom 2.2.

$$\begin{tikzcd}
 & R\sigma(A) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
C\sigma(A) \arrow[dr] & & \rho(A) \arrow[ll] \arrow[dl] \\
 & P\sigma(A) &
\end{tikzcd}$$

Slika 2.2: **Promena delova spektra pri proširenju operatora.**

2.2.3 Spektralna forma konačno-dimenzionalnih operatora

U ovom odeljku će biti razmotrena veza spektralne forme i rezolvente normalnog operatora u konačno-dimenzionalnom prostoru, što će omogućiti generalizaciju na Hilbert-ove prostore. Ako su P_i projektori na (međusobno ortogonalne) svojstvene potprostore za svojstvene vrednosti α_i operatora A, spektralna forma je poznati izraz: $A = \sum_i \alpha_i P_i$. $R_\alpha(A)$ je matrična funkcija kompleksne promenljive α, i njena spektralna forma je $R_\alpha(A) = \sum_i \frac{1}{\alpha_i - \alpha} P_i$. Vidi se da su svojstvene vrednosti operatora A polovi rezolvente. Zbog ograničenosti skupa svojstvenih vrednosti, postoji neki konačni pozitivni broj $a > |\alpha_i|$, tj. svi polovi rezolvente su skoncentrisani u krugu radijusa a. Izvan tog kruga $R_\alpha(A)$ je analitička, i može se predstaviti redom (smena $\xi = \frac{1}{\alpha}$ daje $R_\alpha(A) = -\xi(I - \xi A)^{-1}$, gde je drugi faktor geometrijski red):

$$R_\alpha(A) = -\frac{1}{\alpha}(I + \frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\alpha^2}A^2 + ...) \quad |\alpha| > a.$$

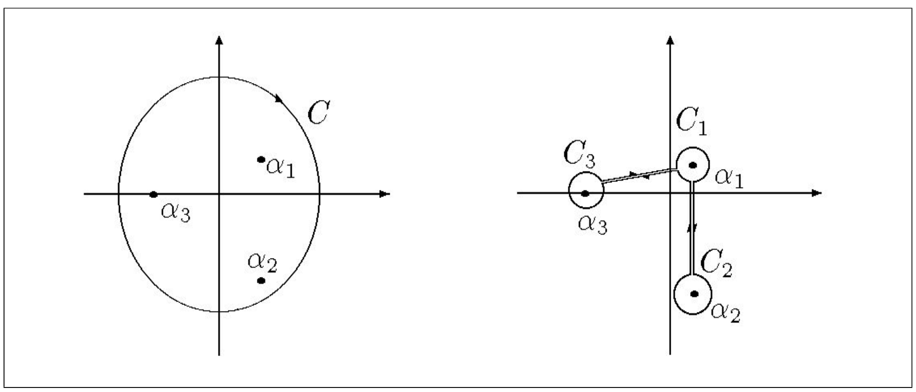
Cauchy-jeva formula $c_n = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\xi$ za koeficijente reda $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ (C je kontura u domenu analitičnosti f), postaje:

$$A^m = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \alpha^m R_\alpha(A)\,\mathrm{d}\alpha, \quad m = 0, 1, 2...,$$

gde je C neka kontura koja obuhvata sve svojstvene vrednosti A, npr. kružnica radijusa većeg od a (slika 2.3). Posebno, za $m = 0$ i $m = 1$ nalazi se:

$$I = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C R_\alpha(A)\,\mathrm{d}\alpha \quad , \qquad A = \frac{1}{2\pi\imath}\oint_C \alpha R_\alpha(A)\,\mathrm{d}\alpha. \tag{2.7}$$

Maksimalnim sažimanjem konture C, ona se raspada na skup malih kružnica C_i oko svojstvenih



Slika 2.3: **Sažimanje konture integracije oko svojstvenih vrednosti.**

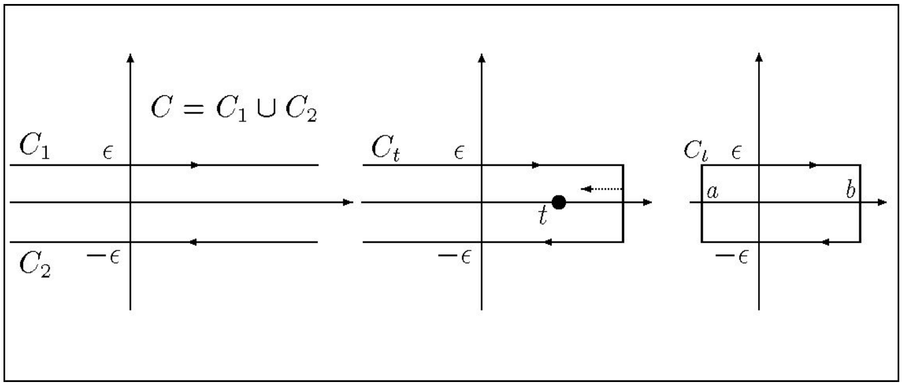
vrednosti (slika 2.3). Neka je $P_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{C_i} R_\alpha(A)\,\mathrm{d}\alpha$ i $D_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{C_i}(\alpha - \alpha_i)R_\alpha(A)\,\mathrm{d}\alpha$. Prethodne jednakosti postaju

$$I = \sum_i P_i \quad \text{i} \quad A = \sum_i(\alpha_i P_i + D_i).$$

Lako se proverava da su P_i svojstveni projektori (zadatak 2.42), te su poslednji izrazi razlaganje jedinice i spektralna forma. Stoga su kod normalnih operatora svi operatori D_i jednaki nuli, a P_i su hermitski međusobno ortogonalni projektori.

Zadatak 2.42: Dokazati da za $\alpha, \beta \in \rho(A)$ važi $\frac{R_\alpha(A) - R_\beta(A)}{\alpha - \beta} = R_\alpha(A)R_\beta(A)$.

Zadatak 2.43: Proveriti da su operatori P_i definisani u prethodnom tekstu projektori na svojstvene potprostore operatora A, te da važi $P_iP_j = \delta_{ij}P_i$.



Slika 2.4: **Kontura integracije za autoadjungovani operator.** *Levo: spektralna forma (2.7); sredina: neprekidnost projektorske mere (2.8); desno: projektor intervala. Svuda je $\epsilon > 0$.*

2.2.4 Kanonična forma autoadjungovanih operatora

Kako kod autoadjungovanih operatora nema rezidualnog spektra, a kontinuirani i diskretni su skoncentrisani na realnoj osi, kontura integracije u izrazima (2.7) se može uzeti kao na slici 2.4.

Kao i u konačno-dimenzionalnom slučaju, svaka tačka, s, spektra određuje projektor P_s, a njihov zbir je projektor, jer su međusobno ortogonalni. To daje mogućnost da se svakom realnom broju t pridruži projektor E_t koji je zbir projektora P_s za sve tačke spektra manje ili jednake t.

Tako je na $\mathbb{R}$ definisana projektorska funkcija E_t, kojoj, u skladu sa rezultatima prethodnog odeljka, odgovara kontura C_t (slika 2.4):

$$E_t \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{C_t} R_\alpha(A) d\alpha. \tag{2.8}$$

Horizontalni delovi konture se nalaze u rezolventnom skupu; na njima je rezolventa ograničeni operator, sa domenom gustim u $\mathcal{H}$, odnosno sa jedinstvenim proširenjem po neprekidnosti na ceo $\mathcal{H}$. Ako je $t \in \rho(A)$, isto važi i za ostatak konture, i integral (2.8) je korektno definisan. Ako je $t \in C\sigma(A)$, rezolventa je neograničeni operator u tački t, tako da (2.8) treba shvatiti u smislu glavne vrednosti. Konačno, ako je $t \in P\sigma(A)$, rezolventa ne postoji u tački t; sa druge strane, takve tačke su izolovane, pa je projektorska funkcija (2.8) definisana u njihovoj okolini, što se koristi za proširenje domena ove funkcije na $P\sigma(A)$ po neprekidnosti zdesna: $E_t = \lim_{\delta\to 0^+} E_{t+\delta}$.

Već površna analiza osobina ove projektorske funkcije otkriva njena bitna svojstva. Ako je $t \in P\sigma(A)$, P_t je netrivijalni projektor, dok u slučaju $t \in C\sigma(A) \cup \rho(A)$ nema svojstvenih vektora i svojstveni projektor je nulti operator. Stoga je između tačaka diskretnog spektra E_t neprekidna (na intervalima iz rezolventnog skupa je konstantna), dok pri prolasku kroz svojstvenu vrednost t važi $E_{t+\epsilon} - E_{t-\epsilon} = P_t$. Ipak, zahvaljujući načinu definisanja za $t \in \sigma(A)$, E_t je na celoj realnoj osi neprekidna zdesna. U limesima $t \to -\infty$ i $t \to +\infty$, kontura integracije nestaje, odnosno postaje C (slika 2.4), te važi

$$(i)\ E_t = \lim_{\delta\to 0^+} E_{t+\delta}, \quad (ii)\ E_a E_b = E_{\min\{a,b\}}, \quad (iii)\ E_{-\infty} = 0, \quad (iv)\ E_{+\infty} = I.$$

Projektorske funkcije sa ovim svojstvima nazivaju se *projektorske mere*.

Projektorska mera E_t svakom intervalu $\iota = [a,b]$ dodeljuje projektor $P_\iota = E_b - E_a$, koji odgovara konturi C_ι (slika 2.4). Otvorenim i poluotvorenim intervalima projektori se dodeljuju na osnovu neprekidnosti zdesna. Ako je $\iota \subset \rho(A)$, rezolventa je unutar konture ograničena, pa je $P_\iota = 0$, dok ako ι sadrži i tačke spektra, ovo ne važi, te su takvi projektori nenulti.

Razlaganje jedinice i spektralna forma (2.7) postaju:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E_t \quad A = \int_{-\infty}^{\infty} t\,\mathrm{d}E_t. \tag{2.9}$$

Izrazi (2.8) i (2.9) se mogu shvatiti kao skraćenja za $\forall x, y \in \mathcal{H} \quad (x, E_t y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi\imath}\oint_{C_t}(x, R_\alpha(A)y)d\alpha$, odnosno $\forall x, y \in D(A) \quad (x, Ay) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,\mathrm{d}(x, E_t y)$. U zadnjem figuriše izvod funkcije $(x, E_t y)$, koja je deo po deo neprekidna, tj. može se izraziti kao neprekidna funkcija kojoj je dodata linearna kombinacija stepenastih funkcija. Zato je njen izvod u opštem slučaju raspodela koja sadrži linearnu kombinaciju δ-funkcija. Kada je spektar čisto diskretan, ta funkcija je deo po deo konstantna, te je njen izvod linearna kombinacija δ-funkcija za tačke diskretnog spektra, čime se dobija spektralna forma kao u konačno-dimenzionalnom prostoru.

U konačno-dimenzionalnim prostorima svaki normalni (pa i autoadjungovani) operator ima ortonormirani svojstveni bazis. Već i najvažniji beskonačno-dimenzionalni operatori u fizici, koordinata i impuls, nemaju ovo svojstvo. Međutim, isti ti primeri daju mogućnost da se neke raspodele tretiraju kao svojstveni vektori: δ-funkcije za koordinatu i ravni talasi za impuls (zadatak 2.44). Jedan od značajnih doprinosa teorije raspodela je generalizacija ovih zaključaka na proizvoljni autoadjungovani operator. Naime, ako je A autoadjungovani operator u $\mathcal{H}$, može se konstruisati odgovarajući opremljeni Hilbert-ov prostor $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{A}')$ (definicija 2.6), takav da $\mathcal{A}'$ sadrži uopštene svojstvene vektore za tačke neprekidnog spektra A (koji se, u skladu sa pomenutim Weyl-ovim zapažanjem, mogu aproksimirati nizom vektora iz Hilbert-ovog prostora). Jasno je da oni čine kontinuirani skup $\{e_t\}$, te izrazi (2.9) za operatore sa čisto neprekidnim spektrom mogu da se shvate i kao Fourier-ov razvoj

$$x = \int_{\mathbb{R}} \xi(t) e_t \,\mathrm{d}t \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} t\xi(t) e_t \,\mathrm{d}t,$$

u punoj analogiji sa konačno-dimenzionalnim slučajem. Ako autoadjungovani operator ima i neprekidan i diskretan spektar poslednji izrazi postaju kombinacija sume po diskretnom i integrala po neprekidnom spektru (rezultat je očigledan po analogiji, ili na osnovu komentara nakon (2.9).

Zadatak 2.44: Odrediti uopštene svojstvene vektore operatora koordinate i impulsa (zadaci 2.34 i 2.39). Pokazati da su operatori koordinate i impulsa povezani Fourier-ovim operatorom (zadatak 2.40). Rešiti zadatak 2.40 na osnovu ovoga.

2.2.5 Ortogonalni polinomi

Hilbert-ovi prostori i njihovi operatori čine dobar okvir za razmatranje različitih linearnih diferencijalnih jednačina fizike. Poznato je da su za fiziku najvažnije diferencijalne jednačine drugog reda, a njihovu veliku klasu opisuje *uopštena hipergeometrijska jednačina*:

$$u''(t) + \frac{\tilde{\tau}(t)}{\sigma(t)} u'(t) + \frac{\tilde{\sigma}(t)}{\sigma(t)^2} u(t) = 0. \tag{2.10}$$

$\sigma(t)$ i $\tilde{\sigma}(t)$ su polinomi stepena manjeg od 3, a $\tilde{\tau}(t)$ stepena manjeg od 2. Rešenja ovakvih jednačina su zbog čestih primena standardizovana: *specijalne funkcije*. Smenom $u(t) = \phi(t)y(t)$, gde je ϕ rešenje jednačine $\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\pi}{\sigma}$, a π jedan od polinoma (stepena manjeg od 2)

$$\pi = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2})^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}$$

(konstanta k se bira tako da je potkorena veličina kvadrat binoma, što se svodi na jednačinu po k), nalazi se *hipergeometrijska jednačina*:

$$\sigma(t)y''(t) + \tau(t)y'(t) = \lambda y(t); \tag{2.11}$$

ovde je $\lambda = -k - \pi'$, a $\tau(t) = 2\pi(t) + \tilde{\tau}(t)$ (stepen τ manji od 2). Gornji izraz se može shvatiti kao svojstveni problem linearnog diferencijalnog operatora. Množenjem cele jednačine funkcijom $\rho(t)$ koja je na intervalu (a, b) pozitivna i zadovoljava *Pearson-ovu diferencijalnu jednačinu* $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, nalazi se:

$$[\sigma(t)\rho(t)y'(t)]' = \lambda\rho(t)y(t)$$

Tako je dobijen svojstveni problem (zadatak 2.41) Sturm-Liouville-ovog operatora (zadatak 2.35) u prostoru $\mathcal{L}^2((a, b), \rho)$. Na maksimalnom domenu na kome se može definisati operator je simetričan, a pogodnim izborom graničnih uslova, tj. suženjem, postaje autoadjungovan.

Teorem 2.3 *Operator $\frac{1}{\rho(t)}\frac{d}{dt}[\sigma(t)\rho(t)\frac{d}{dt}]$ sa domenom $\{f(t) \in \mathcal{L}^2((a, b), \rho) \mid \sigma(a)\rho(a)f(a) = \sigma(b)\rho(b)f(b) = 0\}$ u $\mathcal{L}^2((a, b), \rho)$, gde je ρ ograničena pozitivna funkcija na (a, b) za koju važi $(\sigma\rho)' = \tau\rho$, ima diskretni spektar $\{\lambda_n = n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' \mid n = 0, 1, \dots\}$ sa svojstvenim vektorima $x_n(t) = \frac{B_n}{\rho(t)}\frac{d^n}{dt^n}[\sigma^n(t)\rho(t)]$ (*Rodrigues-ov obrazac*), gde je B_n konstanta normiranja.*

Dakle, samo za one vrednosti λ za koje postoji n takvo da je $\lambda = \lambda_n$ iz teorema 2.3, postoji, i jedinstveno je do na konstantu, rešenje $u = \phi x_n$ jednačine (2.10) (pa i jednačine (2.11), koje zadovoljava granične uslove opisane u teoremu. Za druge vrednosti λ ne postoje rešenja ovakvog tipa.

Lako je zapaziti da su rešenja x_n polinomi stepena n. Ortogonalni su u prostoru $\mathcal{L}^2((a, b), \rho)$, jer su svojstveni vektori autoadjungovanog operatora za različite svojstvene vrednosti. Stoga su do na konstantu jednaki polinomima koji se dobijaju ortonormalizacijom skupa $\{1, t, t^2, \dots\}$ (zadatak 2.21). Nazivaju se *klasični ortogonalni polinomi*, a zbog mnogobrojnih niz njihovih svojstava je proučen, a rezultati standardizovani i tabulirani (npr. [D1]). U stvari, u zavisnosti od izbora σ i τ nalaze se osnovni tipovi ovih polinoma, navedeni u tabeli 2.1, dok se ostale mogućnosti dobijaju linearnom smenom promenljive t.

Klasični ortogonalni polinomi se mogu dobiti razvojem u stepeni red *generatrise*: $G(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{y}_n(t)}{n!}s^n$, gde je $\tilde{y}_n = \frac{y_n}{B_n}$. Tako se nalazi :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2ts + s^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)s^n \ , \quad \frac{e^{-\frac{st}{1-s}}}{(1 - s)^{1+\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(t)s^n \ , \quad e^{2st - s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t)\frac{s^n}{n!}.$$

Kako se ortogonalni polinomi mogu naći (zadatak 2.21) Gram-Schmidt-ovim postupkom iz skupa $\{1, t, t^2, \dots\}$, x_n je ortogonalan na span $(\{1, t, \dots, t^{n-1}\})$. Sledi da je $tx_n(t)$, kao polinom

Tabela 2.1: **Klasični ortogonalni polinomi.** *Među Jacobi-jevim polinomima su* Legendre-ovi polinomi $P_n(t) = P_n^{(0,0)}(t)$ *i* pridruženi Legendre-ovi polinomi $P_n^{(m)}(t) = P_n^{(m,m)}(t)$.

Naziv	(a, b)	$\sigma(t)$	$\tau(t)$	$\rho(t)$	x_n
Jacobi-jevi	$(-1, 1)$	$1 - t^2$	$\beta - \alpha -$ $-(\alpha + \beta + 2)t$	$(1-t)^\alpha \times$ $\times (1+t)^\beta$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n! [(1-t)^\alpha (1+t)^\beta]} \times$ $\frac{d^n}{dt^n}[(1-t)^{n+\alpha}(1+t)^{n+\beta}]$
Laguerre-ovi	$(0, \infty)$	t	$-t + \alpha + 1$	$t^\alpha e^{-t}$	$L_n^\alpha(t) = \frac{e^t t^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dt^n}[e^{-t} t^{n+\alpha}]$
Hermite-ovi	$(-\infty, \infty)$	1	$-2t$	e^{-t^2}	$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}[e^{-t^2}]$

stepena $n+1$, ortogonalan na $x_k(t)$ za $k > n+1$, dok je $x_n(t)$ ortogonalan na sve polinome $tx_k(t)$ za $k < n-1$. Stoga su Fourier-ovi koeficijenti $(x_k(t), tx_n(t)) = (tx_k(t), x_n(t))$ u razvoju polinoma $tx_n(t)$ nenulti samo za $k = n-1, n, n+1$. Tako se nalazi *rekurentna relacija*

$$tx_n(t) = c_{n-1}x_{n-1}(t) + c_n x_n(t) + c_{n+1}x_{n+1}(t). \tag{2.12}$$

Potpuno analogno, pošto je $x'_n(t)$ polinom stepena $n-1$, može se izraziti kao linearna kombinacija polinoma stepena manjeg od n, čime se dobija *jednačina diferenciranja*. Do konkretnih oblika ovih relacija dolazi se ili direktnim traženjem Fourier-ovog razvoja ili primenom generatrise:

$$(2n+1)tP_n(t) = nP_{n-1}(t) + (n+1)P_{n+1}(t), \quad tP'_n(t) = nP_n(t) + P'_{n-1}(t);$$

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(t) = (2n + \alpha + 1 - t)L_n^{(\alpha)}(t) - n(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(t), \quad \frac{d}{dt}L_n^{(\alpha)}(t) = -nL_n^{(\alpha-1)}(t);$$

$$tH_n(t) - nH_{n-1}(t) = \frac{1}{2}H_{n+1}(t), \quad H'_n(t) = 2nH_{n-1}(t).$$

Zadatak 2.45: Pokazati (2.12), i proveriti poslednje relacije.

Zadatak 2.46: Normirati Legendre-ove, Laguerre-ove i Hermite-ove polinome.

Zadatak 2.47: Rešiti svojstveni problem hamiltonijana harmonijskog oscilatora: $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}t^2$.

Zadatak 2.48: Rešiti radijalni deo svojstvene jednačine hamiltonijana čestice u Coulomb-ovom polju: $u'' + [2(E + \frac{Z}{t}) - \frac{l(l+1)}{t^2}]u = 0$.

Glava 3

TEORIJA GRUPA

Među brojnim algebarskim strukturama, u fizici se najčešće koristi grupa. Dovoljno je setiti se da je ova struktura ugrađena u konstrukciju vektorskih prostora i polja. Međutim, grupe se u fizici razmatraju i zasebno, u okviru opisa simetrija fizičkih sistema. U tom kontekstu su pre svega važne grupe transformacija, i zato će ovom pojmu biti posvećena posebna pažnja.

3.1 STRUKTURA GRUPE

3.1.1 Struktura i osnovni pojmovi

Počeci proučavanja grupa naziru se pred kraj 18. veka, a konačni naziv i današnju definiciju dao je Galois 1832. godine.

Definicija 3.1 Grupa *je uređeni par* $(G, \cdot)$ *nepraznog skupa* G *i binarne operacije "$\cdot$", pri čemu su zadovoljene sledeće četiri osobine, tzv.* aksiomi grupe[1]*:*

(i) *Binarna operacija je* zatvorena*: za svaka dva elementa* a, $b, \in G$ *je i* $a \cdot b \in G$. *(Algebarska struktura sa ovim svojstvom se naziva* grupoid.*)*

(ii) *Binarna operacija je* asocijativna*: za svaka tri elementa* $a, b, c \in G$ *važi* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. *(Asocijativni grupoid se naziva* polugrupa *ili* semigrupa*).*

(iii) *U* G *postoji jedinstveni tzv.* neutralni element, e*: za svako* $a \in G$ *je* $a \cdot e = e \cdot a = a$ *(Polugrupa sa neutralnim elementom naziva se* monoid.*)*

(iv) *Za svaki element* a *iz* G *u grupi postoji jedinstveni* inverzni element, a^{-1}*:* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Broj elemenata u grupi G *se naziva* red grupe *i označava sa* $|G|$. *Kada je* $|G|$ *konačan, kaže se da je grupa* G konačna, *a inače je* beskonačna.

[1] Navedeni skup aksioma nije minimalan. Naime, moguće je zahtevati egzistenciju samo levog (ili samo desnog) neutralnog i inverznog elementa, pa iz toga izvesti postojanje desnog (odnosno levog) neutralnog i inverznog elementa.

Tabela 3.1: **Tablica grupe:** *opšti slučaj, nekomutativna grupa S_3 i Klein-ova (Abel-ova) grupa $\mathbf{D}_2$ (zadaci 3.8 i 3.9).*

G	$g_1 = e$	$\cdots$	g_j	$\cdots$	$g_{\vert G\vert}$
e	e	$\cdots$	g_j	$\cdots$	$g_{\vert G\vert}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
g_i	g_i	$\cdots$	g_ig_j	$\cdots$	$g_ig_{\vert G\vert}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$g_{\vert G\vert}$	$g_{\vert G\vert}$	$\cdots$	$g_{\vert G\vert}g_j$	$\cdots$	$g^2_{\vert G\vert}$

S_3	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	f	d	c	b
b	b	d	e	f	a	c
c	c	f	d	e	b	a
d	d	b	c	a	f	e
f	f	c	a	b	e	d

$\mathbf{D}_2$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Već na osnovu definicije moguće je shvatiti osnovni razlog prodora teorije grupa u fiziku. Naime, i na intuitivnom nivou je jasno da se za svaki fizički sistem može odrediti skup transformacija koji ga ne menja. Na primer, za molekul, ili kristal, lako je uočiti izvesne rotacije, translacije ili refleksije, koje samo permutuju atome iste vrste, čime se fizička svojstva sistema ne mogu promeniti. Ovakve transformacije se nazivaju *transformacije simetrije*, ili samo *simetrije*, i nije teško uveriti se da čine grupu (zadatak 3.1), tzv. *grupu simetrije* sistema. U okviru različitih teorijskih formalizama fizike, simetrije sistema postaju transformacije koje ne menjaju veličine koje definišu dinamiku sistema, kao što je hamiltonijan u kvantnoj mehanici (zadatak 3.2). Iako je takve transformacije često teško intuitivno interpretirati, one i dalje čine grupu.

***Zadatak 3.1**:* Dokazati da je skup svih transformacija koje ostavljaju fizički sistem nepromenjenim grupa u odnosu na operaciju uzastopnog izvođenja tih transformacija.

***Zadatak 3.2**:* Dokazati da su skupovi svih nesingularnih, odnosno unitarnih operatora koji komutiraju sa operatorom H grupa.

Kaže se da je grupa *komutativna* ili *Abel-ova*, ako za svaka dva njena elementa a i b važi $a \cdot b = b \cdot a$. Kod Abel-ovih grupa grupna operacija se obično označava sa "+" i naziva *sabiranje*, dok se element e označava sa "0" i naziva *nulti*. Kod ostalih grupa se operacija najčešće naziva *grupno množenje*, njen znak se izostavlja, dok se termin neutralni element zamenjuje terminom *jedinični* element. Konačno, ukoliko se operacija podrazumeva iz konteksta, grupa se označava samo simbolom skupa. Osim toga, konvencijom se množenje proširuje i na podskupove grupe: ako su A i B dva podskupa, njihov proizvod je skup $AB = \{ab \mid a \in A\ , b \in B\}$.

Kad je grupa konačna, njeni elementi se mogu numerisati, $G = \{g_1 = e, g_2, \ldots, g_{|G|}\}$, što dozvoljava potpuno zadavanje množenja *tablicom grupe* (tab. 3.1). To je kvadratna šema kod koje se u prvoj koloni i vrsti nalaze elementi $g_1 = e, \ldots, g_{|G|}$, a u preseku i-te vrste i j-te kolone element g_ig_j. Očigledno je da je grupa Abel-ova ako i samo ako joj je tablica množenja simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.

Jedna od najvažnijih i najčešće korišćenih osobina grupe je poznata kao *lema preuređenja*

Lema 3.1 *U svakoj vrsti i svakoj koloni tablice množenja grupe svaki element grupe se nalazi tačno jedanput, tj. za svako $g \in G$ jednaki su skupovi G, gG i Gg.*

▬*Dokaz:* Ako bi se neki element g javio dva (ili više) puta u i-toj vrsti, postojali bi g_j i g_k takvi da je $g = g_i g_k = g_i g_j$, pa bi se množenjem sleva sa g_i^{-1} došlo do jednakosti $g_k = g_j$, koja protivreči različitosti elemenata G. Dalje, u svakoj vrsti ima $|G|$ elemenata iz G, pa ni jedan ne može nedostajati. ∎

Drugi način zadavanja grupa je preko *generatora* i *generatorskih relacija*. U svakoj prebrojivoj grupi se može izdvojiti neki minimalni podskup elemenata, generatora grupe, tako da se svaki element grupe može izraziti kao monom po njima (tj. njihovim stepenovanjem i višestrukim međusobnim množenjem dobija se cela grupa); množenje se zadaje generatorskim relacijama, tj. elementarnim pravilima množenja generatora (npr. pokazuju koji je najmanji stepen svakog od generatora jednak neutralnom elementu). Očigledno su najjednostavnije grupe sa samo jednim generatorom, tj. grupe čiji su svi elementi stepeni jednog od njih, g. Jasno je da je ovakva grupa Abel-ova, a ukoliko je konačna, postoji najmanji stepen, n, generatora jednak jediničnom elementu: $g^n = e$. Ovo je jedina generatorska relacija, a takva grupa se naziva *ciklična* grupa reda n, i označava sa $\mathbf{C}_n$.

Kod neprekidnih grupa sličnu ulogu imaju elementi iz okoline jediničnog elementa, što, u za fiziku relevantnoj klasi *Lie-jevih grupa*, dovodi do pojma infinitezimalnih generatora i *Lie-jevih algebri*.

Zadatak 3.3: Pokazati da su grupe sledeći skupovi linearnih operatora: *opšta linearna* grupa, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ (nesingularni operatori u prostoru $\mathbb{F}^n$), *specijalna linearna* grupa $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ (operatori iz $\mathbb{F}^n$ sa jediničnom determinantom), *unitarna* grupa, $\mathrm{U}(n)$ (unitarni operatori u prostoru $\mathbb{C}^n$), *specijalna unitarna*, $\mathrm{SU}(n)$ (unitarni operatori sa jediničnom determinantom), *ortogonalna grupa*, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ (ortogonalni operatori u $\mathbb{R}^n$), *specijalna ortogonalna grupa*, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ (ortogonalni operatori u $\mathbb{R}^n$ sa jediničnom determinantom).

Zadatak 3.4: Pokazati da je skup dvodimenzionalnih matrica oblika $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ beskonačna Abel-ovu grupa u odnosu na operaciju matričnog množenja. Proveriti da ona opisuje rotacije u ravni oko ose perpendikularne na tu ravan: elementi su određeni parametrom φ (ugao rotacije), dok je grupna operacija uzastopna rotacija, zadata izrazom $R(\phi)R(\phi') = R(\phi + \phi')$.

Zadatak 3.5: Pokazati da skup translacija u $\mathbb{R}^3$ čini Abel-ovu grupu u odnosu na operaciju uzastopnih translacija.

Zadatak 3.6: U Euklidovom prostoru $\mathbb{R}^n$ je zadat skup transformacija $\{(A \mid a) \mid A \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n\}$ definisanih dejstvom na proizvoljni vektor $x \in \mathbb{R}^n$: $(A \mid a)x \stackrel{\text{def}}{=} Ax + a$. Pokazati da skup ovih transformacija čini grupu (*Euklidova grupa*), E_n. Odrediti zakon množenja i inverzni element. Definisati *Poincaré-ovu grupu* po analogiji (grupu "ortogonalnih" transformacija i translacija u prostoru Minkowskog).

Zadatak 3.7:° Galilejeva transformacija $g(R, v, a, b)$ se karakteriše matricom $R \in \mathrm{O}(3, \mathbb{R})$, vektorom brzine $v \in \mathbb{R}^3$, vektorom prostorne translacije $a \in \mathbb{R}^3$ i dužinom vremenske translacije $b \in \mathbb{R}$, i njeno dejstvo na skupu događaja, $X = \{(r, t) \mid r \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$ (r je radijus vektor, a t vreme događaja) je $g(R, v, a, b)(r, t) \stackrel{\text{def}}{=} (Rr + vt + a, t + b)$. Pokazati da skup ovakvih transformacija čini grupu (*Galilejeva grupa*). Odrediti zakon množenja, jedinični i inverzni element.

Zadatak 3.8: Pokazati da je skup permutacija n objekata grupa u odnosu na kompoziciju permutacija (*simetrična* ili *permutaciona* grupa, S_n). Koliki je red ove grupe? Za grupu S_3 odrediti tablicu, generatore i generatorske relacije. Da li je S_3 Abel-ova?

Zadatak 3.9: Grupe simetrija molekula se nazivaju *tačkaste grupe*. Pokazati da su to podskupovi u O(3), tj. njihovi elementi su prave rotacije, inverzija ili njihovi proizvodi. Ni jedan element tačkaste grupe ne menja koordinatni početak, a one grupe čiji elementi ostavljaju nepromenjenom čitavu jednu osu nazivaju se *aksijalne tačkaste grupe*. Sve prave rotacije u ravni koje su simetrije pravilnog n-tougaonika obrazuju grupu $\mathbf{C}_n$ (pokazati da je to ciklična grupa reda n, generisana rotacijom za ugao $\frac{2\pi}{n}$), a prave rotacije u prostoru koje su simetrije iste figure, kao i pravilne n-ugaone prizme, obrazuju diedarsku grupu $\mathbf{D}_n$. Grupe pravih rotacija u prostoru koje su simetrije kocke (oktaedra) i tetraedra označavaju se sa $\mathbf{O}$ i $\mathbf{T}$, respektivno. Grupe svih ortogonalnih transformacija u prostoru koje ostavljaju neizmenjenima pravilnu n-ugaonu piramidu, pravilnu n-ugaonu prizmu, tetraedar i kocku označavaju se sa $\mathbf{C}_{nv}$, $\mathbf{D}_{nh}$, $\mathbf{T}_h$ i $\mathbf{O}_h$, respektivno. Među ovim grupama $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{D}_n$, $\mathbf{C}_{nh}$ i $\mathbf{D}_{nh}$ su aksijalne. Odrediti elemente, generatore, generatorske relacije. Naći tablice nekih od grupa $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{D}_n$ i $\mathbf{C}_{nv}$.

Zadatak 3.10: *Kvaternionska grupa*, K_8, generisana je elementima $\imath$ i $\jmath$, uz generatorske relacije $\imath^2 = \jmath^2 = -1$ i $\imath\jmath = -\jmath\imath$. Pokazati da je red grupe 8, i odrediti tablicu grupe.

3.1.2 Podgrupe

Podstruktura grupe se definiše na uobičajen način.

Definicija 3.2 *Podskup H grupe G koji je i sam grupa u odnosu na množenje zadato u G, naziva se* podgrupa *grupe G, što se označava sa $H < G$.*

Očigledno je da svaka podgrupa mora da sadrži neutralni element grupe. U svakoj grupi postoje dve *trivijalne podgrupe*: cela grupa i grupa $\{e\}$ (samo neutralni element). Presek dve podgrupe je podgrupa (analogni iskaz za uniju nije tačan u opštem slučaju).

Da bi se utvrdilo da li je neki podskup grupe podgrupa, nije neophodno proveriti ispunjenost svih aksioma grupe.

Teorem 3.1 **(i)** *Neprazan podskup H je podgrupa u grupi G ako i samo ako je zatvoren na množenje i invertovanje elemenata (aksiomi* **(i)** *i* **(iv)***).*

(ii) *Neprazan podskup H grupe G je podgrupa ako i samo ako za svaki par $h, h' \in H$ važi $h^{-1}h' \in H$.*

(iii) *Neprazan konačni podskup H je podgrupa u grupi G ako i samo ako je zatvoren (aksiom* **(i)***).*

▬*Dokaz:* Ako je H podgrupa, sve navedene osobine su očigledno ispunjene, te je potrebno pokazati samo da iz njih sledi da je H podgrupa. Pri tome se asocijativnost množenja uvek nasleđuje iz G nezavisno od ostalih aksioma.

(i) Preostali aksiomi grupe su tada uvek zadovoljeni: e pripada H, jer je zajedno sa h i h^{-1} iz H, pa $hh^{-1} = e \in H$.

(ii) Za $h' = h$ dobija se $h^{-1}h = e \in H$, a za $h' = e$ i $h^{-1}e = h^{-1} \in H$. Konačno, zamenom h^{-1} umesto h, potvrđuje se zatvorenost $(h^{-1})^{-1}h' = hh' \in H$.

(iii) Zajedno sa h, zbog zatvorenosti, u H su i svi stepeni od h. Pošto je H konačan skup, moraju postojati $n, m \in \mathbb{N}$, takvi da je $h^n = h^m$. Ako je $m < n$, onda je $e = h^{n-m} \in H$ i $h^{-1} = h^{n-m-1} \in H$, pa na osnovu prvog dela teorema, sledi da je H podgrupa. ▮

Zadatak 3.11: Pokazati: $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F}) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, $\mathrm{U}(n) < \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) < GL(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(n) < \mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) < \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{D}_n < \mathbf{D}_{nh}$. Slično, za tačkaste grupe proveriti da su $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{D}_n$, $\mathbf{T}$ i $\mathbf{O}$ podgrupe u SO(3), dok su $\mathbf{C}_{nv}$, $\mathbf{D}_{nh}$, $\mathbf{T}_h$ i $\mathbf{O}_h$ podgrupe u O(3).

Zadatak 3.12: Pokazati da su u grupi S_3 netrivijalne podgrupe $\{e,a\}$, $\{e,b\}$, $\{e,c\}$ i $A_3 = \{e,d,f\}$. Podgrupa A_3, reda 3, naziva se *alternirajuća* podgrupa i sadrži sve parne permutacije, tj. permutacije koje se razlažu na paran broj transpozicija (npr. $d = (13)(12)$).

Zadatak 3.13: Neka je h element grupe G za koji postoji konačan stepen jednak neutralnom elementu. Ako je n najmanji ovakav stepen, tj. $h^n = e$, pokazati da je podskup $\mathbf{C}_n = \{e = h^n, h, h^2, \dots, h^{n-1}\}$ Abel-ova podgrupa reda n, tzv. *ciklus* elementa h, i da je to najmanja podgrupa koja sadrži element h (njen red, n, se naziva *red elementa* h).

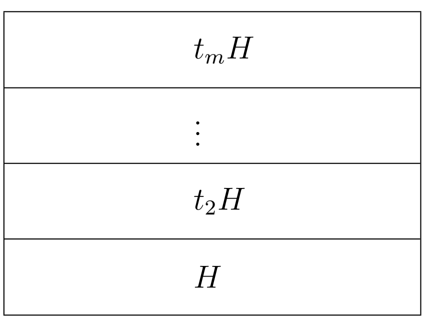
Zadatak 3.14: Neka je S proizvoljni podskup grupe G. *Centralizator skupa* S je skup, $Z(S)$, svih elemenata grupe koji komutiraju sa svakim elementom iz S, tj. $Z(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in G \mid \forall s \in S\ zs = sz\}$, a *normalizator*, $N(S)$, skupa S je skup elemenata iz G koji komutiraju sa podskupom S kao celinom (u smislu $\{ns_1, ns_2, \dots\} = \{s_1n, s_2n, \dots\}$ za $n \in N(S)$). Pokazati da su za svako $S \subset G$ centralizator i normalizator podgrupe u G. Ako je $S = G$, onda se $Z(G)$ naziva *centar* grupe G, a kad je S jednočlan podskup, njegovi centralizator i normalizator se podudaraju.

3.1.3 Lagrange-ov teorem i koseti

Lagrange-ov teorem, mada veoma jednostavan, ima značaj kako u samoj teoriji grupa, tako i istorijski, kao prvi stav o strukturi grupe. Formulisan je znatno pre konačne definicije samog pojma grupe, i zapravo je izazvao razvoj oblasti. Suština teorema je uočavanje da svaka podgrupa generiše particiju grupe.

Definicija 3.3 *Neka je $H = \{h_1 = e, h_2, \dots\}$ podgrupa grupe G. Skup $aH = \{a, ah_2, \dots\}$, $a \in G$ naziva se leva susedna klasa ili levi koset podrupe H određen predstavnikom a. Analogno, podskup Ha nosi naziv desna susedna klasa (desni koset). Pri tome se i podgrupa H smatra kosetom (sa predstavnikom e). Skup koji sadrži po jednog predstavnika svih koseta naziva se transverzala grupe za podgrupu H.*

Najvažnija svojstva koseta sumira



Slika 3.1: **Lagrange-ov teorem:** *particija grupe na kosete t_iH.*

Teorem 3.2 (Lagrange, 1771.) *Koseti su ili jednaki ili disjunktni (čine particiju grupe), i svi sadrže isti broj elemenata. Red podgrupe konačne grupe je delitelj reda grupe.*

▬*Dokaz:* Neka je $H = \{h_1 = e, h_2, \dots\}$ podgrupa u G. Ako je $H = G$, teorem je trivijalno ispunjen. Ako je H pravi podskup u G, postoji element t_2 iz G, koji ne pripada H. U kosetu $t_2H \stackrel{\text{def}}{=} \{t_2h_1 = t_2, t_2h_2, \dots\}$ svi elementi su međusobno različiti (lema preuređenja), i ne pripadaju H (jer bi $t_2h_i = h_j$ značilo da je $t_2 = h_jh_i^{-1} \in H$). Ukoliko skupovi H i t_2H ne iscrpljuju G, bira se element t_3 iz G, koji ne pripada ovim skupovima, i ponavlja postupak. Očigledno je da svaki koset sadrži isti broj elemenata kao i H. Ako je grupa G konačna, u nekom koraku, npr. m-tom, iscrpljuje se cela grupa. To znači da je grupa G unija m disjunktnih skupova: $G = H \cup t_2H \cup \cdots \cup t_mH$, od kojih svaki ima po $|H|$ elemenata. Stoga je $|G| = m|H|$. ▮

Broj $m = \frac{|G|}{|H|}$ se naziva *indeks* podgrupe H u grupi G. Pokazujući da su (levi) koseti podgrupe disjunktni, Lagrange-ov teorem daje particiju grupe: $G = t_1H + t_2H + \cdots$, gde je $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, transverzala. Naravno, isto važi i za desne kosete. Ove dve particije su u opštem slučaju različite.

Svaki element zadatog levog (desnog) koseta može biti uzet za predstavnika koji određuje taj koset. Naime, ako je a' proizvoljni element koseta aH, onda u podgrupi H postoji element h takav da je $a' = ah$. Tada je $a'H = ahH$, a kako je, na osnovu leme preuređenja, $hH = H$, važi $a'H = aH$. Stoga je jasno da pri zadatoj podgrupi, transverzala nije jednoznačno određena. Osim toga, vidi se da elementi a i a' pripadaju istom kosetu ako i samo ako je $a^{-1}a'$ iz H.

Zadatak 3.15:∘ Pokazati da inverzi leve transverzale ($T = \{t_1, \dots, t_{|T|}\}$) podgrupe H, čine desnu transverzalu iste podgrupe. Na osnovu toga dokazati da je pri fiksiranom q sa $G = \cup_{p=1}^{|T|} t_p H t_q^{-1}$ zadata jedna particija grupe, tj. da za svako q i $g \in G$ postoji tačno jedno p i $h \in H$, tako da je $g = t_p h t_q^{-1}$.

Zadatak 3.16: Odrediti sve podgrupe, njihove kosete i transverzale za grupe $\mathbf{C}_4$ i $\mathbf{C}_{4v}$.

Lagrange-ov teorem otkriva niz osobina grupe. Kako svaki element g reda p konačne grupe G generiše cikličnu podgrupu, $\mathbf{C}_p = \{g^p = e, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$, reda p, sledi da je red svakog elementa konačne grupe delitelj reda grupe. Red neutralnog elementa je 1, a samo kod cikličnih grupa red generatora može biti jednak redu grupe. Pri tome, ako je red grupe prost broj, onda nema netrivijalnih podgrupa; takva grupa je ciklična, a generisana je svakim svojim elementom (osim neutralnog), jer je njegov red jednak redu grupe. Poslednji zaključak ne važi za ciklične grupe čiji red nije prost broj: npr. grupu $\mathbf{C}_4 = \{e, a, a^2, a^3\}$ generišu samo a ili a^3, dok a^2 generiše podgrupu $\{e, a^2\}$.

3.1.4 Morfizmi grupa

U skladu sa opštom idejom morfizma, definišu se preslikavanja koja održavaju strukturu grupe.

Definicija 3.4 Homomorfizam *grupe G u grupu G' je preslikavanje f sa domenom jednakim G i likovima u G', takvo da je za svako $a, b \in G$ ispunjeno $f(ab) = f(a)f(b)$. Ako postoji homomorfizam $f : G \to G'$, kaže se da su grupe homomorfne, i piše $G \simeq G'$. Ako je homomorfizam surjektivan ($f(G) = G'$), odnosno injektivan (1-1), naziva se* epimorfizam*, odnosno preslikavanje je* monomorfizam*.* Izomorfizam *je bijektivni homomorfizam, za koji se koristi oznaka $G \cong G'$. Izomorfizam grupe G na samu sebe je* automorfizam*, a homomorfizam G u G je* endomorfizam*. Skup* $\ker f$ *svih elemenata iz G koje f preslikava u neutralni element $e' \in G'$ naziva se* jezgro *(ili* kernel*) homomorfizma:* $\ker f \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid f(g) = e'\}$.

Lako se proverava da je lik, $f(G)$, grupe G pri homomorfizmu f podgrupa u G', a da je $\ker f$ podgrupa u G. Ako je $k \in \ker f$, za svaki element $g \in G$ važi $f(gk) = f(g)f(k) = f(g)$, pa se u isti element $f(g) \in G'$ preslikava ceo koset $g \ker f$; obrnuto, ako je $f(a) = f(g)$ sledi $e' = f(a)f(g^{-1}) = f(ag^{-1})$, tj. $ag^{-1} \in \ker f$, pa se u svaki element iz $f(G)$ preslikava tačno jedan celi koset jezgra. Stoga je $\ker f = \{e\}$ potreban i dovoljan uslov da homomorfizam f bude izomorfizam G i $f(G)$.

Izomorfizam je refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija među grupama, tj. to je relacija ekvivalencije, koja skup svih grupa razbija na klase međusobno izomorfnih grupa. Sve grupe u jednoj klasi su jednake što se tiče grupne strukture, a razlikuje ih samo priroda njihovih elemenata. Očigledno je da izomorfne grupe imaju isti broj generatora, sa istim generatorskim relacijama, jednak broj podgrupa, koje su međusobno izomorfne. Konačno, uvodi se pojam *apstraktne grupe*: to je grupa kojoj je grupna struktura određena, klasom izomorfizma, a priroda elemenata nije konkretizovana. Tako je već razmotren primer apstraktne ciklične grupe $\mathbf{C}_n$, čija je jedna realizacija tačkasta grupa $\mathbf{C}_n$ (zadatak 3.9); druga realizacija je skup svih n-tih korena broja jedan u odnosu na množenje kompleksnih brojeva: $\{e^{\imath k \frac{2\pi}{n}} \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$.

Zadatak 3.17: Uspostaviti izomorfizam grupa $S_3 \cong \mathbf{D}_3 \cong \mathbf{C}_{3v}$. Generalno, pokazati da su diedarska grupa $\mathbf{D}_n$ i grupa $\mathbf{C}_{nv}$, različite realizacije apstraktne grupe $\mathbf{D}_n$, zadate sa dva generatora a i b i generatorskim relacijama $a^n = e$, $b^2 = e$ i $(ab)^2 = e$.

Zadatak 3.18: Čemu je jednako $(ab)^{-1}$? Pokazati da je preslikavanje $i(g) = g^{-1}$, za svako g iz G, jedan automorfizam Abel-ovih grupa.

Zadatak 3.19: Pokazati da je za proizvoljni element $h \in G$ preslikavanje $f_h(g) \stackrel{\text{def}}{=} hgh^{-1}$ jedan automorfizam grupe G (*konjugacija* ili *unutrašnji automorfizam* elementom h); dokazati da je skup svih unutrašnjih automorfizama grupe G grupa homomorfna sa G (ova grupa se označava sa $\mathrm{Int}(G)$). Šta je jezgro homomorfizma?

Zadatak 3.20: Pokazati da matrice $a = \begin{pmatrix} 0 & \imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}$ i $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ generišu grupu izomorfnu sa K_8 (zadatak 3.10).

3.1.5 Grupe transformacija

Već je istaknuto da se u fizici grupe pojavljuju kao skupovi transformacija koje ostavljaju fizički sistem nepromenjenim. I grupe linearnih operatora su takođe grupe transformacija u vektorskim prostorima. Stoga će grupe transformacija i neki izvedeni pojmovi biti posebno razmotreni, kako zbog značaja u fizici, tako i zbog kasnije primene u razvoju same teorije grupa.

Definicija 3.5 *Grupa G je grupa transformacija na skupu X ako postoji homomorfizam G u grupu S_X permutacija skupa X, tj. svakom elementu $g \in G$ je pridružena permutacija $\pi(g)$ skupa X. Kaže se i da G deluje na X, ili da je skup X jedan G-prostor, a preslikavanje π se naziva dejstvom grupe G na X.*

Ako za svake dve tačke $x, x' \in X$ postoji g takvo da je $\pi(g)x = x'$, kaže se da grupa G deluje tranzitivno na X. Dejstvo je efektivno ako iz $\pi(g)x = x$ za svako $x \in X$, sledi $g = e$, a slobodno, ako iz $\pi(g)x = x$, za bar jedno $x \in X$, sledi $g = e$.

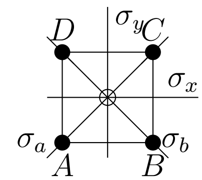
Tačka $x \in X$ je nepokretna (fiksna) za transformaciju g, ako je $\pi(g)x = x$. Mala grupa (stabilizator, grupa izotropije) tačke x je skup G_x svih elemenata iz G za koje je x nepokretna: $G_x \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \pi(g)x = x\}$. Orbita tačke x je skup $O_x \stackrel{\text{def}}{=} \pi(G)x = \{y \in X | \exists g \in G \quad \pi(g)x = y\}$.

Često se sami elementi grupe identifikuju sa njihovim dejstvom, tj. umesto $\pi(g)x$, piše se gx, ukoliko je značenje jasno iz konteksta.

Uz pomoć teorema 3.1(ii) se lako je pokazuje da je stabilizator G_x tačke x podgrupa u G. Osim toga, ako je y proizvoljna tačka u orbiti elementa x, pri čemu je $\pi(g)x = y$, mala grupa G_y je sa malom grupom G_x povezana unutrašnjim automorfizmom grupe G: ako je $l \in G_x$, tada je $\pi(g)\pi(l)\pi(g)^{-1}y = \pi(g)\pi(l)x = \pi(g)x = y$, tj. $glg^{-1} \in G_y$. Drugim rečima male grupe svih tačaka iste orbite su izomorfne. Konačno, za svako $l \in G_x$ je i $\pi(g)\pi(l)x = y$, tj. tačno svi elementi koseta gG_x preslikavaju x u istu tačku $y \in O_x$. Iz definicije je očigledno da su orbite ili disjunktne ili jednake, te daju particiju skupa X. Skup svih tačaka iz X čije su male grupe unutrašnje izomorfne naziva se *stratus*, i očigledno se sastoji od celih orbita, koje se u ovom smislu smatraju ekvivalentnim.

Zadatak 3.21: Izvesti jednakost $|G| = |G_x||O_x|$.

***Zadatak 3.22**:* Neka su joni molekula YX_4 raspoređeni na sledeći način: jon Y je u koordinatnom početku, dok su joni tipa X u temenima kvadrata $ABCD$ na slici. Smatrajući da je grupa simetrije ovog molekula $\mathbf{C}_{4v}$, odrediti orbite ove grupe i male grupe pojedinih jona.



***Zadatak 3.23**:* Šta su orbite tranzitivnog dejstva grupe G na skupu X, a šta su male grupe slobodnog dejstva?

***Zadatak 3.24**:* Odrediti sve orbite i male grupe dejstva grupe rotacija u $\mathbb{R}^3$ i grupe $\mathbf{C}_{4v}$ u $\mathbb{R}^2$.

Grupno množenje daje primer dejstva grupe na sebi, tzv. *multiplikativno* dejstvo, λ. Naime, prema lemi 3.1, svaki element g definiše, jednu permutaciju $\lambda(g)$ grupe G: $\lambda(g)g' \stackrel{\text{def}}{=} gg'$ (ova permutacija se dobija iz tablice grupe, tako što se prva i i-ta vrsta, koje odgovaraju elementima e i g_i, napišu jedna ispod druge). Jasno je da je u pitanju monomorfizam grupe G u grupu $S_{|G|}$, jer je $\lambda(g)\lambda(g')h = gg'h = \lambda(gg')h$. Iz leme 3.1 sledi i da je ovo dejstvo slobodno i tranzitivno. Time je pokazan

Teorem 3.3 (Cayley, 1854.) *Svaka konačna grupa G izomorfna je nekoj podgrupi permutacione grupe $S_{|G|}$.*

Stoga se permutacione grupe S_n pojavljuju kao grupe koje sadrže sve moguće apstraktne grupe reda n.

***Zadatak 3.25**:*$^\circ$ Definišući dejstvo podgrupe H na grupi G kao suženje multiplikativnog dejstva λ grupe na sebi, pokazati da koset Hg čini orbitu O_g ovog dejstva. Naći male grupe i odavde zaključiti da je dejstvo slobodno. Da li je tranzitivno?

3.1.6 Funkcije na grupi

U daljem tekstu će se često koristiti preslikavanja grupe u polje kompleksnih brojeva ili matrične algebre. Stoga je dobro uočiti da je skup svih funkcija $f : G \to \mathbb{C}$ vektorski prostor, čija je dimenzija jednaka redu grupe, $|G|$. Naime, sve ovakve funkcije su obrazovane linearno nezavisnim karakterističnim funkcijama elemenata grupe $f_g(h) = \begin{cases} 1, & \text{za } h = g, \\ 0, & \text{za } h \neq g. \end{cases}$ U slučaju konačnih grupa, u prostor funkcija na grupi je moguće uvesti skalarni proizvod definisan na sledeći način: $(f_1, f_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1^*(g)f_2(g)$, i dobijeni unitarni prostor ograničenih funkcija na grupi se obeležava sa $\mathcal{L}^2(G)$. Iako je ovakav skalarni proizvod definisan za konačne grupe, on se može proširiti i na kompaktne neprekidne grupe, kada se zapravo vrši integracija po svim elementima grupe. Upravo po mogućnosti ovakvog usrednjavanja po grupi, razlikuju se kompaktne (i konačne) od ostalih grupa, i ta razlika ima dalekosežne posledice u teoriji reprezentacija, pre svega se manifestujući na teoreme o unitarnosti. Ipak, treba napomenuti da i u slučaju nekih nekompaktnih grupa postoji mogućnost integracije u nešto izmenjenom smislu (Haar-ova mera).

3.1.7 Klase konjugacije

Već ranije je uveden pojam unutrašnjeg automorfizma ili konjugacije. Grupa svih unutrašnjih automorfizama daje jedno novo razlaganje grupe na klase ekvivalencije.

Definicija 3.6 *Elementi a i b grupe G međusobno su* konjugovani*, ako u G postoji bar jedan element g takav da važi $b = gag^{-1}$. Skup svih međusobno konjugovanih elemenata se naziva* klasa *(konjugacije).* Red klase *je broj elemenata u klasi.*

Drugi deo gornje definicije implicitno koristi činjenicu da je konjugacija jedna relacija ekvivalencije: svaki element je konjugovan sa samim sobom, jer je $a = eae^{-1}$ (refleksivnost); ako važi $b = gag^{-1}$, tada je i $a = g^{-1}bg = (g^{-1})a(g^{-1})^{-1}$ (simetričnost); ako je $b = gag^{-1}$ i $c = hbh^{-1}$, onda je $c = h(gag^{-1})h^{-1} = (hg)a(hg)^{-1}$ (tranzitivnost). Jasno je da su klase konjugacije u stvari klase ekvivalencije u odnosu na relaciju konjugacije.

Broj klasa u konačnoj grupi je konačan i označava se sa p, pri čemu će same klase biti obeležene sa $C^1, C^2, \ldots, C^p$. Posebno, kada je potrebno istaći klasu konjugacije kojoj pripada zadati element a (klasa elementa a) pisaće se $C(a)$; to je skup svih elemenata konjugovanih sa a: $C(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{gag^{-1} \mid g \in G\}$.

Konjugacijom je definisano još jedno dejstvo grupe na sebi: elementu g je pridružena transformacija $\iota(g) \in \mathrm{Int}(G)$, definisana sa $\iota(g)h = ghg^{-1}$. Klase konjugacije su orbite ovog dejstva, i one su najmanji podskupovi grupe G invarijantni pod delovanjem cele grupe unutrašnjih automorfizama. Istovremeno, $\iota(g)h = h$ znači da je $gh = hg$, pa je mala grupa elementa h upravo centralizator, $Z(h)$. Stoga je $|Z(h)||C(h)| = |G|$ (zadatak 3.21), a redovi klasa dele red grupe.

Očigledno je da je svaki element z centra $Z(G)$ grupe G klasa za sebe, tj. $C(z) = \{z\}$ (posebno, klasa $\{e\}$ neutralnog elementa će se označavati sa C^1). Kod Abel-ovih grupa je svaki element jedna klasa konjugacije.

Pošto za svaka dva elementa u jednoj klasi konjugacije postoji bar jedan unutrašnji automorfizam koji preslikava jedan element u drugi, to će oni imati jednake sve osobine koje su vezane za grupnu strukturu. Tako, na primer, svi elementi jedne klase imaju isti red (npr. kod grupa S_3, $\mathbf{D}_3$ i $\mathbf{C}_{3v}$, zadatak 3.17).

Skup elemenata koji su inverzni elementima iz neke klase konjugacije $C^i = \{a, b, \ldots\}$ čini ponovo jednu klasu konjugacije $C^{i'} = \{a^{-1}, b^{-1}, \ldots\}$, jer iz $b = gag^{-1}$ sledi $b^{-1} = ga^{-1}g^{-1}$. Očigledno je da je red klase C^i jednak redu klase $C^{i'}$. Specijalno, ako se klasa podudara sa klasom svojih inverznih elementata, naziva se *ambivalentna klasa*.

Zadatak 3.26: Odrediti sve klase konjugacije u grupama $\mathbf{C}_4$ i $\mathbf{C}_{4v}$. Koje od njih su ambivalentne?

Zadatak 3.27: Pokazati da je skup svih transpozicija jedna klasa konjugacije u S_n. Uopštavanjem ovoga odrediti sve klase u S_n.

Zadatak 3.28: • Pokazati da se skup proizvoda elemenata iz dve klase konjugacije sastoji od celih klasa konjugacije: svaki element iste klase u proizvodu se pojavljuje jednak broj puta, c_{ij}^k (*konstante klasa*), tj. važi $C^iC^j = \sum_{k=1}^{p} c_{ij}^k C^k$. Pokazati da je množenje klasa komutativno, $C^iC^j = C^jC^i$, odnosno da su konstante klasa simetrične u odnosu na permutaciju donjih indeksa $c_{ij}^k = c_{ji}^k$.

3.1.8 Invarijantne podgrupe

Među podgrupama grupe G posebno mesto zauzimaju one koje su, kao skupovi, invarijantne pod delovanjem grupe svih unutrašnjih automorfizma.

Heka je H podgrupa u G. Pri konjugaciji elementom $g \in G$ ona se preslikava u skup gHg^{-1}, koji je, pošto je u pitanju automorfizam grupe G, takođe podgrupa, i to izomorfna sa H. Ako je g iz H, podgrupe gHg^{-1} i H su jednake. Važnu klasu podgrupa čine one za koje je poslednja relacija ispunjena za svaki element g grupe G.

Definicija 3.7 *Za podgrupu gHg^{-1} se kaže da je* konjugovana *podgrupi H. Podgrupa H grupe G je* invarijantna podgrupa *(*normalna podgrupa*) ako za svaki element $g \in G$ važi $gHg^{-1} = H$. To se označava sa $H \triangleleft G$.*

Drugim rečima invarijantna podgrupa je samokonjugovana podgrupa za svako $g \in G$, odnosno invarijantna za sve unutrašnje automorfizame grupe G.

Sledeći očigledan stav pokazuje da je pojam invarijantne podgrupe moguće definisati na još dva ekvivalentna načina.

Teorem 3.4 *Heka je H podgrupa u G. Svaka od sledećih osobina je ekvivalentna činjenici da je H invarijantna podgrupa:*

(i) *leve i desne susedne klase podgrupe se podudaraju, tj. važi $\forall\, g \in G$ $gH = Hg$ (to ne znači da svaki element podgrupe komutira sa svakim elementom grupe, već samo da za svako $h \in H$ postoji $h' \in H$, takav da je $gh = h'g$ za bilo koje $g \in G$);*

(ii) *sa svakim svojim elementom H sadrži i celu njegovu klasu konjugacije, tj. H sadrži samo cele klase konjugacije.*

Lako se vidi da su kod svake grupe G njene trivijalne podgrupe (G i $\{e\}$) invarijantne. Grupa G koja osim ovih nema drugih invarijantnih podgrupa se naziva *prosta grupa*. Grupa je *poluprosta* ako ni jedna od njenih netrivijalnih invarijantnih podgrupa nija Abel-ova.

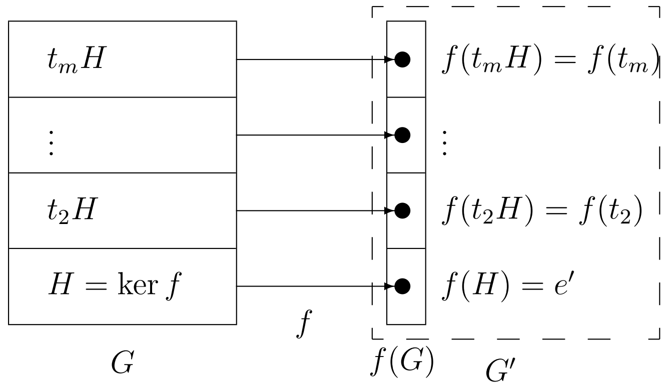
***Zadatak 3.29*:** Pokazati da su invarijantne podgrupe:

1. sve podgrupe Abel-ove grupe;
2. centar, $Z(G)$ svake grupe G;
3. sve podgrupe indeksa 2 proizvoljne grupe;
4. podgrupa parnih permutacija, A_n, grupe S_n;
5. sve podgrupe kvaternionske grupe K_8, iako grupa nije Abel-ova.

3.1.9 Faktor grupe

Za invarijantnu podgrupu H grupe G važi da proizvodi svih elemenata jednog njenog koseta aH (kod invarijantne podgrupe se ne razlikuju levi i desni koseti) sa svim elementima drugog koseta bH daju tačno jedan koset podgrupe H, tj. da je proizvod dva koseta opet koset iste podgrupe. Pri tome je ovako dobijeni koset određen predstavnikom ab, jer je $(aH)(bH) = (ab)H$. To znači da je skup koseta zatvoren u odnosu na ovako definisano množenje. Osim toga, u tom skupu postoji neutralni element H, a svakom elementu aH može se očigledno pridružiti inverzni $a^{-1}H$. Ako se uoči da je navedena operacija i asocijativna (što je posledica asocijativnosti množenja u G), zaključuje se da je skup svih koseta podgrupe H i sam grupa.

Definicija 3.8 *Grupa čiji su elementi koseti invarijantne podgrupe H, a grupno množenje definisano sa $(aH)(bH) \stackrel{\text{def}}{=} (ab)H$, $\forall a, b \in G$, naziva se* faktor grupa *ili* kvocijentna grupa *grupe G u odnosu na invarijantnu podgrupu H, i označava se sa G/H.*



Slika 3.2: **Struktura homomorfizma.** *Lik $f(G)$ homomorfizma f izomorfan je faktor grupi $G/\ker f$.*

Očigledno je da je red faktor grupe jednak indeksu podgrupe H u G: $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$.

Teorem 3.5 *Jezgro homomorfizma f grupe G u grupu G' je invarijantna podgrupa: $\ker f \triangleleft G$; preslikavanjem $\Phi(g \ker f) \overset{\text{def}}{=} f(g)$ definisan je izomorfizam faktor grupe $G/\ker f$ na grupu $f(G)$.*

▬*Dokaz:* Neka je $H = \ker f$. Za svako $k \in H$, svi elementi klase $C(k)$ su iz jezgra: $\forall g \in G$ $f(gkg^{-1}) = f(g)f(k)f(g^{-1}) = f(g)e'(f(g))^{-1} = e'$, te je $H \triangleleft G$. Pošto se u svaki element $f(G)$ preslikava tačno jedan koset jezgra, tj. tačno jedan element faktor grupe $F = G/H$, Φ je bijekcija F na $f(G)$. Konačno, da je Φ izomorfizam sledi iz $\forall a, b \in G$ $\Phi(aH)\Phi(bH) = f(a)f(b) = f(ab) = \Phi(abH) = \Phi((aH)(bH))$. ▮

Posebno, kada je grupa G' upravo faktor grupa u odnosu na neku invarijantnu podgrupu H, preslikavanje $k(g) \overset{\text{def}}{=} gH$ je tzv. *kanonični* homomorfizam (u stvari epimorfizam) grupe G na grupu G/H. Zbog toga teorem 3.5 pokazuje da se svaki homomorfizam f može predstaviti kao kompozicija, $f = \Phi \circ k$, kanoničnog homomorfizma grupe G na faktor grupu $G/\ker f$ i izomorfizma Φ grupe $G/\ker f$ na $f(G)$.

Zadatak 3.30: Za grupu $\mathbf{C}_{4v}$ odrediti sve invarijantne podgrupe i odgovarajuće faktor grupe. Na koje se apstraktne grupe $\mathbf{C}_{4v}$ može homomorfno preslikati?

Zadatak 3.31: Šta je faktor grupa za invarijantnu podgrupu čiji je indeks prost broj? Naći faktor grupu S_n/A_n (zadatak 3.29).

3.1.10 Proizvodi grupa i podgrupa

U konstrukciji i klasifikaciji grupa koriste se faktorizacije grupa u formi proizvoda podgrupa. Za ovakvu analizu je važno znati da li je skup $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$, dobijen grupnim množenjem elemenata podgrupa H i K, i sam grupa.

Lema 3.2 *Proizvod HK podgrupa H i K grupe G je podgrupa ako i samo ako H i K komutiraju: $HK = KH$ (tj. za svako $h \in H$ i $k \in K$ postoje elementi $h' \in H$ i $k' \in K$ takvi da je $hk = k'h'$).*

▬*Dokaz:* Iz $(h_1k_1)^{-1}(h_2k_2) = k_1^{-1}h_1^{-1}h_2k_2 = k_1^{-1}h_3k_2$, sledi da je ovaj element oblika h_4k_4 (tj. da je iz HK) ako i samo ako je $k_1^{-1}h_3 = h_4k_3$. Time je, na osnovu teorema 3.1, iskaz leme dokazan, jer su k_1^{-1} i h_3 proizvoljni elementi iz K odnosno H. ▮

Jedna očigledna posledica leme je da je HK podgrupa ako je bar jedan od faktora invarijantna podgrupa.

Na pitanje kada su faktori h i k u proizvodu $g = hk \in HK$ jednoznačno određeni, odgovor daje

Lema 3.3 *Faktori $h \in H$ i $k \in H$ elementa $g = hk$ iz proizvoda HK podgrupa H i K grupe G su jednoznačno određeni ako i samo ako je $H \cap K = \{e\}$.*

▬*Dokaz:* Neka u H postoje različiti elementi h i h', a u K različiti elementi k i k' takvi da je $hk = h'k'$. Tada je $e = h'^{-1}hkk'^{-1} = h''k''$, gde je $h'' = h'^{-1}h \in H$ i $k'' = kk'^{-1} \in K$. Pošto su H i K podgrupe, važi $h'' = k''^{-1}$, pa h'' pripada i K, a k'' pripada i H, tj. $H \cap K \subset \{e, h'', k''\}$, jer su i h'' i k'' različiti od e. Stoga nejednoznačnost faktorizacije povlači netrivijalnost preseka, tj. trivijalnost preseka povlači jednoznačnost faktora. Obratno, ukoliko iz $hk = h'k'$ sledi $h = h'$ i $k = k'$, onda je $h'' = k'' = e$, tj. $H \cap K = \{e\}$. ▮

Na osnovu dosad izloženog može se izvršiti jedna klasifikacija proizvoda podgrupa.

Definicija 3.9 *Grupa G je* proizvod podgrupa *(unutrašnji) H i K, $G = HK$, ako se svaki element $g \in G$ može predstaviti u obliku proizvoda $g = hk$, $h \in H$, $k \in K$. Posebno, G je*

(i) slabi direktni proizvod *svojih podgrupa H i K, $G = H \circ K$, ako je:*

$$(a)\ G = HK, \quad (b)\ H \cap K = \{e\};$$

(ii) semidirektni *(*poludirektni*) proizvod svojih podgrupa H i K, $G = H \wedge K$, ako je:*

$$(a)\ G = HK, \quad (b)\ H \cap K = \{e\}; \quad (c)\ H \triangleleft G.$$

(iii) direktni proizvod *svojih podgrupa H i K, $G = H \otimes K$, ako je:*

$$(a)\ G = HK, \quad (b)\ H \cap K = \{e\}; \quad (c)\ H, K \triangleleft G.$$

Očigledno, poludirektni proizvod je specijalan slučaj slabog direktnog proizvoda, a unutrašnji direktni proizvod specijalan slučaj poludirektnog proizvoda. Za sve ove proizvode se kaže da su unutrašnji, jer je grupa proizvod svojih podgrupa (uslov (a)), i faktori svakog elementa su jedinstveni (uslov (b)).

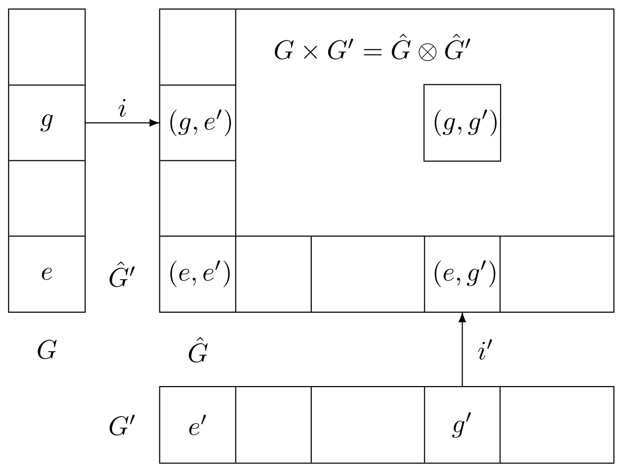
Unutrašnji proizvodi dozvoljavaju razlaganje neke grupe na podgrupe, što daje i ideju za konstrukciju novih grupa.

Definicija 3.10 Direktni proizvod *(spoljašnji) grupa G i G' je Descartes-ov proizvod $G \times G' = \{(g, g') \mid g \in G,\ g' \in G'\}$ ovih grupa, u kome je množenje indukovano množenjem u grupama G i G':*

$$(g_1, g_1') \circ (g_2, g_2') \stackrel{\text{def}}{=} (g_1g_2, g_1'g_2'),\ \ \forall (g_1, g_1'), (g_2, g_2') \in G \times G'.$$

Pošto je $G \times G'$ skup zatvoren u odnosu na definisano množenje, koje je zbog asocijativnosti množenja u G i G' i samo asocijativno, sadrži neutralni element (e, e'), i za svako (g, g') važi $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1}) \in G \times G'$, direktni proizvod grupa je i sam grupa. Njen red je $|G \times G'| = |G||G'|$.

U grupi $G \times G'$ skupovi $\hat{G} \overset{\mathrm{def}}{=} \{(g, e') \mid g \in G\}$ i $\hat{G}' \overset{\mathrm{def}}{=} \{(e, g') \mid g' \in G'\}$ su invarijantne podgrupe (slika 3.3), čiji je presek samo neutralni element (e, e'). Očigledno je da su $\hat{G}$ i $\hat{G}'$ izomorfne grupama G i G' respektivno, pri čemu su odgovarajući izomorfizmi prirodno definisani sa: $i(g) = (g, e')$ (izomorfizam G na $\hat{G}$) i $i'(g') = (e, g')$ (izomorfizam G' na $\hat{G}'$). Pri tome, za svaki element $(g, g') \in G \times G'$ postoje elementi $(g, e') \in \hat{G}$ i $(e, g') \in \hat{G}'$ takvi da je $(g, e') \circ (e, g') = (g, g')$. Stoga se spoljašnji direktni proizvod $G \times G'$ može shvatiti kao unutrašnji direktni proizvod podgrupa $\hat{G} \otimes \hat{G}'$, i obratno: $\hat{G} \otimes \hat{G}' = G \times G'$. U skladu sa lemom 3.3, element (g, g') jednoznačno određuje svoje faktore (g, e') i (e, g'). Sa druge strane, pošto elementi iz $\hat{G}$ komutiraju sa elementima iz $\hat{G}'$, $(g, e') \circ (e, g') = (g, g') = (e, g') \circ (g, e')$, uočeni izomorfizam odmah pokazuje da elementi podgrupa u unutrašnjem direktnom proizvodu komutiraju.



Slika 3.3: **Direktni proizvod grupa.**

Na sličan način se na nivou spoljašnjeg direktnog proizvoda lako pokazuju neka svojstva grupe, koja, zbog izomorfizma važe i za unutrašnji.

Lema 3.4 *Direktni proizvod jedne klase iz G i jedne klase iz G' je tačno jedna klasa iz $G \times G'$, pa je broj klasa konjugacije u $G \times G'$ jednak pp', gde su p i p' brojevi klasa konjugacije u G i G'.*

▬*Dokaz:* Iz jednakosti $(h, h') \circ (g, g') \circ (h, h')^{-1} = (hgh^{-1}, h'g'h'^{-1})$, $\forall h, g \in G$, $\forall h', g' \in G'$, sledi da klasu $C(g, g')$ elemenata konjugovanih sa (g, g') čini proizvod klasa $C(g)$ i $C(g')$. Odavde je odmah jasno i da je broj klasa u $G \times G'$ upravo pp'. ▮

Koriste se i drugi unutrašnji proizvodi grupa, kao što su generalisani poludirektni i generalisani direktni proizvodi, kod kojih je $H \cap K$ pravi nadskup skupa $\{e\}$, dok su uslovi (a) i (c) nepromenjeni u odnosu na prethodne definicije (generalisani slabi direktni proizvod je obični unutrašnji proizvod podgrupa). Takođe se sreće i pojam spoljašnjeg poludirektnog proizvoda grupe G i neke podgrupe Ω grupe svih automorfizama u G, kao i neke druge generalizacije.

Proizvodi grupa i podgrupa omogućavaju proučavanje i konstrukciju složenih grupa preko njihovih podgrupa. Kako ciklične grupe imaju najjednostavniju strukturu, jedan od pravaca teorije grupa bio je posvećen predstavljanju konačnih grupa u obliku proizvoda cikličnih podgrupa. Pokazalo se da je to u mnogim slučajevima moguće.

Zadatak 3.32: Pokazati da je grupa kompleksnih brojeva u odnosu na sabiranje direktni proizvod dve grupe realnih brojeva u odnosu na sabiranje.

Zadatak 3.33: Neka je $K = \{A\}$ multiplikativna grupa matrica iz $\mathbb{F}^{nn}$ i $H = \{b\}$ aditivna grupa vektora iz $\mathbb{F}^n$. Pokazati da je skup $G = \{(A, b) = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A \in K,\ b \in H\}$ grupa izomorfna sa $H \wedge K$.

Zadatak 3.34: Sve aksijalne tačkaste grupe moguće je napisati u obliku direktnih ili poludirektnih proizvoda cikličnih grupa; proveriti sledeće faktorizacije: $\mathbf{D}_n = \mathbf{C}_n \wedge \mathbf{D}_1$ ($\mathbf{D}_1 = \{e, U\} \cong \mathbf{C}_2$); $\mathbf{C}_{nv} = \mathbf{C}_n \wedge \mathbf{C}_{1v}$ ($\mathbf{C}_{1v} = \{e, \sigma_v\} \cong \mathbf{C}_2$); $\mathbf{D}_{nh} = \mathbf{C}_{nv} \otimes \mathbf{C}_{1h} = (\mathbf{C}_n \wedge \mathbf{C}_{1v}) \otimes \mathbf{C}_{1h}$ ($\mathbf{C}_{1h} = \{e, \sigma_h\} \cong \mathbf{C}_2$, σ_h je refleksija u ravni ortogonalnoj na osu rotacije u grupi $\mathbf{C}_n$. Odavde sledi da su sve aksijalne tačkaste grupe izomorfne sa nekom od apstraktnih grupa $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{C}_n \otimes \mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_n \wedge \mathbf{C}_2 \cong \mathbf{D}_n$, $\mathbf{D}_n \otimes \mathbf{C}_2$ i $\mathbf{D}_n \wedge \mathbf{C}_2$. Posebno, proveriti $\mathbf{D}_2 \cong \mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{C}_2$.

3.2 TEORIJA REPREZENTACIJA GRUPA

Sa pojavom kvantne mehanike, vektorski prostori su preuzelu ulogu matematičke osnove opisa stanja fizičkog sistema. U tom kontekstu se i transformacije na fizičkom sistemu moraju shvatiti kao operatori, koji delujući u prostoru stanja, odražavaju svojstva simetrija. Preciznije, kvantna mehanika koristi grupe linearnih operatora, koje su homomorfni likovi intuitivno jasnih grupa transformacija. Ne čudi stoga što su u razvoju ovog, za fiziku najznačajnijeg dela teorije grupa, nakon prvih koraka početkom ovog veka (Frobenius, Burnside), veliku ulogu imali i fizičari, pre svega Eugen Wigner.

3.2.1 Definicija i osnovni pojmovi

Reprezentacija grupe je poseban vid homomorfizma.

Definicija 3.11 Reprezentacija *(linearna) $D(G)$ grupe G u kompleksnom vektorskom prostoru $\mathcal{H}$ (tzv.* prostor reprezentacije *ili* noseći prostor*) je podgrupa grupe nesingularnih linearnih operatora u $\mathcal{H}$, koja je lik grupe G po homomorfizmu*[2] *D: $D(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{D(g) \mid g \in G\} < \mathrm{GL}(\mathcal{H})$, uz uslov homomorfizma $\forall g, g' \in G$ $D(gg') = D(g)D(g')$. Dimenzija, $|\mathcal{H}|$, prostora $\mathcal{H}$ naziva se* dimenzija reprezentacije*, i označava sa $|D(G)|$. Reprezentacija je* verna *ako je D izomorfizam, a* unitarna*, ako su svi operatori $D(G)$ unitarni (u odnosu na zadati skalarni proizvod u $\mathcal{H}$).*

U slučaju kada je $\mathcal{H}$ prostor brojnih kolona, $\mathbb{C}^n$, operatori iz $D(G)$ su matrice iz algebre $\mathbb{C}^{nn}$, i govori se o *matričnoj* reprezentaciji grupe G. Očigledno je da se i u opštem slučaju, odabiranjem bazisa u $\mathcal{H}$, operatorima iz $D(G)$ pridružuju njihovi matrični predstavnici, čime se dobija jedna matrična reprezentacija izomorfna sa $D(G)$.

[2] U matematičkoj literaturi se pod reprezentacijom podrazumeva morfizam D, dok se u fizičkoj literaturi termin reprezentacija odnosi i na morfizam i na njegov lik, što će biti usvojeno i u ovom tekstu.

Elementarni primeri reprezentacija su jednodimenzionalne matrične reprezentacije, kod kojih se elementima grupe pridružuju kompleksni brojevi: takva reprezentacija obrazuje podgrupu grupe kompleksnih brojeva (bez nule) u odnosu na množenje. Drugi primer reprezentovanja svake grupe u proizvoljnom vektorskom prostoru dobija se kada se svim elementima grupe pridruži jedinični operator I; posebno, kada je $\mathcal{H}$ upravo polje $\mathbb{C}$, svakom elementu odgovara broj 1, i ova jednodimenzionalna matrična reprezentacija se naziva *jedinična*. Ako je G i sama jedna grupa matrica, identično preslikavanje, $D(g) = g$ je verna, tzv. *identična* reprezentacija grupe G.

U teoriji reprezentacija konačnih grupa važnu ulogu će imati matrična reprezentacija koja opisuje grupno množenje.

Definicija 3.12 Regularna reprezentacija *grupe G reda n je matrična reprezentacija $D^R(G)$ u prostoru $\mathbb{C}^n$, definisana*[3] *sa* $D^R_{ij}(g_k) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(g_i g_j^{-1}, g_k) = \delta(g_i^{-1} g_k g_j, e)$.

Ovo je tzv. leva regularna reprezentacija, a slično se može uvesti i desna regularna reprezentacija. Očigledno je da se u svakoj vrsti i svakoj koloni matrica regularne reprezentacije nalazi tačno po jedna jedinica, dok su svi ostali elementi nule. Matrice regularne reprezentacije se najjednostavnije dobijaju pomoću modifikovane tablice množenja grupe: u prvoj vrsti se ispišu elementi $g_1^{-1} = e, g_2^{-1}, \dots, g_n^{-1}$, dok je prva kolona ista kao i u običnoj tablici množenja. Matrica $D^R(g_k)$ nalazi se tako što se na mestima gde se u modifikovanoj tablici množenja nalazi element g_k upisuje broj 1, a na svim ostalim mestima 0. Reprezentacija je verna, jer je jezgro homomorfizma D^R samo neutralni element grupe G (samo njemu je pridružena jedinična matrica). Jasno je da je u pitanju specijalan slučaj prirodne reprezentacije (zadatak 3.35), za multiplikativno dejstvo grupe na sebi (§ 3.1.5).

Zadatak 3.35: Grupa G dejstvuje na skupu X. Proglašavajući elemente toga skupa za bazisne vektore $|X|$-dimenzionalnog prostora $L(X)$, pokazati da dejstvo grupe daje matričnu, tzv. *permutacionu* (ili *prirodnu*), reprezentaciju: $D^P(g)x \stackrel{\text{def}}{=} gx$. Šta su njeni matrični elementi?

Zadatak 3.36: Neka je G grupa linearnih operatora na $\mathbb{R}^n$, i $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ prostor skalarnih funkcija na $\mathbb{R}^n$. Pokazati da je sa $\forall g \in G,\ \forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n),\ D(g)f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^{-1}x)$ definisana jedna, tzv. *koordinatna*, reprezentacija grupe G.

Zadatak 3.37: Odrediti matrice regularne reprezentacije grupa $\mathbf{C}_4$ i $\mathbf{C}_{4v}$.

Zadatak 3.38: Neka je $\{|\, i\rangle \mid i = 1, \dots, N\}$ bazis prostora $\mathcal{H}$, i

$$\{|\, i_1, \dots, i_n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\, i_1\rangle \otimes \dots \otimes |\, i_n\rangle \mid i_1, \dots, i_n = 1, \dots, N\}$$

nekorelisani bazis direktnog proizvoda prostora $\mathcal{H}^n = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n}$. Pokazati da je u $\mathcal{H}^n$ definisana jedna reprezentacija simetrične grupe S_n sa $\Delta(\pi) \mid i_1, \dots, i_n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\, i_{\pi^{-1}1}, \dots, i_{\pi^{-1}n}\rangle$. Da li je unitarna?

[3] Smisao Kronecker-ovog simbola je proširen: $\delta(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{za } a = b, \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$, bez obzira da li su argumenti a i b brojevi ili ne (npr. elementi grupe).

3.2.2 Ekvivalentnost i unitarnost reprezentacija

Neka je A nesingularni linearni operator koji (izomorfno) preslikava vektorski prostor $\mathcal{H}$ na vektorski prostor $\mathcal{H}'$, i neka je $D(G)$ reprezentacija u $\mathcal{H}$. Skup operatora $D'(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{D'(g) = AD(g)A^{-1} \mid g \in G\}$ iz $\mathcal{H}'$ (ekvivalentni operatorima $D(G)$ u odnosu na izomorfizam A) je takođe reprezentacija grupe G, jer su svi operatori $D'(g)$ nesingularni i ispunjen je uslov homomorfizma: $D'(gg') = AD(gg')A^{-1} = AD(g)A^{-1}AD(g')A^{-1} = D'(g)D'(g')$.

Definicija 3.13 *Reprezentacije $D(G)$ i $D'(G)$ su* ekvivalentne*, ako postoji nesingularni operator A koji preslikava prostor prve na prostor druge reprezentacije, tako da važi $D'(g) = AD(g)A^{-1}$, $\forall g \in G$. Ovo se označava sa $D(G) \sim D'(G)$.*

Jedan slučaj ekvivalentnih reprezentacija je kada je A automorfizam vektorskog prostora $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, i nastaje pri promeni bazisa kojim se operatorska reprezentacija prevodi u matričnu. Ekvivalencija reprezentacija je relacija ekvivalencije na skupu svih reprezentacija grupe, te ga razbija na klase međusobno ekvivalentnih reprezentacija. Stoga je, za klasifikaciju reprezentacija date grupe, što je jedan od osnovnih zadataka teorije grupa (pre svega zbog dalekosežnog značaja za fiziku), dovoljno odrediti po jednog predstavnika iz svake klase ekvivalencije, tj. skup svih neekvivalentnih reprezentacija.

Za koncept simetrije u fizici su značajni unitarni operatori. Naime, intuitivna predstava simetrije — transformacija koja ne menja osobine sistema — jezikom kvantne fizike se odmah izražava kao linearni operator koji ne menja opservabilne veličine. A opservabilne su verovatnoće i srednje vrednosti različitih operatora, i sve su zapravo skalarni proizvodi. Stoga operatori simetrije moraju biti unitarni, tj. unitarna je reprezentacija grupe simetrije u prostoru stanja. Time so otvara pitanje postojanja unitarnog predstavnika klase ekvivalentnih reprezentacija.

Teorem 3.6 (Schur-Auerbach) *Za svaku reprezentaciju konačne (kompaktne) grupe u unitarnom prostoru postoji ekvivalentna unitarna reprezentacija.*

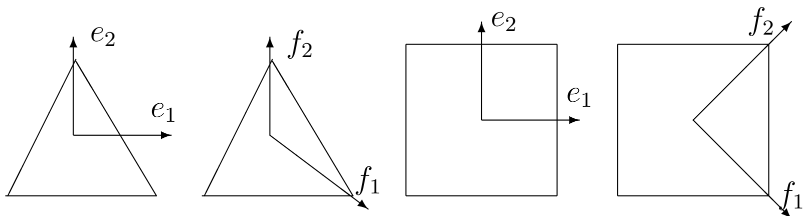
▬*Dokaz:* Neka je $D(G)$ reprezentacija grupe G u konačno-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{H}$, sa skalarnim proizvodom $(\,,\,)$. Lako je proveriti da je $\langle x, y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}(D(h)x, D(h)y)$ takođe skalarni proizvod u $\mathcal{H}$. U odnosu na skalarni proizvod $\langle\,,\,\rangle$ svi operatori reprezentacije $D(G)$ su unitarni: $\langle D(g)x, D(g)y\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}(D(hg)x, D(hg)y) = \langle x, y\rangle$, pošto je, na osnovu leme preuređenja, za neki zadati element $g \in G$ skup $\{hg \mid h \in G\}$ jednak sa G. Neka je $\{u_1, \dots, u_{|\mathcal{H}|}\}$ bazis u prostoru $\mathcal{H}$, ortonormiran u odnosu na skalarni proizvod $(\,,\,)$, a $\{v_1, \dots, v_{|\mathcal{H}|}\}$ bazis istog prostora, ortonormiran u odnosu na skalarni proizvod $\langle\,,\,\rangle$. Ova dva bazisa definišu nesingularni operator prelaska A jednačinama: $u_i = Av_i$, $(i = 1, \dots, |\mathcal{H}|)$. Pri tome je $(Av_i, Av_j) = (u_i, u_j) = \delta_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle = \langle A^{-1}u_i, A^{-1}u_j\rangle$ (za sve $i, j = 1, \dots, |\mathcal{H}|$). Odavde je za svako x i y iz $\mathcal{H}$ ispunjeno $(x, y) = \langle A^{-1}x, A^{-1}y\rangle$ i $\langle x, y\rangle = (Ax, Ay)$. Sada se pomoću operatora A uvodi nova reprezentacija $D'(G)$, kod koje je za svaki element g grupe G ispunjeno $D'(g) = AD(g)A^{-1}$. Ona je očigledno ekvivalentna sa $D(G)$, a osim toga je i unitarna u odnosu na skalarni proizvod $(\,,\,)$, jer je $(D'(g)x, D'(g)y) = (AD(g)A^{-1}x, AD(g)A^{-1}y) = \langle D(g)A^{-1}x, D(g)A^{-1}y\rangle = \langle A^{-1}x, A^{-1}y\rangle = (x, y)$. ∎

Teorem 3.6 u stvari znači da se za svaku konačno-dimenzionalnu reprezentaciju $D(G)$ konačne grupe G u unitarnom prostoru može naći njoj ekvivalentna unitarna reprezentacija $D'(G)$ u istom prostoru u odnosu na isti skalarni proizvod. Kako je dokaz baziran na sumiranju po grupi, postojanje unitarnih ekvivalentnih reprezentacija je karakteristika konačnih i *kompaktnih* grupa (npr. SO(3) i SU(n)).

Zadatak 3.39: • Neka je $D(G)$ reprezentacija konačne (kompaktne) grupe G u unitarnom prostoru $\mathcal{H}$. Proveriti da je operator $C = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} D^\dagger(g)D(g)$ strogo pozitivan, i da njegov jedinstveni pozitivni koren T (tj. $T^2 = C$)

transformacijom sličnosti daje unitarnu reprezentaciju $D'(G) = TD(G)T^{-1}$ grupe G u istom prostoru. Ovo je konstruktivni dokaz teorema 3.6.

Zadatak 3.40: Odrediti reprezentacije dejstva grupe $\mathbf{C}_{3v}$ u ravni u bazisima na slikama (a) i (b). Isto za grupu $\mathbf{C}_{4v}$ u bazisima (c) i (d). Pokazati da su dobijene reprezentacije ekvivalentne, i odrediti matricu prelaska koja ih povezuje. Koje su unitarne?



(a) (b) (c) (d)

Zadatak 3.41: *Polarno-vektorska reprezentacija* grupe G koja je podgrupa u $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ je reprezentacija $D^{pv}(G)$ dejstva ove grupe u $\mathbb{R}^3$, gde se vektori ovog prostora smatraju polarnim vektorima (npr. koordinate ili impulsi). Na sličan način se definiše i *aksijalno-vektorska* reprezentacija, $D^{av}(G)$, samo se vektori smatraju za aksijalne (npr. ugaoni ili magnetni momenti). Odrediti polarne i aksijalne reprezentacije u Descartes-ovom bazisu, za grupe $\mathbf{C}_4$, $\mathbf{C}_{4v}$ i $\mathbf{D}_4$. Kada su polarna i aksijalna reprezentacija grupe jednake?

3.2.3 Ireducibilne reprezentacije

Zadatak određivanja neekvivalentnih reprezentacija se dodatno pojednostavljuje[4] zapažanjem da se sve reprezentacije date grupe mogu izraziti pomoću ograničenog broja najprostijih.

Definicija 3.14 *Neka je $D(G)$ reprezentacija grupe G u prostoru $\mathcal{H}$. Reprezentacija $D(G)$ u prostoru $\mathcal{H}$ je* reducibilna *ako postoji netrivijalni potprostor $\mathcal{H}_1$ ($0 < |\mathcal{H}_1| < |\mathcal{H}|$), invarijantan za sve operatore reprezentacije; ako takvi potprostori ne postoje, reprezentacija je* ireducibilna. *Ako je prostor $\mathcal{H}$ moguće razložiti na direktnu sumu invarijantnih potprostora, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, kaže se da je $D(G)$* razloživa *reprezentacija, te da je* suma *reprezentacija $D_1(G)$ i $D_2(G)$ (operatori reprezentacija $D_i(G)$ su redukovani operatori reprezentacije $D(G)$ u prostorima $\mathcal{H}_i$). To se označava sa $D(G) = D_1(G) \oplus D_2(G)$, a reprezentacije $D_i(G)$ se nazivaju* podreprezentacije *ili* komponente *reprezentacije $D(G)$. Kada je $\mathcal{H}$ unitarni prostor i pri tome ortogonalni zbir invarijantnih potprostora $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$, govori se o* ortogonalnoj sumi *reprezentacija.*

Treba shvatiti da je reducibilnost reprezentacije osobina skupa operatora $D(G)$, i zapravo nije povezana sa grupom G.

Ireducibilne reprezentacije će biti istaknute gornjim grčkim indeksom u zagradi, koji će ih i prebrojavati: $D^{(\mu)}(G)$. Kako će se pokazati, konačna grupa ima konačno mnogo neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija. Njihov broj se označava sa r, a ispostaviće se da je to upravo broj klasa konjugacije u grupi. Dimenzija ireducibilne reprezentacije $D^{(\mu)}(G)$ se označava sa $|\mu|$. Simbol $D^{(1)}(G)$ je rezervisan za jediničnu reprezentaciju. Najjednostavniji primeri ireducibilnih reprezentacija su jednodimenzionalne reprezentacije. Drugi primer, tablica svih ireducibilnih reprezentacija grupe $\mathbf{C}_{4v}$ (tab.

Tabela 3.2: **Ireducibilne reprezentacije $\mathbf{C}_{4v}$.** *Množenjem matrica generatora C_4 i σ_x dobijaju se matrice ostalih elemenata. Oznake A_m se koriste u fizici molekula.*

$\mathbf{C}_{4v}$	C_4	σ_x
$D^{(1)} = A_0$	1	1
$D^{(2)} = B_0$	1	-1
$D^{(3)} = A_2$	-1	1
$D^{(4)} = B_2$	-1	-1
$D^{(5)} = E$	$\begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & -\imath \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[4] "Problemi se rešavaju pojednostavljivanjem, sve do konačne trivijalizacije" (Lav Landau).

3.2), ilustruje činjenicu da su reprezentacije grupe
određene matricama generatora, kao i vezu broja neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija i broja klasa konjugacije.

Zadatak 3.42: Pokazati da je sa $\forall r \in \mathbb{R}\ D(r) = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zadata reducibilna nerazloživa reprezentacija grupe $(\mathbb{R}, +)$, i odrediti invarijantni potprostor.

Zadatak 3.43:° Neka je $D(G)$ reprezentacija grupe G u prostoru $\mathcal{H}$. Pokazati da svaka orbita dejstva $D(G)$ u $\mathcal{H}$ obrazuje invarijantni potprostor, tj. da je $\forall x \in \mathcal{H}$ prostor $\mathcal{H}_x = \operatorname{span}\{D(G)x\}$ invarijantan. Šta je $\mathcal{H}_x$ ako je $D(G)$ ireducibilna?

Neka je $D(G)$ reducibilna reprezentacija, i neka je u $\mathcal{H}$ (čija je dimenzija n) odabran prilagođeni bazis takav da prvih $m = |\mathcal{H}_1|$ vektora čine bazis u invarijantnom potprostoru $\mathcal{H}_1$. U tom bazisu matrice reprezentacije imaju oblik:

$$\forall g \in G\ D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & B(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

gde su $D_1(g)$ i $D_2(g)$ kvadratne matrice dimenzija m i $n-m$, respektivno, a matrica $B(g)$ je pravougaona tipa $m \times (n-m)$. Kako je

$$D(gh) = D(g)D(h) = \begin{pmatrix} D_1(g)D_1(h) & D_1(g)B(h) + B(g)D_2(h) \\ 0 & D_2(g)D_2(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(gh) & B(gh) \\ 0 & D_2(gh) \end{pmatrix},$$

sledi da su skupovi matrica $D_1(G) = \{D_1(g) \mid g \in G\}$ i $D_2(G) = \{D_2(g) \mid g \in G\}$ i sami reprezentacije grupe G dimenzija m i $n-m$ respektivno. Potprostor $\mathcal{H}_2$, obrazovan preostalim vektorima izabranog bazisa, jedan je od direktnih komplemenata invarijantnog potprostora $\mathcal{H}_1$, tj. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$; pri tome on nije invarijantan za reprezentaciju $D(G)$. Ako je dodatno, pored $\mathcal{H}_1$, i neki od njegovih direktnih komplemenata invarijantan, tada su, u bazisu koji je prilagođen na tu dekompoziciju prostora $\mathcal{H}$, matrice svih operatora iz reprezentacije $D(G)$ kvazidijagonalne, $D(G) = \begin{pmatrix} D_1(G) & 0 \\ 0 & D_2(G) \end{pmatrix}$ (svaka matrica $D(g)$ je direktna suma matrica $D_1(g)$ i $D_2(g)$), što opravdava formulacije korišćene u definiciji 3.14.

Ako je $\mathcal{H}_1$ invarijantni potprostor za reprezentaciju $D(G)$ koja deluje u prostoru $\mathcal{H}$ i ako je $D'(G) = AD(G)A^{-1}$ reprezentacija u prostoru $\mathcal{H}'$, onda je potprostor $\mathcal{H}'_1 = A\mathcal{H}_1$ jedan invarijantni potprostor za reprezentaciju $D'(G)$. Takođe je jasno da je redukovana reprezentacija $D_1(G)$ u potprostoru $\mathcal{H}_1$ ekvivalentna redukovanoj reprezentaciji $D'_1(G)$ u potprostoru $\mathcal{H}'_1$, pošto je A izomorfizam prostora reprezentacija. Odavde sledi da se ekvivalentne reprezentacije redukuju na isti način (tj. reducibilnost je osobina klase ekvivalentnih reprezentacija), te je dovoljno ispitati reducibilnost po jednog predstavnika svake klase.

Odnos reducibilnosti i razloživosti je posebno jednostavan za unitarne reprezentacije. Stoga ga, za iste grupe na koje se odnosi teorem 3.6, rešava Masche-ov teorem.

Teorem 3.7 (Masche) *Reducibilna reprezentacija konačne (kompaktne) grupe je razloživa.*

▬*Dokaz:* Pošto kod konačnih grupa u svakoj klasi ekvivalentnih reprezentacija postoji unitarna, biće razmotrena upravo takva reducibilna reprezentacija $D(G)$. Neka je njen prostor $\mathcal{H}$, a invarijantni potprostor $\mathcal{H}_1$. Poznato je da za unitarne operatore važi da je ortokomplement invarijantnog potprostora i sam invarijantan, pa je $\mathcal{H}_1^\perp$ takođe invarijantan za $D(G)$. Samim tim je $D(G) = D_1(G) \oplus D_2(G)$, gde su $D_1(G)$ i $D_2(G)$ redukovane reprezentacije u $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_1^\perp$ respektivno. ▮

Zadatak 3.44: • Neka je $D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & B(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$ reducibilna reprezentacija grupe G u prostoru $\mathbb{C}^n$. Pokazati da se ekvivalentna razložena reprezentacija dobija transformacijom sličnosti $AD(g)A^{-1}$ pomoću nesingularne matrice $A = \begin{pmatrix} I_m & -C \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$, gde je $C = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} B(g)D_2(g^{-1})$. Ovo je istovremeno i aternativni dokaz teorema 3.7.

Sa druge strane, svaka razloživa reprezentacija je očigledno i reducibilna, pa su kod konačnih (odnosno svih kompaktnih) grupa pojmovi reducibilnosti i razloživosti ekvivalentni. U stvari, dokaz prethodnog teorema se može ponoviti za unitarnu reprezentaciju bilo koje grupe, te su sve unitarne reprezentacije ili ireducibilne ili razložive.

Ako u izrazu (3.1) podreprezentacije $D_1(G)$ i $D_2(G)$ nisu ireducibilne, postupak razlaganja se može produžiti dok se celi prostor ne razloži na direktnu sumu potprostora u kojima deluju ireducibilne reprezentacije. Tada se kaže da je reprezentacija $D(G)$ potpuno redukovana, a, ako su ti potprostori invarijantni potpuno razložena. Jasno, svaka unitarna reprezentacija bilo koje grupe (a svaka reprezentacija konačne ili kompaktne grupe) je ireducibilna ili se potpuno razlaže na ireducibilne. Vidi se da je problem određivanja svih reprezentacija neke zadate grupe sveden na određivanje skupa neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija te grupe, što je veoma značajno uprošćenje. Naravno, u slučaju grupa čije reprezentacije nisu uvek razložive, klasifikacija reprezentacija podrazumeva i klasifikaciju operatora povezivanja $B(g)$ u izrazu (3.1). Ovaj zadatak spada u komplikovanu teoriju kohomologija, no, za fizičke probleme je od sekundarnog interesa, jer se razmatraju prvenstveno unitarne reprezentacije[5]. Treba naglasiti da je unitarnost dovoljan, ali ne i potreban uslov za razloživost. Tako, pored konačnih i kompaktnih, postoje i druge klase grupa čije su sve konačno-dimenzionalne reducibilne reprezentacije razložive (npr. poluproste Lie-jeve grupe). Kasnije će postati jasno da se unitarnost (time i razloživosti) reprezentacija u fizici često ostvaruje po cenu uvođenja beskonačno-dimenzionalnih reprezentacija.

Neka ireducibilna reprezentacija $D^{(\mu)}(G)$ može se pri razlaganju razložive reprezentacije $D(G)$ javiti više puta, pa je opšti oblik razlaganja $D(G) = \oplus_{\mu=1}^{r} a_\mu D^{(\mu)}(G)$, gde je a_μ *broj pojavljivanja* ili *frekvencija* ireducibilnih reprezentacija iz klase ekvivalencije reprezentacije $D^{(\mu)}(G)$.

Zadatak 3.45: Neka je H invarijantna podgrupa u grpi G. Pokazati da svaka reprezentacija $D(F)$ faktor grupe $F = G/H$ određuje jednu reprezentaciju grupe G izrazom $\forall g \in G\ D(g) \overset{\text{def}}{=} D(gH)$.

3.2.4 Schur-ove leme

Schur je 1905. godine dokazao dva teorema o ireducibilnim skupovima operatora (bez netrivijalnih zajedničkih invarijantnih potprostora), i oni su osnovni stavovi u teoriji ireducibilnih reprezentacija kako grupa, tako i drugih algebarskih struktura. Biće navedeni u matričnoj formulaciji, kao što je uobičajeno.

Teorem 3.8 (Prva Schur-ova lema) *Ako matrica $M \in \mathbb{C}^{nn}$ komutira sa svim matricama jedne ireducibilne reprezentacije $D^{(\mu)}(G)$, definisane u prostoru $\mathbb{C}^n$, ona je skalarna, tj. $M = \lambda I$.*

Dokaz: Matrica M, kao operator u $\mathbb{C}^n$, ima bar jedan svojstveni vektor v; neka je odgovarajuća svojstvena vrednost λ. Svojstveni potprostor $\mathcal{H}_\lambda$ ove svojstvene vrednosti je najmanje jednodimenzionalan. Poznati stav linearne algebre, da su svojstveni potprostori nekog operatora A invarijantni za operatore koji komutiraju sa

[5] To se odnosi i na ostatak ovog teksta!

A, povlači da je $\mathcal{H}_\lambda$ invarijantan za celu reprezentaciju $D^{(\mu)}(G)$. Pošto je $D^{(\mu)}(G)$ ireducibilna, $\mathcal{H}_\lambda$ mora biti trivijalan potprostor, i to upravo $\mathbb{C}^n$ (definicija 3.14): $\mathcal{H}_\lambda = \mathbb{C}^n$. Ovo je ekvivalentno sa $M = \lambda I$. ∎

Tako je dobijen jedan *kriterijum ireducibilnosti* reprezentacija: $D(G)$ je ireducibilna ako i samo ako samo skalarne matrice komutiraju sa svim matricama reprezentacije. Teorem 3.8 je iskazao potrebnost ovog uslova za ireducibilnost reprezentacije. Sa druge strane, kod reducibilne reprezentacije matrice imaju, u prilagođenom bazisu, kvazidijagonalni oblik, sa subreprezentacijama na dijagonali: $D(g) = D_1(G) \oplus D_2(G)$. Svaka kvazidijagonalna matrica M, čije su podmatrice na dijagonali proizvoljne skalarne matrice, $M = \lambda_1 I_1 \oplus \lambda_2 I_2$, komutira sa svim matricama iz $D(G)$, iako sama (za međusobno različite vrednosti λ_1 i λ_2) nije skalarna. Prema tome, kod reducibilnih reprezentacija, skalarne matrice nisu jedine koje komutiraju sa svim matricama reprezentacije, što pokazuje i dovoljnost uslova.

Na osnovu teorema 3.8 može se dokazati

Lema 3.5 *Ireducibilne reprezentacije Abel-ovih grupa su jednodimenzionalne.*

▬*Dokaz:* Svaka matrica bilo koje ireducibilne reprezentacije Abel-ove grupe mora komutirati sa svim matricama reprezentacije, te je skalarna, a time i dijagonalna. Očigledno je onda, ukoliko je reprezentacija višedimenzionalna, da je reducibilna. ∎

Teorem 3.9 (Druga Schur-ova lema) *Neka su $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$ dve matrične neekvivalentne ireducibilne reprezentacije konačne grupe G. Tada jednakost $MD^{(\mu)}(g) = D^{(\nu)}(g)M$ za svaki element g grupe G zadovoljava samo nulta matrica M tipa $|\nu| \times |\mu|$.*

▬*Dokaz:* Pretpostaviće se da su reprezentacije $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$ unitarne, a posle će se pokazati da stav važi i u opštem slučaju. Prvi korak u dokazu je da se uoči da matrica $MM^\dagger$ komutira sa svim matricama reprezentacija $D^{(\nu)}(G)$. U stvari, adjungovanjem uslova iz iskaza teorema, nalazi se $D^{(\mu)\dagger}(g)M^\dagger = M^\dagger D^{(\nu)\dagger}(g)$. Koristeći prvo unitarnost reprezentacija $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$, a zatim činjenicu da je zbog homomorfizma ispunjeno $D^{(\mu)-1}(g) = D^{(\mu)}(g^{-1})$ i analogno za $D^{(\nu)}(G)$, nalazi se $D^{(\mu)}(g^{-1})M^\dagger = M^\dagger D^{(\nu)}(g^{-1})$. Pošto ovo važi za sve elemente grupe G, mora biti ispunjeno i $D^{(\mu)}(g)M^\dagger = M^\dagger D^{(\nu)}(g)$. Množenjem sa M sleva, i korišćenjem uslova iz iskaza teorema, nalazi se $D^{(\nu)}(g)MM^\dagger = MM^\dagger D^{(\nu)}(g)$, tj. $MM^\dagger$ komutira sa svim matricama reprezentacije $D^{(\nu)}(G)$. No, onda je $MM^\dagger = \lambda I_\nu$, prema teoremu 3.8.
Sledeći korak u dokazu je analiza različitih mogućnosti odnosa dimenzija reprezentacija $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$. Ako je $|\mu| = |\nu|$, M mora biti singularna matrica, jer bi inače, suprotno polaznoj pretpostavci, reprezentacije $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$ bile ekvivalentne. Ali tada je $\det MM^\dagger = \det M \det M^\dagger = 0$, odakle sledi (pošto je $\det MM^\dagger = \lambda^{|\nu|}$) da je $\lambda = 0$, odnosno da je $MM^\dagger = 0$. Ovo dalje povlači $\mathrm{Tr}\, MM^\dagger = 0$, odnosno $\sum_{i=1}^{|\nu|}\sum_{j=1}^{|\nu|} \mid m_{ij} \mid^2 = 0$, pa je i $M = 0$. Za $|\nu| > |\mu|$ matrica M se može dopuniti do kvadratne matrice M' tipa $|\nu| \times |\nu|$ dodavanjem $|\nu| - |\mu|$ nultih kolona. Očigledno je sada da važi $M'M'^+ = MM^+ = \lambda I_\nu$. Isto kao i malopre, iz činjenice da je M' singularna, sledi $M' = 0$, a time i $M = 0$. Za $|\nu| < |\mu|$ dokaz je analogan prethodnom slučaju.
Konačno, treba pokazati da teorem važi i za reprezentacije koje nisu unitarne. Naime, kada $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$ nisu unitarne, onda je, prema teoremu 3.6, uvek moguće naći nesingularne matrice A i B takve da reprezentacije $D^{(\mu)'}(g) = AD^{(\mu)}(g)A^{-1}$ i $D^{(\nu)'}(g) = BD^{(\nu)}(g)B^{-1}$ budu unitarne. Uslov koji zadovoljava matrica M daje $\forall g \in G\ M(A^{-1}D^{(\mu)'}(g)A) = (B^{-1}D^{(\nu)'}(g)B)M$, odnosno, množeći sleva sa B, a zdesna sa A^{-1}, $(BMA^{-1})D^{(\mu)'}(g) = D^{(\nu)'}(g)(BMA^{-1})$. Prema prethodnom delu dokaza nalazi se $BMA^{-1} = 0$, a zbog nesingularnosti matrica A i B sledi $M = 0$. ∎

3.2.5 Relacije ortogonalnosti

Schur-ove leme se mogu iskoristiti za dokazivanje važnih odnosa među matričnim elementima ireducibilnih reprezentacija neke grupe. To je sadržaj teorema o ortogonalnosti matričnih elemenata.

Teorem 3.10 (Veliki teorem ortogonalnosti) *Neka su $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$ dve matrične ireducibilne reprezentacije konačne grupe G. Tada među matričnim elementima ovih reprezentacija* *važe sledeće* relacije ortogonalnosti*:*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}_{ij}(g^{-1})D^{(\nu)}_{km}(g) = \frac{1}{|\nu|}(A^{-1})_{kj}(A)_{im}\delta_{\mu\nu},$$

gde je $\delta_{\mu\nu} = 0$ ako su $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$ neekvivalentne, a $\delta_{\mu\nu} = 1$ ako za svako g iz G važi $D^{(\mu)}(g) = AD^{(\nu)}(g)A^{-1}$.

▬*Dokaz:* Neka je $M(X) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}(g^{-1})XD^{(\nu)}(g)$ matrica tipa $|\mu|\times|\nu|$. U slučaju kada je X element Weyl-ovog bazisa prostora $\mathbb{C}^{|\mu||\nu|}$, tj. skupa $\{E^{jk} \mid j=1,\dots,|\mu|;\ k=1,\dots,|\nu|; (E^{jk})_{st} = \delta_{js}\delta_{kt}\}$, nalazi se

$$(M(E^{jk}))_{im} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{s=1}^{|\mu|}\sum_{t=1}^{|\nu|} D^{(\mu)}_{is}(g^{-1})(E^{jk})_{st}D^{(\nu)}_{tm}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}_{ij}(g^{-1})D^{(\nu)}_{km}(g).$$

Desna strana poslednje jednakosti je istovremeno i leva strana jednakosti iz iskaza teorema, pa će u nastavku dokaza biti izračunata. Korišćenjem leme preuređenja pokazuje se da za svako $h\in G$ važi:

$$M(X)D^{(\nu)}(h) = D^{(\mu)}(h)\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} D^{(\mu)}((gh)^{-1})XD^{(\nu)}(gh) = D^{(\mu)}(h)M(X).$$

U slučaju kada su $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$ neekvivalentne reprezentacije, poslednja jednakost prema drugoj Schur-ovoj lemi povlači da je $M(X) = 0$, za svako X. Kada se za X uzmu matrice pomenutog apsolutnog bazisa, dobija se iskaz teorema za slučaj neekvivalenih reprezentacija $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$. U slučaju kada je $D^{(\mu)}(g) = AD^{(\nu)}(g)A^{-1}$, nalazi se $M(X)D^{(\nu)}(h) = AD^{(\nu)}(h)A^{-1}M(X)$, tj. $D^{(\nu)}(h) = (A^{-1}M(X))^{-1}D^{(\nu)}(h)(A^{-1}M(X))$, što prema prvoj Schur-ovoj lemi znači $A^{-1}M(X) = \lambda(X)I_\nu$, odnosno $M(X) = \lambda(X)A$. Trag pretposlednje jednakosti, za $X = E^{jk}$, daje $\operatorname{Tr} A^{-1}M(E^{jk}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr} A^{-1}(AD^{(\nu)}(g^{-1})A^{-1})E^{jk}D^{(\nu)}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\operatorname{Tr} A^{-1}E^{jk} = (A^{-1})_{kj} = \lambda(E^{jk})|\nu|$, tj. $\lambda(E^{jk}) = (A^{-1})_{kj}/|\nu|$. Prema tome je $(M(E^{jk}))_{im} = \frac{1}{|\nu|}(A^{-1})_{kj}(A)_{im}$. ▮

U slučaju unitarnih reprezentacija $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$, relacije ortogonalnosti su

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} D^{(\mu)*}_{ji}(g)D^{(\nu)}_{km}(g) = \frac{1}{|\nu|}(A^{-1})_{kj}(A)_{im}\delta_{\mu\nu},$$

jer je tada $D^{(\mu)}_{ij}(g^{-1}) = D^{(\mu)*}_{ji}(g)$. U fizici se obično unapred zadaje skup matričnih unitarnih neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija grupe G. Stoga su ekvivalentne reprezentacije zapravo jednake, pa je A jedinični operator, i tada relacije ortogonalnosti dobijaju formu koja će u daljem tekstu biti korišćena:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} D^{(\mu)*}_{ji}(g)D^{(\nu)}_{km}(g) = \frac{1}{|\nu|}\delta_{jk}\delta_{im}\delta_{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

Teorem 3.10 se može shvatiti kao iskaz o ortogonalnosti funkcija $D^{(\mu)}_{ij}(G)$ ($\mu = 1,\dots,r$, $i,j = 1,\dots,|\mu|$) iz $\mathcal{L}^2(G)$. Očigledno, ove funkcije nisu normirane, a norma im je $|\mu|^{-1/2}$, tako da se kao ortonormirani skup funkcija iz $\mathcal{L}^2(G)$ dobija skup $\{\sqrt{|\mu|}D^{(\mu)}_{ij}(G) \mid \mu = 1,\dots,r; i,j = 1,\dots,|\mu|\}$:

$$(\sqrt{|\mu|}D^{(\mu)}_{ji}(G), \sqrt{|\nu|}D^{(\nu)}_{km}(G)) = \delta_{\mu\nu}\delta_{jk}\delta_{im},$$

Kako prostor $\mathcal{L}^2(G)$ ima dimenziju $|G|$, a za svaku ireducibilnu reprezentaciju $D^{(\mu)}(G)$ postoji $|\mu|^2$ ortonormiranih vektora iz ovog prostora, nalazi se da je $\sum_{\mu=1}^r n_\mu^2 \leq |G|$. Kasnije će biti pokazano (teorem 3.12) da ovde važi znak jednakosti.

3.2.6 Ireducibilne reprezentacije cikličnih grupa

Na osnovu prve Schur-ove leme moguće je odrediti sve neekvivalentne ireducibilne reprezentacije cikličnih grupa. Pre svega, ove grupe su Abel-ove, te su im sve ireducibilne reprezentacije jednodimenzionalne. Sa druge strane, u cikličnoj grupi $\mathbf{C}_n$ postoji generator g, takav da se svaki element grupe može izraziti kao stepen elementa g: za svako h iz $\mathbf{C}_n$ postoji tačno jedan prirodni broj $k \leq n$, takav da je $h = g^k$. Pri tome je $e = g^n$, tako da svaka ireducibilna reprezentacija grupe $\mathbf{C}_n$ mora zadovoljavati jednačine:

$$D^{(\mu)}(h) = D^{(\mu)^k}(g),\ D^{(\mu)^n}(g) = D^{(\mu)}(e) = 1.$$

Iz prve jednakosti je jasno da je za određivanje cele reprezentacije $D^{(\mu)}(\mathbf{C}_n)$ dovoljno odrediti broj $D^{(\mu)}(g)$, koji reprezentuje generator g. Druga jednakost pokazuje da je $D^{(\mu)}(g)$ jedan od n n-tih korenova broja jedan. Znači, postoji ukupno n neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija grupe $\mathbf{C}_n$, i to su $D^{(\mu)}(\mathbf{C}_n),\ \mu = 0, \dots, n-1$. Element g je u reprezentaciji $D^{(\mu)}(\mathbf{C}_n)$ reprezentovan sa: $D^{(\mu)}(g) = e^{2\pi\imath\frac{\mu}{n}}$. Treba uočiti da je jedinična reprezentacija obeležena sa $D^{(0)}(\mathbf{C}_n)$, i da su dobijene reprezentacije automatski unitarne.

Umesto navedenog, može se uzeti simetrični interval za μ: za n parno $\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm\frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}$; za n neparno $\mu = 0, \pm 1, \dots, \pm\frac{n-1}{2}$. Ireducibilne reprezentacije grupe $\mathbf{C}_n$ se tada označavaju sa $A_\mu(\mathbf{C}_n)$.

Zadatak 3.46: Odrediti ireducibilne reprezentacije grupa $\mathbf{C}_n$ $(n = 1, \dots, 6)$, kao i za beskonačnu cikličnu grupu T, generisanu translacijom za jediničnu dužinu u prostoru $\mathbb{R}$. Koje od ovih reprezentacija su unitarne.

3.2.7 Karakter reprezentacije

Pojedine osobine reprezentacija grupa, od koji su neke relevantne za fiziku, određene su samo tragovima matrica reprezentacije. Naravno, to je posledica nezavisnosti traga od bazisa reprezentovanja (trag je jedna od invarijanti svakog operatora), pa se ovako mogu ispitati samo karakteristike cele klase ekvivalentnih reprezentacija.

Definicija 3.15 Karakter, *$\chi(G)$, reprezentacije $D(G)$ je funkcija na grupi G (vektor u prostoru $\mathcal{L}^2(G)$), koja svakom elementu g grupe pridružuje trag operatora $D(g)$: $\chi(g) = \operatorname{Tr} D(g)$. Karakteri ireducibilnih reprezentacija grupe nazivaju se* primitivni karakteri.

Neutralni element grupe je uvek reprezentovan jediničnim operatorom, čiji je trag jednak dimenziji prostora reprezentacije: $\chi(e) = |D(G)|$.

Glavne osobine karaktera daje

Teorem 3.11 *(i) Dve reprezentacije konačne grupe G su ekvivalentne ako i samo ako imaju jednake karaktere (kao vektore u $\mathcal{L}^2(G)$).*

(ii) Elementi iste klase konjugacije imaju istu vrednost karaktera, tj. karakter je funkcija na skupu klasa konjugacije grupe.

(iii) Karakter $\chi(G)$ reducibilne reprezentacije $D(G)$ jednak je sumi karaktera podreprezentacija.

(iv) Karakteri ireducibilnih reprezentacija konačne (kompaktne) grupe G su ortonormirani vektori u prostoru $\mathcal{L}^2(G)$ (tzv. mali teorem ortogonalnosti*):*

$$(\chi^{(\mu)}(G), \chi^{(\nu)}(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(\mu)^*}(g)\chi^{(\nu)}(g) = \delta_{\mu\nu}$$

($\delta_{\mu\nu} = 1$ ako su reprezentacije $D^{(\mu)}(G)$ i $D^{(\nu)}(G)$ ekvivalentne, a $\delta_{\mu\nu} = 0$ u suprotnom slučaju).

(v) Za razloživu reprezentaciju $D(G) = \oplus_{\mu=1}^{r} a_\mu D^{(\mu)}(G)$, konačne ili kompaktne grupe sa primitivnim karakterima $\{\chi^{(\mu)}(G),\ \mu = 1, \dots, r\}$, frekvencije ireducibilnih komponenti su

$$a_\mu = (\chi^{(\mu)}(G), \chi(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(\mu)*}(g)\chi(g).$$

▬*Dokaz:* **(i)** Svaka reprezentacija $D'(G)$ ekvivalentna sa $D(G)$ se dobija iz $D(G)$ transformacijom sličnosti pomoću nesingularnog operatora A (definicija 3.13). No, trag je invarijantan na transformaciju sličnosti, čime je dokazano da ekvivalentnost reprezentacija povlači jednakost karaktera. Da bi se dokazao obratan iskaz, pretpostaviće se da je $\chi(G) = \chi'(G)$ i napisati $D(G)$ i $D'(G)$ u potpuno razloženom obliku[6]: $D(G) = \sum_\mu a_\mu D^{(\mu)}(G)$ i $D'(G) = \sum_\mu a'_\mu D^{(\mu)}(G)$. Na osnovu stava (v) (koji će biti nezavisno dokazan), iz jednakosti karaktera sledi $a_\mu = a'_\mu$, $\mu = 1, \dots, r$, tj. ireducibilne komponente u $D(G)$ i $D'(G)$ su međusobno jednake, u razloženoj formi $D(G)$ i $D'(G)$ se razlikuju najviše po redosledu ireducibilnih komponenti. Tada je uvek moguće naći nesingularnu matricu A koja će transformacijom sličnosti prevesti $D(G)$ u $D'(G)$, tako što će permutovati komponente, što dokazuje ekvivalentnost reprezentacija.
(ii) Za svako $g, h \in G$ je $\chi(hgh^{-1}) = \operatorname{Tr} D(hgh^{-1}) = \operatorname{Tr} D(h)D(g)D^{-1}(h) = \operatorname{Tr} D(g) = \chi(g)$. Dakle, cela klasa konjugacije ima istu vrednost karaktera.
(iii) Ako je $D(G) = D_1(G) \oplus D_2(G)$, uzimanjem traga u bazisu prilagođenom na odgovarajuću dekompoziciju prostora reprezentacije $D(G)$, nalazi se $\operatorname{Tr} D(g) = \operatorname{Tr} D_1(g) + \operatorname{Tr} D_2(g)$ za svako g iz G.
(iv) Karakteri ekvivalentnih reprezentacija su jednaki, i može se izabrati unitarni predstavnik klase ekvivalencije. Izborom $i = j$ i $k = m$ u (3.2), i sumiranjem po i i k, dobija se tražena relacija.
(v) Stav (iii) daje $\chi(g) = \sum_{\mu=1}^{r} a_\mu \chi^{(\mu)}(g)$. Množenjem sa $\frac{1}{|G|}\chi^{(\nu)*}(g)$ i sumiranjem po g, nalazi se $(\chi^{(\nu)}(G), \chi(G)) = \sum_{\mu=1}^{r} a_\mu (\chi^{(\nu)}(G), \chi^{(\mu)}(G)) = a_\nu$, (iskorišćen stav (iv)). ∎

Odavde se dobija novi *kriterijum ireducibilnosti* reprezentacija. Za reprezentaciju $D(G) = \oplus_{\mu=1}^{r} a_\mu D^{(\mu)}(G)$ ispunjeno je $(\chi(G), \chi(G)) = \sum_{\mu=1}^{r} a_\mu^2$. Ako i samo ako je $D(G)$ ireducibilna, svi koeficijenti a_μ su jednaki 0, osim jednoga koji je 1, pa je $(\chi(G), \chi(G)) = 1$. U svim ostalim slučajevima (kada je reprezentacija $D(G)$ reducibilna) ovaj skalarni proizvod je veći od 1. To znači da je za ireducibilnost reprezentacije $D(G)$, čiji je karakter $\chi(G)$, potrebno i dovoljno da bude $(\chi(G), \chi(G)) = 1$.

***Zadatak 3.47**:* Odrediti karakter permutacione reprezentacije (zadatak 3.35). Zatim naći razlaganje permutacione reprezentacije dejstva grupe $\mathbf{C}_{4v}$ na molekulu iz zadatka 3.22.

---

[6] Ovaj deo dokaza zahteva razloživost reprezentacije, te je to razlog zašto je formulisan za konačne grupe; zapravo važi u skupu razloživih i ireducibilnih reprezentacija svake grupe. Jasno je da su dve reprezentacije oblika (3.1) sa jednakim podreprezentacijama, ali različitim matricama $B(g)$, u opštem slučaju neekvivalentne, mada im je karakter jednak.

Zadatak 3.48: Pokazati da su vektorske reprezentacije (zadatak 3.41) grupa $\mathbf{C}_4$ i $\mathbf{C}_{4v}$ reducibilne i razložiti ih na ireducibilne.

Zadatak 3.49: Koristeći zadatke 3.31, 3.27 i 3.45, pokazati da grupa S_n $(n > 1)$ ima tačno dve jednodimenzionalne (ireducibilne) reprezentacije: *simetričnu* ($S(\pi) = 1$, tj. jedinična) i *antisimetričnu* ($A(\pi) = (-1)^\pi$).

Zadatak 3.50: Neka je $D(G)$ matrična reprezentacija grupe G. Pokazati da se konjugacijom ovih matrica dobija nova, tzv. *konjugovana*, reprezentacija iste grupe, $D^*(G)$. Pokazati da je $D^*(G)$ ireducibilna ako i samo ako je takva $D(G)$, i da su ove reprezentacije ekvivalentne ako i samo ako su im karakteri realni.

3.2.8 Burnside-ov teorem

Iz definicije regularne reprezentacije (definicija 3.12) vidi se da je njen karakter funkcija na grupi G koja jediničnom elementu pridružuje red grupe, a ostalim elementima nule (u modifikovanoj tablici množenja na svim dijagonalnim mestima se nalazi neutralni element). Tako je $\chi^R(G) = (|G|, 0, \dots, 0)^T$, tj. $\chi^R(g_k) = \delta_{1k}|G|$ (jer je $g_1 = e$). Koristeći karakter regularne reprezentacije, prethodni kriterijum ireducibilnosti pokazuje da je, osim kod trivijalne grupe $\mathbf{C}_1$, regularna reprezentacija reducibilna. Naime, iz $(\chi^R(G), \chi^R(G)) = |G|$, sledi da za $|G| > 1$ reprezentacija $D^R(G)$ nije ireducibilna.

Lema 3.6 *U razlaganju regularne reprezentacije svaka ireducibilna reprezentacija se javlja onoliko puta kolika joj je dimenzija:* $D^R(G) = \oplus_{\mu=1}^r |\mu| D^{(\mu)}(G)$.

Dokaz: Ako je $D^R(G) = \oplus_{\mu=1}^r a_\mu D^{(\mu)}(G)$, tada je $a_\mu = (\chi^\mu(G), \chi^R(G)) = |\mu|$. ∎

Jednostavna posledica ove leme je poznati Burnside-ov teorem.

Teorem 3.12 (Burnside) *Red konačne grupe jednak je sumi kvadrata dimenzija neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija:* $\sum_{\mu=1}^r |\mu|^2 = |G|$.

Dokaz: Dimenzija regularne reprezentacije je $|G|$. Sa druge strane, svaka matrica $D^R(g)$ u potpuno razloženom obliku ima na dijagonali $|\mu|$ submatrica $D^{(\mu)}(g)$ tipa $|\mu| \times |\mu|$ za svako $\mu = 1, \dots, r$. ∎

Ovaj stav ukazuje da funkcije na grupi $\{\sqrt{|\mu|} D_{ij}^{(\mu)}(G) \mid \mu = 1, \dots, r;\ i, j = 1, \dots, |\mu|\}$, čine ortonormirani bazis u prostoru $\mathcal{L}^2(G)$, jer ih ima upravo onoliko kolika je dimenzija prostora. To znači da se svaka funkcija na grupi može jednoznačno napisati kao linearna kombinacija ovih funkcija.

3.2.9 Neekvivalentne ireducibilne reprezentacije

Iz stava (ii) teorema 3.11 se vidi da su karakteri takvi vektori iz $\mathcal{L}^2(G)$ koji imaju međusobno jednake koordinate pridružene elementima iste klase konjugacije u G. Jasno je da skup svih vektora koji imaju tu osobinu čini jedan p-dimenzionalni potprostor u $\mathcal{L}^2(G)$. Vektori ovog potprostora se mogu shvatiti i kao funkcije na skupu klasa konjugacije grupe G (to su funkcije koje preslikavaju klase konjugacije u kompleksne brojeve), pa je potprostor izomorfan unitarnom prostoru funkcija na skupu klasa konjugacije: $\mathcal{L}^2(C^1, \dots, C^p)$. To je prostor kolona od p kompleksnih brojeva, u kome je skalarni proizvod definisan sa:

$$(f_1(C^1, \dots, C^p), f_2(C^1, \dots, C^p)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{m=1}^{p} \mid C^m \mid f_1^*(C^m) f_2(C^m).$$

To znači da se karakteri mogu pisati u obliku $\chi(C^1,\dots,C^p) = (\chi(C^1),\dots,\chi(C^p))^T$. Pored toga, stav (iii) teorema 3.11 pokazuje da su primitivni karakteri ortonormirani skup vektora u $\mathcal{L}^2(C^1,\dots,C^p)$, jer je

$$(\chi^{(\mu)}(C^1,\dots,C^p),\chi^{(\nu)}(C^1,\dots,C^p)) = \frac{1}{|G|}\sum_{m=1}^{p} \mid C^m \mid \chi^{(\mu)*}(C^m)\chi^{(\nu)}(C^m) = \delta_{\mu\nu}.$$

Vektori $\chi^{(\mu)}(C^1,\dots,C^p)$ $(\mu = 1,\dots,r)$ se obično zapisuju u *tabeli karaktera* (tabela 3.3). To je tabela gde su u gornjoj vrsti nabrojane sve klase konjugacije C^m $(m = 1,\dots,p)$ grupe, a u levoj koloni se nalaze oznake $D^{(\mu)}$ $(\mu = 1,\dots,r)$ svih neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija. U preseku μ-te vrste i m-te kolone nalazi se broj $\chi^{(\mu)}(C^m)$. Očigledno je da se u prvoj vrsti tabele karaktera nalaze samo jedinice (jer je $D^{(1)}(G)$ jedinična reprezentacija), dok su u prvoj koloni navedene dimenzije svih ireducibilnih reprezentacija. Kod Abel-ovih grupa su sve reprezentacije jednodimenzionalne, te je kod njih tabela karaktera u stvari i tabela neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija.

Zbog ortonormiranosti r vrsta tabele karaktera sledi da je $r \le p$ (pošto u p-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{L}^2(C^1,\dots,C^p)$ ne može biti više od p ortonormiranih vektora). U stvari, tabela je kvadratna, jer važi

Teorem 3.13 *Broj neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija konačne grupe G jednak je broju klasa konjugacije u G: $r = p$.*

▬*Dokaz:* Pošto je skup primitivnih karaktera $\{\chi^{(\mu)}(G) \mid \mu = 1,\dots,r\}$ ortonormiran u $\mathcal{L}^2(G)$, time i u $\mathcal{L}^2(C^1,\dots,C^p)$, to znači i da je linearno nezavisan. Ovaj skup je i obrazujući za u $\mathcal{L}^2(C^1,\dots,C^p)$, što pokazuje sledeće razmatranje. Uslov da je vektor $f(G)$ iz $\mathcal{L}^2(C^1,\dots,C^p)$ je jednakost: $\forall h,g \in G\ f(h) = f(ghg^{-1})$. Pored toga $f(h)$ se, kao vektor iz $\mathcal{L}^2(G)$, može napisati kao linearna kombinacija bazisnih vektora $D^{(\mu)}_{kj}(G)$: $f(h) = \sum_{g\in G}^{r}\sum_{k,j=1}^{|\mu|} b^{(\mu)}_{kj} D^{(\mu)}_{kj}(h)$, $\forall h \in G$. Na osnovu pretposlednje jednakosti i specijalnog slučaja (ii) teorema 3.10 nalazi se:

$$f(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{k,j=1}^{|\mu|} b^{(\mu)}_{kj} D^{(\mu)}_{kj}(ghg^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{\mu=1}^{r}\sum_{i,j,k,m=1}^{|\nu|} b^{(\mu)}_{kj} D^{(\mu)}_{km}(g) D^{(\mu)}_{ij}(g^{-1}) = \sum_{\mu=1}^{r}\frac{1}{|\mu|}\sum_{i,j=1}^{|\nu|} b^{(\mu)}_{jj} D^{(\mu)}_{ii}(h) = \sum_{\mu=1}^{r} b^{(\mu)}\chi^{(\mu)}(h),$$

gde je $b^{(\mu)} = \sum_{j=1}^{|\mu|}\frac{1}{|\mu|} b^{(\mu)}_{jj}$. Prema tome, proizvoljni vektor $f(G)$ iz $\mathcal{L}^2(C^1,\dots,C^p)$ je linearna kombinacija primitivnih karaktera. Stoga je skup primitivnih karaktera bazis u $\mathcal{L}^2(C^1,\dots,C^p)$, te je $r = p$. ∎

Ako se funkcije iz $\mathcal{L}^2(C^1,\dots,C^p)$ shvate kao vektori iz prostora C^p, tada primitivni karakteri više nisu ortonormirani bazis u odnosu na standardni skalarni proizvod, već je to skup vektora:

$$\{(\sqrt{\frac{|C^1|}{|G|}}\chi^{(\mu)}(C^1),\dots,\sqrt{\frac{|C^p|}{|G|}}\chi^{(\mu)}(C^p)) \mid \mu = 1,\dots,p\}.$$

U modifikovanoj tabeli karaktera, čije su vrste upravo gornji vektori, i kolone i vrste su ortonormirani vekori u odnosu na standardni skalarni proizvod (poznato je da iz ortonormiranosti vrsta kvadratne matrice u odnosu na standardni skalarni proizvod sledi ortonormiranost njenih kolona):

$$\sum_{\mu=1}^{p}\sqrt{\frac{|C^i|}{|G|}}\chi^{(\mu)*}(C^i)\sqrt{\frac{|C^j|}{|G|}}\chi^{(\mu)}(C^j) = \delta_{ij},$$

Tabela 3.3: **Tabela karaktera.** *U prvoj vrsti su date sve klase konjugacije (kao i njihov red), dok su u prvoj koloni navedene neekvivalentne ireducibilne reprezentacije. Klase konjugacije se u standardnim tablicama zadaju jednim predstavnikom.*

G	$1\ C^1 = \{e\}$	$\cdots$	$\lvert C^j\rvert\ C^j$	$\cdots$	$\lvert C^p\rvert\ C^p$
$D^{(1)}$	1	$\cdots$	1	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$D^{(\mu)}$	$\lvert\mu\rvert$	$\cdots$	$\chi^{(\mu)}(C^j)$	$\cdots$	$\chi^{(\mu)}(C^p)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$D^{(p)}$	$\lvert D^{(p)}\rvert$	$\cdots$	$\chi^{(p)}(C^j)$	$\cdots$	$\chi^{(p)}(C^p)$

tj.

$$\sum_{\mu=1}^{p} \chi^{(\mu)*}(C^i)\chi^{(\mu)}(C^j) = \frac{|G|}{|C^i|}\delta_{ij}.$$

Poslednja jednakost znači da su i u običnoj tabeli karaktera kolone ortogonalne u odnosu na standardni skalarni proizvod (ali ne i normirane), što je od praktičnog značaja prilikom konstrukcije tabele karaktera. Poslednji izraz za prvu kolonu tabele karaktera daje upravo Burnside-ov teorem.

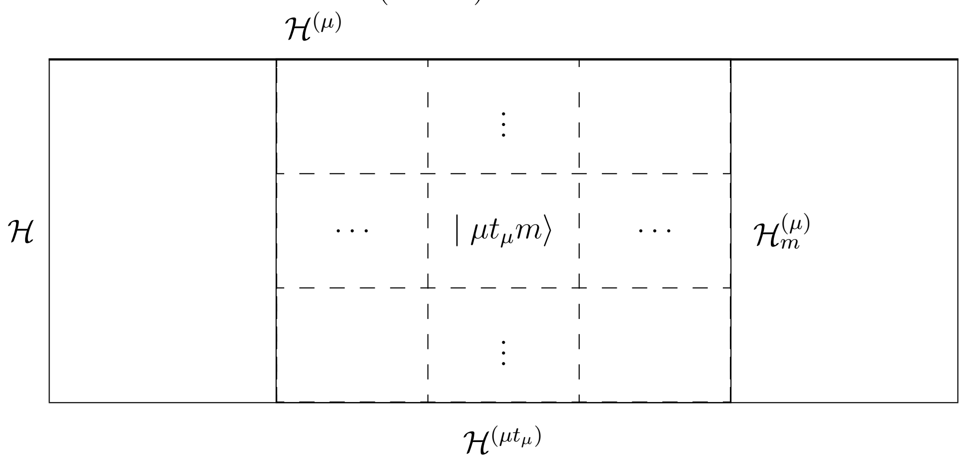
3.3 OPERACIJE SA REPREZENTACIJAMA

U fizičkim primenama se javlja potreba da se na različite načine kombinuju reprezentacije iste, ili čak različitih grupa. Takođe je važno konstruisati ireducibilne reprezentacije grupa, ili naći bazis u kome je neka reprezentacija razložena.

3.3.1 Razlaganje reprezentacija

Jedan od za fiziku najvažnijih problema je nalaženje bazisa u kome je neka razloživa reprezentacija $D(G)$ grupe G eksplicitno razložena, tj. bazisa u kome matrice reprezentacije imaju najjednostavniju moguću kvazidijagonalnu formu. Zadatak je rešio Wigner, uvođenjem specijalnih operatora, metodom koji se često naziva *faktičko razlaganje*. Mada se sami operatori mogu uvesti i na nešto drugačiji način, čime se domen važenja metoda znatno proširuje, ovde izloženi izvorni pristup sadrži eksplicitno sumiranje po grupi, što naizgled ograničava važenje na konačne i kompaktne grupe.

Neka je $D(G)$ unitarna reducibilna reprezentacija grupe G, u unitarnom prostoru $\mathcal{H}$. Koristeći karaktere reprezentacije, moguće je odrediti frekvencije a_μ ireducibilnih reprezentacija $D^{(\mu)}(G)$ u $D(G)$, pa time i razlaganje $D(G) = \oplus_{\mu=1}^{p} a_\mu D^{(\mu)}(G)$. Sledi da se ceo prostor $\mathcal{H}$ ortogonalno razlaže u formi $\mathcal{H} = \oplus_{\mu=1}^{p} \oplus_{t_\mu=1}^{a_\mu} \mathcal{H}^{(\mu t_\mu)} = \oplus_{\mu=1}^{p}\mathcal{H}^{(\mu)}$, gde je $\mathcal{H}^{(\mu t_\mu)}$ ireducibilni, a $\mathcal{H}^{(\mu)}$ višestruki ireducibilni potprostor reprezentacije $D^{(\mu)}(G)$. Jasno je da je u bazisu čiji su vektori elementi međusobno ireducibilnih potprostora, matrice reprezentacije kvazidijagonalne. Međutim različiti ovakvi bazisi daju različite (mada ekvivalentne) dijagonalne blokove. Da bi se zadatak precizirao, smatra se da su pored reprezentacije $D(G)$, poznate i (unitarne) matrice svih neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija grupe G, tj. fiksirani su svi matrični elementi $\{D^{(\mu)}_{ij}(g) \mid \forall g \in G;\ \mu = 1,\ldots,p;\ i,j = 1,\ldots,|\mu|\}$. Cilj je odrediti bazis u kome su operatori reprezentacije $D(G)$ reprezentovani kvazidijagonalnim matricama sa blokovima koji su upravo ove, unapred zadate matrice ireducibilnih reprezentacija. Ovaj zahtev izdvaja jednu klasu bazisa, sa specifičnim transformacionim osobinama (sl. 3.4).



Slika 3.4: **Standardni bazis.** *Prostor $\mathcal{H}$ se razlaže na višestruke ireducibilne potprostore $\mathcal{H}^{(\mu)}$. Svaki $\mathcal{H}^{(\mu)}$ se razlaže na dva načina: na a_μ izomorfnih $|\mu|$-dimenzionalnih ireducibilnih potprostora $\mathcal{H}^{(\mu t_\mu)}$, $t_\mu = 1,\ldots,a_\mu$ (vertikalni), ili na $|\mu|$ izomofnih a_μ-dimenzionalnih potprostora $\mathcal{H}^{(\mu)}_m$, $m = 1,\ldots,|\mu|$ (horizontalni). Presek potprostora $\mathcal{H}^{(\mu t_\mu)}$ i $\mathcal{H}^{(\mu)}_m$ je jednodimenzionalan, obrazovan standardnim vektorom $\mid \mu t_\mu m\rangle$.*

Definicija 3.16 Standardni *ili* simetrijski adaptiran bazis *prostora $\mathcal{H}$ je bazis*

$$\{\mid \mu t_\mu m\rangle \mid \mu = 1,\ldots,p;\ t_\mu = 1,\ldots,a_\mu;\ m = 1,\ldots,|\mu|\},$$

za koji važi

$$D(g) \mid \mu t_\mu m\rangle = \sum_{m'=1}^{|\mu|} D^{(\mu)}_{m'm}(g) \mid \mu t_\mu m'\rangle. \tag{3.3}$$

U (3.3) se na desnoj strani pojavljuje linearna kombinacija vektora iz istog ireducibilnog potprostora iz koga je i vektor bazisa na levoj strani, pri čemu su koeficijenti u kombinaciji upravo unapred zadati matrični elementi ireducibilnih reprezentacija (u opštem slučaju reprezentovanja operatora u proizvoljnom bazisu, na desnoj strani (3.3) bi se javila suma po celom bazisu sa proizvoljnim koeficijentima). Stoga, ako se u ovom bazisu reprezentuju operatori reprezentacije $D(G)$ dobija se traženi razloženi oblik. Stoga se zadatak razlaganja reprezentacije može formulisati i kao određivanje simetrijski adaptiranog bazisa.

Izdvajanje pomenutih potprostora se vrši pomoću projektora na njih.

Definicija 3.17 *Operatori $P^{(\mu)}_{ij}(D) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\mu|}{|G|}\sum_{g\in G} D^{(\mu)^*}_{ij}(g)D(g)$, $\mu = 1,\ldots,p;\ i,j = 1,\ldots,|\mu|$, nazivaju se* grupni operatori *reprezentacije $D(G)$.*

Nalaženje standardnog bazisa u potpunosti se svodi na određivanje ovih operatora.

Teorem 3.14 *Grupni operator $P^{(\mu)}_{11}(D)$ je projektor na potprostor $\mathcal{H}^{(\mu)}_1$, dok operator $P^{(\mu)}_{m1}(D)$ izometrički preslikava $\mathcal{H}^{(\mu)}_1$ u $\mathcal{H}^{(\mu)}_m$. Pri tome je $P^{(\mu)}_{m1}(D) \mid \mu t_\mu 1\rangle = \mid \mu t_\mu m\rangle$.*

▬*Dokaz:* Pošto je

$$P^{(\mu)}_{mn}(D) \mid \nu t_\nu n\rangle = \frac{|\mu|}{|G|}\sum_{g\in G} D^{(\mu)^*}_{mn}(g)D(g) \mid \nu t_\nu n\rangle = \frac{|\mu|}{|G|}\sum_{n'=1}^{|\mu|}\sum_{g\in G} D^{(\mu)^*}_{ij}(g)D^{(\nu)}_{n'n}(g) \mid \nu t_\nu n'\rangle = \delta_{\mu\nu} \mid \mu t_\mu m\rangle,$$

jasno je da je $P^{(\mu)}_{11}(D)$ projektor na $\mathcal{H}^{(\mu)}_1$ (vektore tog prostora ostavlja neizmenjenim, a ortokomplement anulira). Sa druge strane, za $m > 1$, ortokomplement prostora $\mathcal{H}^{(\mu)}_1$ je nulpotprostor operatora $P^{(\mu)}_{m1}(D)$, no ovaj potprostor se bijektivno preslikava u prostor $\mathcal{H}^{(\mu)}_m$, pri čemu se standardni bazis prvog preslika u standardni bazis drugog potprostora. ▮

Algoritam određivanja standardnog bazisa je sada kompletiran. Prvo treba konstruisati sve operatore $P^{(\mu)}_{m1}(D)$ ($\mu = 1,\dots,p$, $m = 1,\dots,|\mu|$). Kako su i ireducibilne reprezentacije i reprezentacija $D(G)$ zadati, ovo je pravolinijski postupak sabiranja matrica. Zatim se za svaki projektor $P^{(\mu)}_{11}(D)$ odredi ortonormirani bazis u njegovoj oblasti likova, i dobijenih a_μ vektora $\{\mid \mu t_\mu 1\rangle \mid t_\mu = 1,\dots,a_\mu\}$ čini standardni bazis potprostora $\mathcal{H}^{(\mu)}_1$. Očigledno je da izbor ovih vektora nije jednoznačan. Sem toga, ako je $a_\mu = 0$, tj. reprezentacija $D^{(\mu)}(G)$ nije komponenta reprezentacije $D(G)$, odgovarajući grupni projektor je nulti operator, te ovakav podbazis ne postoji. Konačno, ostali vektori standardnog bazisa se nalaze dejstvom ostalih grupnih operatora (za $m > 1$) na nađene vektore.

Zadatak 3.51*:* Naći standardni bazis za permutacionu reprezentaciju grupe $\mathbf{C}_{4v}$ iz zadatka 3.47, kao i za vektorske reprezentacije grupa $\mathbf{C}_4$ i $\mathbf{C}_{4v}$ (zadatak 3.48).

3.3.2 Direktni zbir reprezentacija

Već je u definiciji 3.14 uveden pojam direktne sume reprezentacija, u kontekstu razlaganja neke razložive reprezentacije na njene komponente. Očigledno je da, za bilo koje dve reprezentacije $D'(G)$ i $D''(G)$ grupe G, definisane u prostorima $\mathcal{H}'$ i $\mathcal{H}''$, operatori $D(g) = D'(g) \oplus D''(g)$ čine reprezentaciju iste grupe u direktnom zbiru prostora $\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}''$. Ova konstrukcija, direktne sume reprezentacija je u izvesnom smislu suprotna proceduri razlaganja, i već je uočeno da omogućava izgradnju svih reprezentacija neke grupe na osnovu ireducibilnih.

3.3.3 Direktni proizvod reprezentacija

U slučaju kada se fizički sistem sastoji iz više podsistema, važnu ulogu u njegovom opisu ima direktni proizvod podsistemskih prostora stanja. U tom kontekstu se pojavljuje i pitanje uvođenja reprezentacije grupe G u direktnom proizvodu prostora $\mathcal{H}'$ i $\mathcal{H}''$, u kojima su zadate reprezentacije $D'(G)$ i $D''(G)$ grupe G.

Definicija 3.18 *Skup operatora $\{D(g) \overset{\text{def}}{=} D'(g) \otimes D''(g) | g \in G\}$ u prostoru $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ se naziva* direktni proizvod *reprezentacija $D'(G)$ i $D''(G)$.*

Dobijeni skup je reprezentacija, jer važi: $D(g)D(g') = (D'(g) \otimes D''(g))(D'(g') \otimes D''(g')) = (D'(g)D'(g')) \otimes (D''(g))D''(g')) = D(gg')$. Njen karakter je $\chi(g) = \chi'(g)\chi''(g)$, a iz unitarnosti $D'(G)$ i $D''(G)$ sledi unitarnost proizvoda.

Direktni proizvod dve ireducibilne reprezentacije ne mora biti ireducibilan, i njegovo razlaganje na ireducibilne komponente,

$$D^{(\mu)}(G) \otimes D^{(\nu)}(G) = \oplus_\lambda a_\lambda^{\mu\nu} D^{(\lambda)}(G), \tag{3.4}$$

naziva se *Clebsch-Gordan-ova serija*. Frekvencije $a_\lambda^{\mu\nu}$ se mogu izračunati iz primitivnih karaktera: $a_\lambda^{\mu\nu} = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g)\chi^{(\lambda)^*}(g)$.

Ako su $\{| \mu m\rangle\}$ i $\{| \nu n\rangle\}$ bazisi u $\mathcal{H}^{(\mu)}$ i $\mathcal{H}^{(\nu)}$ u kojima odgovarajuće reprezentacije imaju zadatu matričnu formu, operatori $D^{(\mu)}(G) \otimes D^{(\nu)}(G)$ u nekorelisanom bazisu $\{| \mu m, \nu n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} | \mu m\rangle \otimes | \nu n\rangle\}$ prostora $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}''$ daju matrični direktni proizvod reprezentacija, koji nije u razloženom obliku. Stoga je moguće, npr. opisanim metodom grupnih operatora, naći standardni bazis $| \lambda t_\lambda l\rangle$ istog prostora, u kome blok dijagonalne matrice reprezentacije odražavaju Clebsch-Gordan-seriju. Elementi matrice prelaska iz nekorelisanog u standardni bazis $\{| \mu\nu\lambda t_\lambda l\rangle\}$ prostora $\mathcal{H}^{(\mu)} \otimes \mathcal{H}^{(\nu)}$ se nazivaju *Clebsch-Gordan-ovi koeficijenti*. Ako su svi navedeni bazisi ortonormirani, Clebsch-Gordan-ovi koeficijenti su skalarni proizvodi $\langle \mu\nu\lambda t_\lambda l \mid \mu m, \nu n\rangle$; jednoznačno su (do na fazni faktor) određeni samo ako su koeficijenti Clebsch-Gordanove serije $a_\lambda^{\mu\nu}$ manji od 2 (tj. ili 0 ili 1).

***Zadatak 3.52**:* Odrediti Clebsch-Gordan-ove koeficijente grupe $\mathbf{C}_{4v}$.

***Zadatak 3.53**:* Odrediti ireducibilne komponente reprezentacije $D^P(\mathbf{C}_{4v}) \otimes D^{pv}(\mathbf{C}_{4v})$ (zadatak 3.51).

Ako je $\{| i\rangle\}$ bazis prostora $\mathcal{H}$ reprezentacije $D(G)$ grupe G, može se konstruisati $n-$ti direktni stepen reprezentacije: to je reprezentacija $D^n(G)$ definisana u prostoru $\mathcal{H}^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{n}$ delovanjem na vektore nekorelisanog bazisa (zadatak 3.38): $D^n(g)(| i_1, \dots, i_n\rangle) \stackrel{\text{def}}{=} (D(g) \mid i_1\rangle) \otimes \cdots \otimes (D(g) \mid i_n\rangle)$. U istom prostoru je definisana i reprezentacija $\Delta(S_n)$ simetrične grupe S_n. Reprezentacija Δ nije ireducibilna (osim za $n = 1$), a njeni ireducibilni potprostori su invarijantni za operatore $D(G)$. Stoga se u njima $D(G)$ redukuje; redukovane podreprezentacije u simetričnom i antisimetričnom potprostoru grupe S_n (tj. u višestrukim ireducibilnim potprostorima simetrične i antisimetrične reprezentacije grupe S_n, zadatak 3.49) nazivaju se *simetrični* i *antisimetrični* stepen reprezentacije $D(G)$ (oznake su $[D^n(G)]$ i $\{D^n(G)\}$, ili $[D^n(G)]_\pm$). Karakteri ovih reprezentacija, za stepene 2, 3 i 4 su [B7]:

$$[\chi^2(g)]_\pm = \frac{1}{2}\chi^2(g) \pm \frac{1}{2}\chi(g^2), \quad [\chi^3(g)]_\pm = \frac{1}{6}\chi^3(g) \pm \frac{1}{2}\chi(g)\chi(g^2) + \frac{1}{3}\chi(g^3),$$

$$[\chi^4(g)]_\pm = \frac{1}{24}\chi^4(g) \pm \frac{1}{4}\chi^2(g)\chi(g^2) + \frac{1}{8}\chi^2(g^2) + \frac{1}{3}\chi(g^3)\chi(g) \pm \frac{1}{4}\chi(g^4).$$

***Zadatak 3.54**:* Pokazati da su ireducibilni potprostori reprezentacije $\Delta(S_n)$ u $\mathcal{H}^n$ invarijantni za reprezentaciju $D^n(G)$ (oznake iz prethodnog teksta). Zatim izvesti formule za karaktere simetričnog i antisimetričnog kvadrata reprezentacije $D(G)$.

3.3.4 Suženje reprezentacije

U fizici se često, zajedno sa reprezentacijama grupe razmatraju i reprezentacije neke njene podgrupe: npr. pri perturbovanju sistema spoljašnjim poljima, u okviru aproksimativnog metoda perturbacija, ili pri proučavanju široke klase procesa koja je zato i dobila zajednički naziv *narušenje simetrije* (npr. fazni prelazi), itd. Restrikcija reprezentacije $D(G)$ grupe G na njenu podgrupu H je, kako se lako vidi, reprezentacija podgrupe, i nosi naziv *sužena reprezentacija* na podgrupu, $D(G) \downarrow H$. Kako je ireducibilnost zajednička osobina skupa matrica, a pri suženju se skup matrica smanjuje, sužena reprezentacija ne mora biti ireducibilna ni kada je $D(G)$ ireducibilna. Za niz primena je važno znati na koje se ireducibilne reprezentacije $\Delta^{(\nu)}(H)$ podgrupe razlaže sužena ireducibilna reprezentacija $D^{(\mu)}(G)$ grupe G. Ovakve veze, $D^{(\mu)}(G) \downarrow H = \oplus a^{\mu}_{\nu}\Delta^{(\nu)}(H)$, se nazivaju *relacije kompatibilnosti*, a koeficijenti a^{μ}_{ν} se lako izračunavaju na osnovu karaktera.

Zadatak 3.55: Odrediti relacije kompatibilnosti za grupu $\mathbf{C}_{4v}$ pri suženju na podgrupe $\mathbf{C}_4$ i $\{e, \sigma_x\}$.

3.3.5 Indukcija reprezentacija

Indukcija je najmoćniji među različitim metodima konstrukcije ireducibilnih reprezentacija grupe. Intuitivno je jasno da je ireducibilne reprezentacije lakše naći za podgrupu, nego za celu grupu (npr. lako su određene za najjednostavnije, ciklične grupe). Stoga bi neki algoritam konstrukcije ireducibilnih reprezentacija grupe na osnovu poznatih ireducibilnih reprezentacija podgrupe bio rešenje problema. Mada u opštem slučaju takav algoritam nije nađen, procedura je dovoljno moćna, tako da se uz izvesne dopune, u svim za fiziku relevantnim situacijama, dobija kompletan rezultat.

Polazna činjenica u narednim razmatranjima je da je reprezentacijom podgrupe određena jedna reprezentacija grupe. Neka je H podgrupa grupe G, indeksa m, a $\{E^{ts} = (\delta_{ti}\delta_{sj}) \mid t, s = 1, \dots, m\}$ apsolutni (Weyl-ov) m-dimenzionalni matrični bazis.

Definicija 3.19 *Indukovana reprezentacija, $D(G) = \Delta(H) \uparrow G$, grupe G iz reprezentacije $\Delta(H)$ podgrupe H, pri transverzali $T = \{t_1 = e, t_2, \dots, t_{|T|}\}$ ($|T| = \frac{|G|}{|H|}$), je pridruživanje elementu g matrice*

$$D(g) = \sum_{p,q=1}^{|T|} \sum_{h \in H} \delta(t_p^{-1} g t_q, h) E^{pq} \otimes \Delta(h).$$

Definicija je prejudicirala da je indukcijom dobijena jedna reprezentacija grupe, pa se to mora proveriti. Ovo, kao i neke elementarne osobine dobijene reprezentacije utvrđuje

Lema 3.7 *Skup matrica $D(G) = \Delta(H) \uparrow G$ iz definicije 3.19 je reprezentacija grupe G, dimenzije $|D| = |T||\Delta|$. Njene matrice se sastoje iz $|\Delta|$-dimenzionalnih blokova, pri čemu je u svakoj vrsti i svakoj koloni matrice samo po jedan nenulti blok. Indukovana reprezentacija ne zavisi od izbora transverzale, u smislu da se za drugu transverzalu dobija ekvivalentna reprezentacija.*

▬*Dokaz:* Blok $D_{pq}(g)$ je nulti, osim ako je $t_p^{-1} g t_q$ element podgrupe H, i tada je jednak $\Delta(t_p^{-1} g t_q)$; iz zadatka 3.15 sledi da Kronecker-ov simbol pri fiksiranom p jednoznačno određuje i q i h.
Kako se u svakoj vrsti i koloni indukovane matrice nalazi po jedan nenulti blok, koji je nesingularna matrica $\Delta(h)$

(za odgovarajući element h podgrupe), sledi da su i sve indukovane matrice nesingularne. Uslov homomorfizma se lako proverava:

$$D(g)D(g') = \sum_{pqrs}\sum_{h,h'}(E^{pq}E^{rs}) \otimes (\Delta(h)\Delta(h'))\delta(t_p^{-1}gt_q, h)\delta(t_r^{-1}g't_s, h').$$

Pošto je $E^{pq}E^{rs} = E^{ps}\delta_{qr}$, nalazi se

$$D(g)D(g') = \sum_{p,q,s,h,h'} E^{ps} \otimes \Delta(hh')\delta(t_p^{-1}gt_q, h)\delta(g't_sh'^{-1}, t_q) = \sum_{p,s,h} E^{ps} \otimes \Delta(hh')\delta(t_p^{-1}gg't_s, hh') = D(gg')$$

(zahvaljujući lemi preuređenja, pri fiksiranom h', elementi hh' iscrpljuju celu podgrupu H.
Konačno, ako je T' neka druga transverzala, mora važiti $t'_p = t_ph_p$, gde je $h_p \in H$. Uvodeći očigledno nesingularni blok-dijagonalni operator $Z = \sum_p E^{pp}\otimes\Delta(h_p)$, i označavajući sa $D(G)$ i $D'(G)$ indukovane reprezentacije pomoću transverzala T i T', nalazi se $D(g) = \sum_{pq} E^{pq} \otimes (\Delta(h_p^{-1})\Delta(h')\Delta(h_q))\delta(t_p'^{-1}gt'_q, h') = Z^{-1}D'(g)Z$, gde je $h' = h_phh_q^{-1}$. ∎

Indukovana reprezentacija ne mora biti ireducibilna ni kada je $\Delta(H)$ ireducibilna. To se vidi već na primeru regularne reprezentacije, (definicija 3.12), koja je zapravo indukovana iz jedinične reprezentacije trivijalne podgrupe $H = \{e\}$: $D^R(G) = D^{(1)}(\{e\}) \uparrow G$.

Zadatak 3.56: Za ireducibilne reprezentacije podgrupe $H = \{e, \sigma_x\}$ odrediti $\Delta^{(\mu)}(H) \uparrow \mathbf{C}_{4v}$, i pokazati njihovu reducibilnost.

3.3.6 Indukcija sa invarijantne podgrupe

Teorija indukovanih reprezentacija je detaljno razrađena za slučaj kada je H invarijantna podgrupa. U stvari, u tom slučaju je $t^{-1}ht$ iz podgrupe za svaki element t transverzale, ako i samo ako je h iz podgrupe. To znači da u indukovanoj reprezentaciji elementima podgrupe odgovaraju blok-dijagonalne matrice. Ovo, i neka druga pojednostavljenja dovela su do razvoja teorije indukcije sa invarijantne podgrupe, da bi se omogućila konstrukcija ireducibilnih reprezentacija G iz ireducibilnih reprezentacija H.

Teorem 3.15 *Svaki element s grupe G definiše bijekciju, s-konjugaciju na skupu klasa ekvivalentnih reprezentacija invarijantne podgrupe H: ako je $h \in H$ i $\Delta(H)$ reprezentacija H, s-konjugovana reprezentacija je $\Delta_s(h) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(s^{-1}hs)$. Reprezentacija $\Delta_s(H)$ je ireducibilna ako i samo ako je takva $\Delta(H)$, te je skup s-konjugacija grupa transformacija na skupu ireducibilnih reprezentacija podgrupe. Podgrupa H je invarijantna podgrupa male grupe svake ireducibilne reprezentacije.*

Dokaz: s-konjugacijom se dobija nova reprezentacija, jer je

$$\Delta_s(hh') = \Delta(s^{-1}hh's) = \Delta(s^{-1}hs)\Delta(s^{-1}h's) = \Delta_s(h)\Delta_s(h').$$

Skupovi matrica $\Delta(H)$ i $\Delta_s(H)$ su jednaki (razlika je u pravilu pridruživanja matrica elementima podgrupe), što obezbeđuje istovremenu nesingularnost, ali i ireducibilnost ovih reprezentacija. Dalje, niz jednakosti, $(\Delta_s)_t(h) = \Delta_s(t^{-1}ht) = \Delta(s^{-1}t^{-1}hts) = \Delta_{ts}(h)$, pokazuje da s-konjugacije elementima grupe G čine grupu (homomorfnu grupi G) transformacija na skupu klasa ekvivalencije reprezentacija invarijantne podgrupe. Ako je s iz H, s-konjugovana reprezentacija je ekvivalentna početnoj (jer je $\Delta_s(h) = \Delta(s^{-1})\Delta(h)\Delta(s)$), pa su s-konjugacije elementima iz H podgrupa male grupe za svaku reprezentaciju $\Delta(H)$, i to invarijantna, jer je u pitanju morfizam G na grupu transformacija. ∎

Pošto je tako utvrđeno da grupa G generiše grupu transformacija, kako na skupu svih, tako i na skupu svih ireducibilnih reprezentacija invarijantne podgrupe H, mogu se primeniti opšti zaključci vezani za grupe transformacija. Pre svega, uspostavljena je particija skupa neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija H na orbite s-konjugacije: svakoj reprezentaciji $\Delta^{(\mu)}(H)$ odgovara jedna orbita $O^{(\mu)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Delta^{(\nu)}(H) \,|\, \exists s \in G \; \Delta^{(\nu)}(H) \sim \Delta^{(\mu)}_s(H)\}$, kao i mala grupa $L^{(\mu)} = \{s \in G \,|\, \Delta^{(\mu)}_s(H) \sim \Delta^{(\mu)}(H)\}$. Kako mala grupa zadovoljava relacije $H \triangleleft L^{(\mu)} < G$, sledi da se ona sastoji iz $\frac{|L^{(\mu)}|}{|H|}$ koseta H. Reprezentacije iz iste orbite imaju međusobno konjugovane, time i izomorfne, male grupe. Red orbite, tj. broj neekvivalentnih reprezentacija H povezanih s-konjugacijama elementima iz G, jednak je indeksu $\frac{|G|}{|L^{(\mu)}|}$ male grupe u G, a svi elementi koseta $sL^{(\mu)}$ male grupe preslikavaju $\Delta^{(\mu)}(H)$ u istu (do na ekvivalenciju) reprezentaciju $\Delta^{(\mu)}_s(H)$.

Napomenuto je da u reprezentaciji $\Delta^{(\mu)}(H) \uparrow G$ elementima podgrupe odgovaraju blok-dijagonalne matrice. Sada se vidi da su ovi blokovi u stvari reprezentacije $\Delta^{(\mu)}_{t_i}(H)$: kao dijagonalni blokovi javljaju se sve reprezentacije iz orbite $O^{(\mu)}$, i to svaka $\frac{|L^{(\mu)}|}{|H|}$ puta. To znači da je razlaganje indukovane pa sužene reprezentacije $(\Delta^{(\mu)}(H) \uparrow G) \downarrow H = \frac{|L^{(\mu)}|}{|H|} \oplus_{\nu \in O^{(\mu)}} \Delta^{(\nu)}(H)$. Tako je prostor $\mathcal{H}$ indukovane reprezentacije razložen na potprostore $\mathcal{H}^{(\mu)}_{t_i}$ u kojima deluju t_i-konjugovane reprezentacije: $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}^{(\mu)}_{t_i}$. Element t_p je reprezentovan matricom za koju je $D_{p1}(t_p) = I_\Delta$ (jedinična matrica dimenzije $|\Delta|$), tako da $D(t_p)$ preslikava početni potprostor $\mathcal{H}^{(\mu)} = \mathcal{H}^{(\mu)}_1$ reprezentacije $\Delta^{(\mu)}(H)$ u potprostor $\mathcal{H}^{(\mu)}_{t_p}$ reprezentacije $\Delta^{(\mu)}_{t_p}(H)$. Ako je $\{|\, i\rangle \,|\, i = 1, \dots, |\Delta^{(\mu)}(H)|\}$ bazis prostora $\mathcal{H}^{(\mu)}$, odgovarajući bazis celog prostora $\mathcal{H}$ je $\{|\, p, i\rangle = D(t_p) \,|\, i\rangle \,|\, i = 1, \dots, |\Delta^{(\mu)}(H)|,\; p = 1, \dots, \frac{|G|}{|H|}\}$.

Sa druge strane, za elemente koji nisu iz H, svi dijagonalni blokovi indukovanih matrica su nulti, te je karakter ovih elemenata 0. Odavde sledi da se indukcijom bilo koje od reprezentacija iz $O^{(\mu)}$ dobija ekvivalentna reprezentacija grupe G. Pored toga, kako indukovana reprezentacija ne mora biti ireducibilna, zaključak o redukciji suženja povlači da se ireducibilne komponente indukovane reprezentacije i same, sužene na H, razlažu samo na ireducibilne reprezentacije iz iste orbite grupe H. Time orbita $O^{(\mu)}$ ireducibilnih reprezentacija podgrupe H određuje *asocirani skup*, $A^{(\mu)}$ ireducibilnih reprezentacija grupe G, koje se sužene na H razlažu na reprezentacije iz $O^{(\mu)}$. Skupovi $A^{(\mu)}$ su očigledno disjunktni, a biće pokazano i da su oni particija skupa ireducibilnih reprezentacija G, tj. da sadrže sve ireducibilne reprezentacije grupe G.

Navedene indikacije o odnosu ireducibilnih reprezentacija invarijantne podgrupe i grupe preciziraju sledeći stavovi.

Teorem 3.16 (Frobenius-ov i inverzni Frobenius-ov) *Neka je $H \triangleleft G$.*

(i) Sužena na podgrupu H, ireducibilna reprezentacija $D^{(\lambda)}(G)$ grupe G redukuje se na višestruki direktni zbir (multipl) jedne cele orbite podgrupe:

$$D^{(\lambda)}(G) \downarrow H = c^\lambda_\mu \oplus_{\nu \in O^{(\mu)}} \Delta^{(\mu)}(H).$$

(ii) Razlaganje svake od reprezentacija $\Delta^{(\nu)}(H) \in O^{(\mu)}$, indukovane na G, na ireducibilne reprezentacije grupe G je oblika

$$\Delta^{(\nu)}(H) \uparrow G = \oplus c^\lambda_\mu D^{(\lambda)}(G),$$

gde su c_μ^λ konstante definisane u prethodnom izrazu.

Tako je pokazano da asocirani skupovi čine particiju skupa ireducibilnih reprezentacija grupe, koja je u bijektivnoj vezi sa particijom koju čine orbite u skupu ireducibilnih reprezentacija podgrupe. Ovo motiviše pokušaj da se ireducibilne reprezentacije grupe G izvedu na osnovu reprezentacija invarijantne podgrupe, procedurom baziranom na indukciji, i to deo po deo: ceo jedan asocirani skup se određuje iz odgovarajuće orbite, nezavisno od ostalih reprezentacija. Međutim, jasno je da se direktnom indukcijom ne moraju dobiti ireducibilne reprezentacije grupe. Problem se prevazilazi razmatranjem ireducibilnih reprezentacija male grupe svake od orbita.

Zadatak 3.57: Znajući da su $\mathbf{C}_4$ i $\mathbf{C}_2 = \{e, C_4^2\}$ invarijantne podgrupe u $\mathbf{C}_{4v}$, odrediti male grupe i orbite u skupu ireducibilnih reprezentacija ovih podgrupa. Koristeći tabelu 3.2, odrediti asocirane skupove i proveriti teorem 3.16.

Pošto je H invarijantna podgrupa i u $L^{(\mu)}$, odnos ireducibilnih reprezentacija male grupe i podgrupe H je takođe opisan teoremom 3.16. Međutim, kako je $L^{(\mu)}$ podgrupa u G, orbite s-konjugacije elementima male grupe su manje nego kada su korišćeni svi elementi iz G. Specijalno, reprezentacija $\Delta^{(\mu)}$ je po definiciji male grupe invarijantna pri svim ovakvim s-konjugacijama, tj. sama je jedna jednočlana orbita. Odgovarajući asocirani skup reprezentacija $L^{(\mu)}$, u skladu sa prvim delom teorema 3.16, može, kada se suzi na H, sadržati isključivo reprezentaciju $\Delta^{(\mu)}$, i nosi poseban naziv.

Definicija 3.20 *Ireducibilna reprezentacija $d^{(\mu,\alpha)}(L^{(\mu)})$ male grupe $L^{(\mu)}$ je* dozvoljena*, ako je njeno suženje na H višestruka reprezentacija $\Delta^{(\mu)}(H)$, tj. $d^{(\mu,\nu)}(L^{(\mu)}) \downarrow H = c\Delta^{(\mu)}(H)$.*

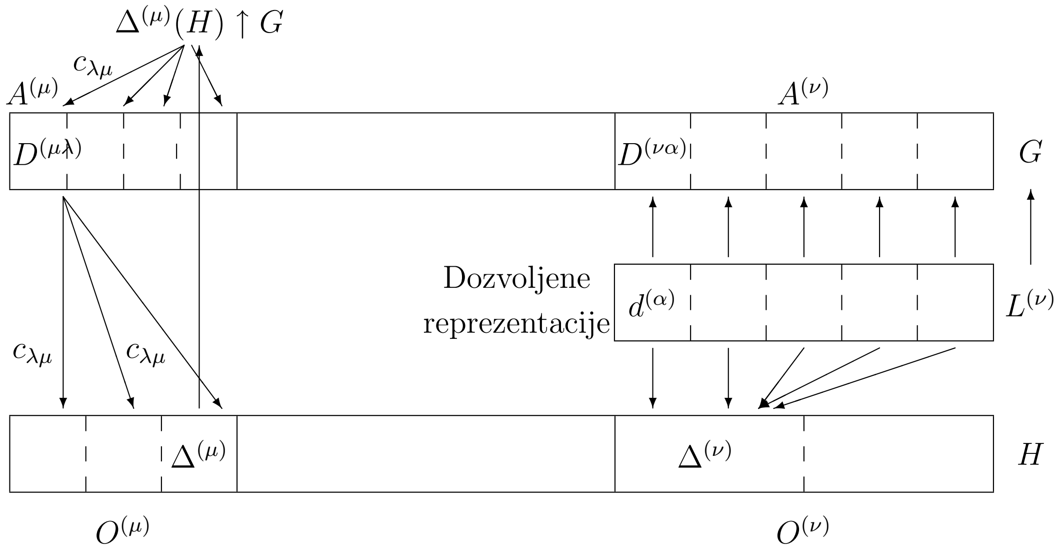
Konačno, poznavanje dozvoljenih reprezentacija male grupe, omogućava konstrukciju asociranog skupa ireducibilnih reprezentacija grupe G.

Teorem 3.17 *Neka je $H \triangleleft G$, a $L^{(\mu)}$ i $O^{(\mu)}$ mala grupa i orbita ireducibilne reprezentacije $\Delta^{(\mu)}(H)$ i $\{d^{(\mu,\alpha)}(L^{(\mu)}) \,|\, \alpha = 1, 2, \ldots\}$ skup dozvoljenih reprezentacija male grupe. Tada su reprezentacije $D^{(\mu,\nu)}(G) = d^{(\mu,\alpha)}(L^{(\mu)}) \uparrow G$, indukovane iz dozvoljenih reprezentacija male grupe, ireducibilne neekvivalentne reprezentacije grupe G i čine ceo skup $A^{(\mu)}$ asociran orbiti $O^{(\mu)}$. Isti asocirani skup se dobija iz dozvoljenih reprezentacija male grupe bilo koje od reprezentacija iz orbite $O^{(\mu)}$.*

Tako je dobijen algoritam konstrukcije ireducibilnih reprezentacija grupe na osnovu zadatih ireducibilnih reprezentacija invarijantne podgrupe:

1. grupisanje neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija podgrupe u orbite s-konjugacije;
2. izbor po jedne reprezentacije iz svake orbite, i određivanje njene male grupe;
3. određivanje dozvoljenih reprezentacija male grupe;
4. indukcija dozvoljenih reprezentacija male grupe do ireducibilnih reprezentacija grupe.

Jasno je da se ovim algoritmom dobijaju svi asocirani skupovi, tj. kompletan skup neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija grupe G. Treba uočiti da je najteži deo algoritma određivanje dozvoljenih reprezentacija male grupe, jer nema opšte procedure za njihovu konstrukciju. Ipak, njihovo određivanje je a priori jednostavnije nego određivanje svih reprezentacija grupe G nekim drugim metodom. Tako, kada je mala grupa jednaka invarijantnoj podgrupi, jedina dozvoljena



Slika 3.5: **Indukcija sa invarijantne podgrupe.** *Donji i gornji pravougaonik su skupovi neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija grupa H, odnosno G, koji su podeljeni na orbite, odnosno njima asocirane skupove. Levi deo slike ilustruje odnos orbita i asociranih skupova, baziran na teoremu 3.16. Na desnom delu je prikazana konstrukcija asociranog skupa preko dozvoljenih reprezentacija male grupe (teorem 3.17).*

reprezentacija je upravo $\Delta^{(\mu)}(H)$, indukcijom se odmah dobija ireducibilna reprezentacija grupe. Međutim, ako je neka od malih grupa jednaka G, određivanje dozvoljenih reprezentacija je zapravo isto što i određivanje odgovarajućeg asociranog skupa, te je u tom smislu algoritam neefikasan. U nastavku će biti razmotrene neke u fizici česte situacije, u kojima je gornji algoritam potpuno razrađen.

Radi kasnije analize oblika indukovanih reprezentacija, razmotriće se ukratko i geometrija koju daje navedeni algoritam. Prethodna analiza indukovane dozvoljene reprezentacije, $D^{(\mu,\alpha)}(G)$, pokazuje da za svaku reprezentaciju $\Delta^{(\nu)}(H)$ iz orbite $O^{(\mu)}$, njeno suženje (kvazidijagonalno!) $D^{(\mu,\alpha)}(G)\downarrow H$ sadrži po $\frac{|d^{(\mu,\alpha)}(L^{(\mu)})|}{|\Delta^{(\mu)}(H)|}=c_\mu^{(\mu,\alpha)}$ uzastopnih blokova na dijagonali, ekvivalentnih sa $\Delta^{(\nu)}(H)$. Stoga se ceo prostor reprezentacije $D^{(\mu,\alpha)}(G)$ razlaže na $\frac{|G|}{|L^{(\mu)}|}$ prostora dimenzije $c_\mu^{(\mu,\alpha)}|\Delta^{(\mu)}(H)|$, a prelaz iz početnog (koji odgovara multiplu reprezentacije $\Delta^{(\mu)}(H)$) u ν-ti (koji odgovara reprezentaciji $\Delta^{(\nu)}(H)$) ostvaruje, u smislu ranije rečenog, operator $D^{(\mu,\alpha)}(t_\nu)$, gde je t_ν jedinstveni element transverzale male grupe za koji je $\Delta^{(\mu)}_{t_\nu}(H)\sim\Delta^{(\nu)}(H)$. Označavajući sa t_l elemente transverzale podgrupe H u maloj grupi $L^{(\mu)}$, bazis ukupnog prostora se nalazi u formi

$$\{|\,\nu,l,i\rangle = D(t_\nu)D(t_l)\mid i\rangle \mid i=1,\dots,|\mu|,\ l=1,\dots,\frac{|L^{(\mu)}|}{|H|},\ \nu=1,\dots,\frac{|G|}{|L^{(\mu)}|}\}. \tag{3.5}$$

3.3.7 Slučaj kada je invarijantna podgrupa indeksa 2

Slučaj kada je $G=H+sH$ (H je podgrupa indeksa 2, pa je invarijantna i $s^2\in H$) je veoma čest kod grupa simetrije fizičkih sistema: takvu strukturu imaju sve aksijalne tačkaste grupe, zatim veliki broj prostornih grupa kristala, kao i proširene Lorentz-ova i Poincaré-ova grupa. Teorem 3.15 pokazuje da male grupe reprezentacija mogu biti samo H (odgovarajuće orbite su dvočlane) ili G, (jednočlane orbite). Drugim rečima, s-konjugacija povezuje neke parove ireducibilnih reprezentacija podgrupe, a neke reprezentacije ne menja.

Neka je $\Delta^{(\mu)}(H)$ ireducibilna reprezentacija podgrupe, sa malom grupom H i dvočlanom orbitom $\{\Delta^{(\mu)}(H), \Delta_s^{(\mu)}(H)\}$. Već je ukazano da indukcija odmah daje ireducibilnu reprezentaciju grupe G, tj. reprezentacija $D^{(\mu)}(G) = \Delta^{(\mu)}(H) \uparrow G$, sa matricama (definicija 3.19)

$$D^{(\mu)}(h) = \begin{pmatrix} \Delta^{(\mu)}(h) & 0 \\ 0 & \Delta_s^{(\mu)}(h) \end{pmatrix}, \quad D^{(\mu)}(sh) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta^{(\mu)}(s^2)\Delta_s^{(\mu)}(h) \\ \Delta^{(\mu)}(h) & 0 \end{pmatrix}, \quad h \in H, \tag{3.6}$$

je odgovarajući asocirani skup.

Nasuprot tome, napomenuto je da se, kada je $L^{(\mu)} = G$, pa i $O^{(\mu)} = \{\Delta^{(\mu)}(H)\}$, asocirani skup mora direktno odrediti (dozvoljene reprezentacije, inače međukorak, sada su upravo traženi skup). U razmatranom slučaju je problem lako rešiv.

Lema 3.8 *Neka je $G = H + sH$, $\Delta^{(\mu)}(H)$ reprezentacija podgrupe za koju je $L^{(\mu)} = G$ (tj. $O^{(\mu)} = \{\Delta^{(\mu)}(H)\}$), i Z operator koji uspostavlja ekvivalenciju reprezentacija $\Delta^{(\mu)}(H)$ i $\Delta_s^{(\mu)}(H)$ (tj. $\forall h \in H$ $\Delta_s^{(\mu)}(h) = Z^{-1}\Delta^{(\mu)}(h)Z$). Tada postoji operator Z takav da je $Z^2 = \Delta^{(\mu)}(s^2)$, a asocirani skup je dvočlan: $A^{(\mu)} = \{D^{(\mu,+)}(G), D^{(\mu,-)}(G)\}$, pri čemu je $D^{(\mu,\pm)}(h) = \Delta^{(\mu)}(h)$, i $D^{(\mu,\pm)}(sh) = \pm Z\Delta^{(\mu)}(h)$.*

▬*Dokaz:* Razmatraće se, za fiziku relevantan, slučaj unitarnih reprezentacija. Tada se među operatorima koji uspostavljaju ekvivalenciju reprezentacija $\Delta^{(\mu)}(H)$ i $\Delta_s^{(\mu)}(H)$ nalaze i unitarni, i ako je Z takav, svi ostali su, na osnovu Schur-ove leme, oblika $e^{\imath\phi}Z$. Dvostrukom s-konjugacijom nalazi se $(\Delta_s^{(\mu)})_s(H) = \Delta_{s^2}^{(\mu)}(H)$, pa pošto je s^2 iz H, a transformacija sličnosti operatorom Z s-konjuguje sve matrice iz $\Delta^{(\mu)}(H)$, za svako $h \in H$ važi ${\Delta^{(\mu)}}^{-1}(s^2)\Delta^{(\mu)}(h)\Delta^{(\mu)}(s^2) = \Delta_{s^2}^{(\mu)}(h) = Z^{-1}\Delta^{(\mu)}(s^{-1}hs)Z = Z^{-2}\Delta^{(\mu)}(h)Z^2$. Ponovnom primenom Schur-ove leme se zaključuje da je $Z^2 = e^{\imath\lambda}\Delta^{(\mu)}(s^2)$, a sloboda izbora faznog faktora u Z omogućava rešenje $Z^2 = \Delta^{(\mu)}(s^2)$. Ovakve osobine operatora Z omogućavaju da se indukovana reprezentacija (3.6), prepisana kao $D(h) = \begin{pmatrix} \Delta^{(\mu)}(h) & 0 \\ 0 & Z^{-1}\Delta^{(\mu)}(h)Z \end{pmatrix}$, $D(sh) = \begin{pmatrix} 0 & Z\Delta^{(\mu)}(h)Z \\ \Delta^{(\mu)}(h) & 0 \end{pmatrix}$, transformacijom sličnosti matricom $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & Z \\ I & -Z \end{pmatrix}$ prevede u redukovani oblik $D(G) = D^{(\mu,+)}(G) \oplus D^{(\mu,-)}(G)$, što pokazuje da su reprezentacije $D^{(\mu,\pm)}(G)$ kompletan asocirani skup. ▮

Gornja lema ostavlja problem određivanja operatora Z, što se rešava metodom grupnih operatora. Naime, ako se $\Delta^{(\mu)}(H)$ i $\Delta_s^{(\mu)}(H)$ shvate kao matrice koje iste operatore reprezentuju u dva različita bazisa, Z je operator koji povezuje ove bazise. Tako, ako se za apsolutni bazis uzme onaj u kome se dobija reprezentacija $\Delta^{(\mu)}(H)$, treba formirati operatore $P_i^{(\mu)} = \frac{|\mu|}{|H|}\sum_{h\in H} {\Delta_{i1}^{(\mu)}}^*(h)\Delta_s^{(\mu)}(h)$. Zatim se odredi proizvoljni bazisni ort jednodimenzionalne oblasti likova projektora $P_1^{(\mu)}$, i delujući na njega ostalim grupnim operatorima, nalazi se ceo novi bazis. Vektori ovog bazisa čine kolone matrice Z, koju još treba pomnožiti pogodnim faznim faktorom, da bi se zadovoljio uslov $Z^2 = \Delta^{(\mu)}(s^2)$.

Kada je grupa semidirektni proizvod podgrupe H sa podgrupom reda 2, predstavnik koseta s se može izabrati tako da je $s^2 = e$, što dovodi do pojednostavljenja, $\Delta^{(\mu)}(s^2) = I$ (u (3.6)) i $Z^2 = I$ (u poslednjoj lemi).

***Zadatak 3.58**:* Odrediti ireducibilne reprezentacije grupa $\mathbf{C}_{4v}$ i K_8 (zadatak 3.10), indukcijom sa invarijantne podgrupe $\mathbf{C}_4$.

3.3.8 Slučaj kada je $G = H \wedge K$, a H je Abel-ova

Ova struktura grupe se takođe često javlja u fizičkim problemima: mnoge prostorne grupe kristala, Poincaré-ova i Euklid-ova grupa. Specifična struktura grupe G, se odražava na strukturu male grupe svake ireducibilne reprezentacije podgrupe H, a njihova jednodimenzionalnost (lema 3.5) omogućava jednostavnu konstrukciju dozvoljenih reprezentacija.

Lema 3.9 *Neka je $G = H \wedge K$ i $\Delta^{(\mu)}(H)$ ireducibilna reprezentacija podgrupe H. Mala grupa ove reprezentacije je semidirektni proizvod $L^{(\mu)} = H \wedge K_\mu$, gde je K_μ podgrupa u K.*

Dokaz: Za predstavnike koseta podgrupe H u grupi G se mogu uzeti svi elementi podgrupe K: $G = k_1 H + \cdots + k_{|K|}H$. Pošto je, prema teoremu 3.15, H invarijantna podgrupa i u $L^{(\mu)}$, indeksa $m = \frac{|L^{(\mu)}|}{|H|}$, pogodnom numeracijom se može dobiti da prvih m koseta u razvoju grupe, čini podgrupu $L^{(\mu)}$: $L^{(\mu)} = k_1 H + \cdots + k_m H$. Kako proizvod $k_i k_j$ pripada K, sledi da transverzala $\{k_1, \ldots, k_m\}$ mora biti zatvorena pri množenju, te čini podgrupu u K, koja osim jediničnog, nema zajedničkih elemenata sa invarijantnom podgrupom H. ∎

Na taj način je utvrđena opšta struktura malih grupa ireducibilnih reprezentacija podgrupe H. Pitanje dozvoljenih reprezentacija, kada je H Abel-ova grupa, rešava

Teorem 3.18 *Neka je $G = H \wedge K$ i $\Delta^{(\mu)}(H)$ (jednodimenzionalna) ireducibilna reprezentacija podgrupe H, sa malom grupom $L^{(\mu)} = H \wedge K_\mu$ ($K_\mu < K$). Ako je $\{d^{(\alpha)}(K_\mu) \,|\, \alpha = 1, \ldots, p_\mu\}$ kompletan skup neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija podgrupe K_μ, tada je kompletan skup dozvoljenih reprezentacija male grupe dat operatorima*

$$\{d^{(\mu,\alpha)}(hk) = \Delta^{(\mu)}(h) d^{(\alpha)}(k) \,|\, h \in H,\ k \in K_\mu,\ \alpha = 1, \ldots, p_\mu\}.$$

Dokaz: Prvo će biti proveren homomorfizam:

$$d^{(\mu,\alpha)}(hkh'k') = d^{(\mu,\alpha)}(hkh'k^{-1}kk') = \Delta^{(\mu)}(h)\Delta^{(\mu)}(kh'k^{-1})d^{(\alpha)}(kk') =$$

$$= \Delta^{(\mu)}(h)\Delta^{(\mu)}(h')d^{(\alpha)}(k)d^{(\alpha)}(k') = d^{(\mu,\alpha)}(hk)d^{(\mu,\alpha)}(h'k')$$

(druga jednakost sledi zbog invarijantnosti podgrupe H, treća iz činenice da je k element male grupe i da je ekvivalentnost kod jednodimenzionalnih reprezentacija zapravo jednakost).
Neekvivalentnost i ireducibilnost reprezentacija $d^{(\mu,\alpha)}(L^{(\mu)})$ se pokazuje na osnovu teorema 3.11: kada se uoči da je $\chi^{(\mu,\alpha)}(hk) = \chi^{(\mu)}(h)\chi^{(\alpha)}(k)$, tražena relacija, $\frac{1}{|L^{(\mu)}|}\sum_{n,k}\chi^{(\mu,\alpha)^*}(hk)\chi^{(\mu,\beta)}(hk) = \delta_{\alpha\beta}$, postaje očigledna.
Jasno da se suženjem na podgrupu H nalazi razlaganje $d^{(\mu,\alpha)}(L^{(\mu)}) \downarrow H = |d^{(\alpha)}(K_\mu)|\Delta^{(\mu)}(H)$, te su ove reprezentacije dozvoljene.
Konačno, da bi se pokazalo da je u pitanju kompletan skup dozvoljenih reprezentacija, biće proveren Burnside-ov teorem za indukovane reprezentacije; naime, tako se proverava da se indukcijom dobija kompletan skup neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija grupe G. Prvo će biti ispisan Burnside-ov teorem za H i K_μ: $\sum_\mu |\Delta^{(\mu)}(H)| = \sum_{O^{(\mu)}} |O^{(\mu)}| = |H|$, odnosno $\sum_\alpha |d^{(\alpha)}(K_\mu)|^2 = |K_\mu|$. Dimenzija indukovane reprezentacije je $|d^{(\mu,\alpha)}(L^{(\mu)}) \uparrow G| = |d^{(\alpha)}(K_\mu)|\frac{|G|}{|L^{(\mu)}|} = |d^{(\alpha)}(K_\mu)|\frac{|K|}{|K_\mu|}$, a $|O^{(\mu)}| = \frac{|K|}{|K_\mu|}$), i rezultat se odmah dobija:
$\sum_{O^{(\mu)},\alpha}(|d^{(\alpha)}(K_\mu)|\frac{|K|}{|K_\mu|})^2 = \sum_{O^{(\mu)}}|O^{(\mu)}|^2\sum_\alpha |d^{(\alpha)}(K_\mu)|^2 = \sum_{O^{(\mu)}}|O^{(\mu)}||K| = |H||K| = |G|$. ∎

Eksplicitni oblik matrica indukovanih ireducibilnih reprezentacija se lako dobija na osnovu razmotrene geometrijske slike. Zbog jednodimenzionalnosti početnih reprezentacija, indeks i u (3.5) se može izostaviti, i ukupni bazis je $\{|\ \nu, l\rangle \,|\, \nu \in O^{(\mu)},\ l = 1, \ldots, |d^{(\alpha)}(K_\mu)|\}$ (npr. vektori $|\ 1, l, 1\rangle$ su označeni kao $|\ \mu, l\rangle$). Kao i ranije, predstavnik koseta male grupe je indeksiran oznakom ireducibilne reprezentacije u koju s-konjugacijom preslikava reprezentaciju $\Delta^{(\mu)}(H)$. Zamenjujući u definiciju 3.19 oblik dozvoljene reprezentacije nađen u teoremu 3.18, nalazi se:

$$D^{(\mu,\alpha)}_{\nu\lambda}(hk) = \Delta^{(\mu)}(h')d^{(\alpha)}(k')\delta(t_\nu^{-1}ht_\nu t_\nu^{-1}kt_\lambda, h'k') = \Delta^{(\nu)}(h)d^{(\alpha)}(k')\delta(t_\nu^{-1}kt_\lambda, k').$$

U poslednjoj jednakosti je iskorišćena definicija s-konjugacije, a k' je element iz K_μ: ako je za dati izbor indeksa element $t_\nu^{-1}kt_\lambda$ izvan ove podgrupe, ceo blok je jednak nuli, dok je u suprotnom slučaju $\Delta^{(\mu)}(t_\nu^{-1}ht_\nu) \otimes d^{(\alpha)}(t_\nu^{-1}kt_\lambda)$. Treba zapaziti da k' nije isti u svim nenultim blokovima, već je funkcija od k, ν i λ; pri zadatom λ samo je jedan blok, sa prvim indeksom $\nu = \nu(\lambda)$, različit od nule, te je zapravo $k^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} k'(k,\lambda)$. Time svaka reprezentacija orbite uspostavlja jedno preslikavanje grupe K na podgrupu K_μ. Prema tome, u bazisu $\{|\ \nu, l\rangle\}$ (prvo se menja drugi indeks), matrica indukovane reprezentacije elementa nk, gde je $k \in t_\phi K^{(\mu)}$, ima oblik:

$$D(nk) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \mu & \cdots & \lambda & \cdots & \mid O^{(\mu)} \mid \end{array} \\ \begin{array}{c} \mu \\ \\ \phi \\ \\ \nu(\lambda) \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Delta^{(\phi)}(n) \otimes d^{(\alpha)}(k^\mu) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta^{(\nu)}(n) \otimes d^{(\alpha)}(k^\lambda) & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.7}$$

Zadatak 3.59: Odrediti ireducibilne reprezentacije grupe $\mathbf{C}_{4v}$, koristeći njenu strukturu $\mathbf{C}_{4v} = \mathbf{C}_4 \wedge \{e, \sigma_x\}$.

3.3.9 Reprezentacije direktnog proizvoda grupa

Ako je $G = H \otimes K$, obe podgrupe su invarijantne, njihovi elementi komutiraju, i s-konjugacijama se uvek dobija reprezentacija ekvivalentna početnoj, tj. male grupe su uvek jednake celoj grupi. Stoga je metod indukcije pri ovakvoj strukturi grupe neefikasan. Ispostavlja se, međutim, da je poznavanje ireducibilnih reprezentacija podgrupa H i K dovoljno za veoma jednostavno određivanje ireducibilnih reprezentacija cele grupe.

U stvari, proizvoljne reprezentacije podgrupa H i K, $\Delta_1(H)$ i $\Delta_2(K)$, određuju reprezentaciju grupe G kao njihov Kronecker-ov proizvod:

$$\forall g = hk,\ h \in H\ k \in K \quad D(hk) = \Delta_1(h) \otimes \Delta_2(k). \tag{3.8}$$

Lako se pokazuje da je ovo zaista reprezentacija. Ona se označava sa $D(G) = \Delta_1(H) \otimes \Delta_2(K)$, a karakter joj je $\chi(g) = \chi_1(h)\chi_2(k)$.

Ova konstrukcija omogućava neposredno nalaženje svih ireducibilnih reprezentacija grupe G.

Teorem 3.19 *Neka su $\{\Delta^{(\mu)}(H) \mid \mu = 1, \ldots, p_H\}$ i $\{d^{(\alpha)}(K) \mid \alpha = 1, \ldots, p_K\}$ kompletni skupovi neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija podgrupa H i K, respektivno. Kompletan skup neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija grupe G je*

$$\{D^{(\mu\alpha)}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{(\mu)}(H) \otimes d^{(\alpha)}(K) \mid \mu = 1, \ldots, p_H,\ \alpha = 1, \ldots, p_K\}$$

▬*Dokaz:* Na osnovu ortogonalnosti primitivnih karaktera podgrupa nalazi se

$$(\chi^{(\mu\alpha)}(G), \chi^{(\nu\beta)}(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi^{(\mu\alpha)^*}(g)\chi^{(\nu\beta)}(g) = (\chi^{(\mu)}(H), \chi^{(\nu)}(H))(\chi^{(\alpha)}(K), \chi^{(\beta)}(K)) = \delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta},$$

što pokazuje kako da su dobijene reprezentacije ireducibilne, tako i njihovu međusobnu neekvivalentnost. Konačno, ima ih tačno $p_H p_K = p_G$, koliko i različitih neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija grupe G (lema 3.4). ▮

Zadatak 3.60: Odrediti ireducibilne reprezentacije grupe $\mathbf{D}_{4h} = \mathbf{C}_{4h} \otimes \{e, \sigma_h\}$.

Glava 4

LIE-JEVE ALGEBRE

Pre tridesetak godina je u fizici elementarnih čestica, kao nikada ranije, simetrija postala jedan od kamena temeljaca teorijskih modela. Odgovarajući formalizam, teorija grupa, morao se prilagoditi novim zahtevima: za razliku od drugih oblasti fizike, dominantnu ulogu su dobile unitarne i ortogonalne matrične grupe, sa neprebrojivo mnogo elemenata, ali sa pogodnom topološkom strukturom mnogostrukosti, koja dozvoljava relativno jednostavna razmatranja. Naime, za takve, tzv. Lie-jeve grupe, moguće je najveći deo osobina rekonstruisati proučavanjem tangentnog prostora u jediničnom elementu: u ovom prostoru se može uvesti posebno, Lie-jevo množenje, čime on postaje algebra. Ispostavlja se da se struktura Lie-jeve algebre javlja i u drugim kontekstima u fizici (npr. u kanoničnom formalizmu teorijske mehanike), te da njeno izučavanje, pored toga što olakšava simetrijska razmatranja, ima i nezavisan značaj.

4.1 OSNOVNI POJMOVI

yap.exe -1 -s ”

4.1.1 Struktura Lie-jeve algebre

Definicija 4.1 *n-dimenzionalna algebra A nad poljem $\mathbb{F}$ je n-dimenzionalni vektorski prostor $A(\mathbb{F})$ sa binarnom bilinearnom operacijom (množenje): $\forall x,y,z \in A, \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad (x+y)z = xz + yz, \quad x(y+z) = xy + xz.$*

Različite vrste algebri se karakterišu dodatnim osobinama množenja. U fizičkim problemima se najčešće javljaju Lie-jeve i asocijativne.

Asocijativna algebra je algebra sa asocijativnim množenjem, a ukoliko postoji jedinični element u odnosu na množenje, govori se o asocijativnoj algebri sa jedinicom. Najvažniji primeri ovakvih algebri su skupovi linearnih operatora, tj. endomorfizama, u nekom vektorskom prostoru $\mathcal{H}$, sa kompozicijom operatora kao množenjem; označavaju se sa $\mathrm{End}(\mathcal{H})$. Među njima su i matrične algebre $\mathbb{F}^{nn} = \mathrm{End}(\mathbb{F}^n)$.

Zadatak 4.1: *Tenzorska algebra* vektorskog prostora $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ je direktni zbir prostora

$$T=\sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r, \quad T_s^r=\underbrace{\mathcal{H}\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}}_{s}\otimes\underbrace{\mathcal{H}^*\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}^*}_{r}, \quad T_0^0=\mathbb{F}$$

($\mathcal{H}^*$ je dualni prostor za $\mathcal{H}$). Pokazati da je ovo jedna asocijativna algebra sa jedinicom u odnosu na direktno množenje vektora.

Neka je $\{x_1,\dots,x_n\}$ proizvoljni bazis algebre A. Proizvod bilo koja dva vektora bazisa je opet element algebre, odnosno linearna kombinacija bazisnih vektora:

$$x_i x_j=\sum_k c_{ij}^k x_k, \quad c_{ij}^k\in\mathbb{F}. \tag{4.1}$$

Zahvaljujući bilinearnosti množenja, poznavanje koeficijenata c_{ij}^k omogućava nalaženje proizvoda bilo koja dva vektora iz A. Stoga je zadavanje ovih koeficijenata ekvivalentno zadavanju strukture množenja, i oni se nazivaju *strukturne konstante*. Jasno je da strukturne konstante zavise od bazisa; preciznije, one čine dvaput kovarijantni i jedanput kontravarijantni tenzor trećeg reda, kao što i sama oznaka sugeriše.

Zadatak 4.2:$^\circ$ Proveriti tenzorske osobine strukturnih konstanti.

Zadatak 4.3: Odrediti strukturne konstante algebre $\mathbb{F}^{nn}$ za apsolutni bazis: $(E_{ij})_{st}=\delta_{is}\delta_{jt}$. Koje su strukturne konstante algebre $\mathrm{End}(\mathcal{H})$?

U nastavku će se razmatrati samo Lie-jeve algebre, iako se mnogi pojmovi i rezultati mogu uopštiti[1].

Definicija 4.2 Lie-jeva algebra $L(\mathbb{F})$ *je algebra u kojoj množenje, tzv.* komutator, $[\ ,\ ]$, *zadovoljava:*

(i) *antisimetričnost:* $\forall x,y\in L \quad [x,y]=-[y,x]$;

(ii) *Jacobi-jev identitet:* $\forall x,y,z\in L \quad [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$.

Primenom na vektore nekog bazisa algebre uslovi (i) i (ii) se izražavaju preko strukturnih konstanti:

$$c_{ij}^k=-c_{ji}^k, \quad \sum_s(c_{is}^p c_{jk}^s+c_{js}^p c_{ki}^s+c_{ks}^p c_{ij}^s)=0. \tag{4.2}$$

Iz antisimetričnosti sledi da je $[x,x]=0$ za svaki vektor x, što znači i da je $c_{ii}^k=0$ za svako i i k. Zamenom $x=y+z$ se pokazuje i da $[x,x]=0$ povlači uslov antisimetričnosti, tj. da mu je ekvivalentan.

Komutator dva potprostora A i B definiše se kao lineal nad skupom komutatora njihovih vektora, tj. $[A,B]=\mathrm{span}\,(\{[a,b]\mid a\in A, \quad b\in B\})$. Pošto su A i B potprostori, pa uz svaki vektor sadrže i vektor suprotnog znaka, sledi da je $[A,B]=[B,A]$.

Kaže se da je L *Abel-ova (komutativna)* algebra ako je $[x,y]=0$ za svako x i y iz L, tj. $[L,L]=\{0\}$. Očigledno je da su u tom slučaju sve strukturne konstante jednake 0.

Važni primeri Lie-jevih algebri se dobijaju iz asocijativnih algebri: kada se u asocijativnoj algebri sa množenjem $\circ$ definiše novo množenje $[x,y]=x\circ y-y\circ x$, ono zadovoljava uslove (i) i (ii) iz definicije 4.2, tj. u odnosu na ovo množenje isti skup je Lie-jeva algebra. Na ovaj način konstruisane Lie-jeve iz asocijativnih algebri $\mathrm{End}(\mathcal{H})$, odnosno $\mathbb{F}^{nn}$, označavaju se sa $\mathrm{gl}(\mathcal{H})$, odnosno $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$.

[1]Termin algebra ubuduće označava samo Lie-jeve algebre.

Zadatak 4.4: a) Odrediti strukturne konstante Lie-jeve algebre koja se na opisani način dobija iz asocijativne algebre sa strukturnim konstantama a_{ij}^k. b) Koristeći a) i zadatak 4.3 odrediti strukturne konstante Lie-jeve algebre $\mathrm{gl}(\mathcal{H})$.

Zadatak 4.5: Odrediti sve neizomorfne algebre dimenzija 1 i 2.

Zadatak 4.6: a) Pokazati da vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ čini algebru u odnosu na vektorski proizvod, i odrediti strukturne konstante u apsolutnom bazisu. b) Pokazati da je prostor funkcija na faznom prostoru algebra u odnosu na Poisson-ovu zagradu. c) Pokazati da operatori impulsa, koordinate i jedinični operator u Hilbert-ovom prostoru obrazuju trodimenzionalnu, tzv. *Heisenberg-ovu* algebru.

Zadatak 4.7: Neka je $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$ skup svih matrica nultog traga iz $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$. Pokazati da je to Lie-jeva algebra, i odrediti joj dimenziju.

Zadatak 4.8: Neka je M nesingularna matrica iz $\mathbb{F}^{nn}$ i $\mathrm{so}_M(n,\mathbb{F})$ skup matrica iz $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$ koje zadovoljavaju uslov $A^TM=-MA$. Pokazati da je $\mathrm{so}_M(n,\mathbb{F})$ Lie-jeva algebra koja je podskup u $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$.

Zadatak 4.9: a) $\mathrm{so}(p,q,\mathbb{F})$ je skup svih matrica iz $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$ za koje je $A^TM(p,q)=-M(p,q)A$, gde je $M(p,q)=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p},\underbrace{-1,\dots,-1}_{q})$, $p+q=n$. $\mathrm{so}(n,0,\mathbb{F})$ se obeležava sa $\mathrm{so}(n,\mathbb{F})$. Pokazati da je $\mathrm{so}(p,q,\mathbb{F})$ Lie-jeva algebra, odrediti joj dimenziju i naći komutacione relacije u bazisu $\{A_{ij}=E_{ij}-E_{ji}\quad i<j\le p,\ \text{ili}\ p<i<j;\quad S_{ij}=E_{ij}+E_{ji}\quad j>p\ge i\}$.
b) Za $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})$ odrediti strukturne konstante u bazisu

$$r_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad r_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad r_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

i uporediti sa algebrom iz zadatka 4.6a.
c) Pokazati da matrice

$$r_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},r_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},r_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$b_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

čine bazis u $\mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$ i odrediti strukturne konstante u ovom bazisu.

Zadatak 4.10: a) $\mathrm{su}(n)$ je skup svih kosohermitskih matrica iz $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$. Pokazati da je to realna Lie-jeva algebra, odrediti joj bazis i dimenziju.
b) Pokazati da matrice

$$t_1=-\frac{\imath}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},t_2=-\frac{\imath}{2}\begin{pmatrix}0&-\imath\\\imath&0\end{pmatrix},t_3=-\frac{\imath}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

čine bazis algebre $\mathrm{su}(2)$, odrediti strukturne konstante u ovom bazisu i uporediti sa zadatkom 4.6a. (Hermitske matrice $\tau_i=2\imath t_i$ nazivaju se *Pauli-jeve* matrice.)
c) Pokazati da matrice $T_i=-\frac{\imath}{2}\lambda_i$, gde su λ_i *Gell-Mann-ove* matrice

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\lambda_2=\begin{pmatrix}0&-\imath&0\\\imath&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-\imath\\0&0&0\\\imath&0&0\end{pmatrix},\lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\imath\\0&\imath&0\end{pmatrix},\lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

čine bazis algebre $\mathrm{su}(3)$.

Zadatak 4.11: $\mathrm{u}(n)$ je skup svih kosohermitskih matrica iz $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$. Pokazati da je to Lie-jeva algebra i odrediti joj bazis i dimenziju.

Zadatak 4.12: Ako je $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ (I_n jedinična matrica dimenzije n), pokazati da je skup $\mathrm{sp}(n,\mathbb{F})$ svih matrica iz $\mathrm{gl}(2n,\mathbb{F})$, takvih da je $A^T M = -MA$ jedna Lie-jeva algebra i odrediti joj dimenziju.

4.1.2 Podalgebre, ideali, zbirovi

Izvedena podstruktura u slučaju algebre je podalgebra i ona je analogon pojmu podgrupe u teoriji grupa, ako se uzmu u obzir sve operacije koje karakterišu Lie-jevu algebru. Isto važi za invarijantnu podgrupu i ideal. Kao što će se kasnije videti, nije u pitanju samo analogija, već jedna manifestacija veze Lie-jevih grupa i algebri.

Definicija 4.3 *Potprostor $A(\mathbb{F})$ algebre $L(\mathbb{F})$ koji je i sam algebra u odnosu na množenje iz L, tj. važi $[A,A] \subset A$, naziva se* podalgebra *algebre L, $A < L$;* ideal *A u L, $A \triangleleft L$, je podalgebra čiji elementi pomnoženi bilo kojim elementom algebre ponovo daju element iz A, tj. $[A,L] \subset A$.*

Postojanje podstruktura se odražava i na strukturne konstante. Neka je A proizvoljna m-dimenzionalna podalgebra u L i $\{x_1,\dots,x_n\}$ adaptirani bazis u L, sa prvih m vektora iz A. Iz definicije sledi da je u ovom bazisu $c_{ij}^k = 0$ za $i,j \le m$, a $k > m$. Slično, u slučaju ideala je $c_{ij}^k = 0$ za $k > m$ ako je $i \le m$ ili $j \le m$.

Lako je proveriti da je presek podalgebri podalgebra, a presek ideala ideal. Slično, Jacobi-jev identitet povlači da je komutator dva ideala ideal u L koji je podskup preseka.

Iz antisimetričnosti i bilinearnosti komutatora sledi da je svaki jednodimenzionalni potprostor u L jedna komutativna podalgebra. Ako je A neka podalgebra u L, njen *normalizator*, tj. skup $N(A) = \{n \in L \mid \forall a \in A \quad [n,a] \in A\}$, je podalgebra. Važan primer ideala, i to komutativnog, je *centar* algebre; to je skup onih elemenata algebre koji komutiraju sa svim elementima L: $Z(L) = \{z \in L \mid \forall x \in L \quad [z,x] = 0\}$.

Zadatak 4.13: a) Pokazati da je $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$ ideal u $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$ i odrediti centre ovih algebri. b) Pokazati da je $\mathrm{su}(n)$ ideal u $u(n)$ i odrediti centre ovih algebri. c) Odrediti centar algebre $\mathrm{so}(n,\mathbb{F})$.

Definicija 4.4 Spoljašnji direktni zbir *Lie-jevih algebri $A(\mathbb{F})$ i $B(\mathbb{F})$ je Lie-jeva algebra $A+B$ koja je direktni zbir vektorskih prostora A i B sa množenjem $[(a,b),(a',b')] = ([a,a'],[b,b'])$. Algebra L je* unutrašnji direktni zbir *ideala A i B, ako je L direktni zbir potprostora A i B, što se označava sa $L = A \oplus B$. Algebra L je* semidirektni zbir *ideala A i podalgebre B, $L = A \wedge B$, ako je L direktni zbir potprostora A i B.*

Ako je L spoljašnji direktni zbir algebri A i B, onda je L istovremeno unutrašnji direktni zbir ideala $A' = \{(a,0) \mid a \in A\}$ i $B' = \{(0,b) \mid b \in B\}$ (izomorfnih algebrama A i B, definicija 4.5).

U slučaju semidirektnog zbira važi $[A,A] \triangleleft A, [B,B] \triangleleft B$ i $[A,B] < A$, dok kod direktnog zbira poslednja relacija postaje $[A,B] = 0$. Ovi odnosi se manifestuju i kroz anuliranje niza strukturnih konstanti u adaptiranim bazisima.

Zadatak 4.14: *Poincaré-ova* algebra, π, je desetodimenzionalna algebra sa komutacionim relacijama u bazisu $\{p_\mu, r_i, b_j \mid \mu = 0,1,2,3; \quad i,j = 1,2,3\}$: $[r_i,r_j] = \sum \varepsilon_{ijk} r_k$, $[r_i,b_j] = \sum \varepsilon_{ijk} b_k$, $[b_i,b_j] = -\sum \varepsilon_{ijk} r_k$, $[r_i,p_j] = \sum \varepsilon_{ijk} p_k$, $[r_i,p_0] = 0$, $[b_i,p_0] = p_i$, $[b_i,p_j] = -\delta_{ij} p_0$, $[p_\mu,p_\nu] = 0$. Pokazati da je $\pi = t^4 \wedge \mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$ (t^4 je četvorodimenzionalna realna Abel-ova algebra).

4.1.3 Homomorfizmi i reprezentacije

Definicija 4.5 Homomorfizam *Lie-jeve algebre $L(\mathbb{F})$ u Lie-jevu algebru $L'(\mathbb{F}')$, gde je $\mathbb{F}$ potpolje za $\mathbb{F}'$, je linearni operator $f : L \to L'$, za koji važi $\forall x, y \in L \quad f([x,y]) = [f(x), f(y)]$.* Reprezentacija *(linearna) algebre L je homomorfizam D algebre L u neku algebru $\mathrm{gl}(\mathcal{H})$. Dimenzija reprezentacije je dimenzija prostora $\mathcal{H}$. Dve reprezentacije su* ekvivalentne *ako se mogu povezati transformacijom sličnosti pomoću nekog nesingularnog operatora. Reprezentacija D je* reducibilna *ako postoji netrivijalni potprostor u $\mathcal{H}$ invarijantan za sve operatore $D(L)$, a* ireducibilna *ako ovakav potprostor ne postoji. Reducibilna reprezentacija je* razloživa *ako je prostor $\mathcal{H}$ direktni zbir netrivijalnih potprostora invarijantnih za operatore $D(L)$.*

Pojmovi izomorfizma (i verne reprezentacije), automorfizma, endomorfizma i epimorfizma se uvode na uobičajen način. Slično kao i kod grupa, *jezgro (kernel) homomorfizma*, tj. skup $\ker(f) = \{x \in L \mid f(x) = 0\}$, je ideal.

Zadatak 4.15: Pokazati izomorfizme: a) $\mathrm{so}(3,\mathbb{R}) \cong \mathrm{su}(2)$; b) $\mathrm{so}(3,\mathbb{C}) \cong \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Posebno mesto u teoriji Lie-jevih algebri ima *pridružena reprezentacija*, $\mathrm{ad}(L)$. Prostor ove reprezentacije je sama algebra L, tj. $\mathrm{ad} : L \to \mathrm{gl}(L)$, a operatori se indukuju množenjem:

$$\mathrm{ad}(x)y = [x,y]. \tag{4.3}$$

Pošto je uslov homomorfizma $\mathrm{ad}([x,y])z = [[x,y],z] = [x,[y,z]] - [y,[x,z]] = (\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x))z = [\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)]z$ ispunjen za svako z iz L, $\mathrm{ad}(L)$ je zaista reprezentacija L. Na osnovu definicije se nalazi da je $\ker(\mathrm{ad}) = Z(L)$, a formula reprezentovanja pokazuje da su matrični elementi ove reprezentacije upravo strukturne konstante:

$$\mathrm{ad}_{kj}(x_i) = c_{ij}^k. \tag{4.4}$$

Stoga, bez obzira što ne mora biti verna (verna je samo ako je $Z(L) = 0$), ova reprezentacija nosi celokupnu informaciju o strukturi algebre.

Kako su kvantnomehanički prostori stanja kompleksni, za fiziku su interesantne pre svega kompleksne reprezentacije. Stoga će kasnija razmatranja biti ograničena na takve reprezentacije, osim kada je u pitanju ad.

Zadatak 4.16: Odrediti pridruženu reprezentaciju proizvoljnog elementa za $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})$ i Heisenberg-ovu algebru.

Zadatak 4.17: Neka je L podalgebra u $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$ i $\{a_i^\dagger, a_i \mid i = 1,\dots,n\}$ skup n kreacionih i anihilacionih operatora u Fock-ovom prostoru n različitih (kvazi)čestica iste statistike (tj. važi $[a_i, a_j^\dagger]_\mp = \delta_{ij}$, $[a_i, a_j]_\mp = [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_\mp = 0$, gde se antikomutator odnosi na fermione, a komutator na bozone). Pokazati da su operatori $D(x) = \sum_{ij} a_i^\dagger x_{ij} a_j$ reprezentacija L u Fock-ovom prostoru.

4.1.4 Killing-ova forma

Umesto skalarnog proizvoda kod običnih vektorskih prostora, kod Lie-jevih algebri se uvodi struktura koja je usklađena sa množenjem.

Definicija 4.6 Invarijantna simetrična bilinearna forma algebre $L(\mathbb{F})$ *je preslikavanje* $w : L \times L \to \mathbb{F}$ *sa osobinama:*

(i) *simetričnost:* $\forall x, y \in L \quad w(x,y) = w(y,x)$;

(ii) *bilinearnost:* $\forall x, y, z \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad w(\alpha x + \beta y, z) = \alpha w(x,z) + \beta w(y,z)$;

(iii) *invarijantnost:* $\forall x, y, z \in L \quad w([x,y],z) = w(x,[y,z])$.

Vektori x *i* y *su* ortogonalni *ako je* $w(x,y) = 0$, *a dva podskupa u* L *su ortogonalna ako su svi vektori jednog ortogonalni na sve vektore drugog.* Ortokomplement *skupa* $A \subset L$ *je skup* $A^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in L | \forall a \in A \ w(a,x) = 0\}$. *Forma je* nedegenerisana *ako je* $L^\perp = 0$. Killing-ova forma *Lie-jeve algebre* $L(\mathbb{F})$ *je invarijantna simetrična bilinearna forma* g *definisana sa* $g(x,y) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$; Cartan-ov tenzor *algebre* L *je tenzor* $g_{ij} = g(x_i, x_j)$, *gde je* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *bazis u* L.

Zadatak 4.18: U dvodimenzionalnoj realnoj Abel-ovoj algebri zadata je simetrična bilinearna invarijantna forma w u bazisu $\{x, y\}$: $w(x,x) = 1$, $w(x,y) = 0$ i $w(y,y) = -1$. Pokazati da je forma nedegenerisana i naći ortokomplement ideala obrazovanog vektorom $x + y$, tj. skup vektora z za koje je ispunjeno $w(x+y, z) = 0$.

Zadatak 4.19: Pokazati da su operatori pridružene reprezentacije kososimetrični u odnosu na svaku invarijantnu formu w.

Lako je proveriti da je svako preslikavanje $w(x,y) = \mathrm{Tr}\,(D(x)D(y))$, gde je $D(L)$ reprezentacija algebre L, jedna invarijantna simetrična bilinearna forma, pa je i Killing-ova forma takva. Cartan-ov tenzor se može shvatiti kao matrični oblik ove forme; naime ako se u nekom bazisu vektori x i y izraze kao kolone, a Cartan-ov tenzor kao matrica g, onda je $g(x,y) = x^T g y$. Koristeći (4.4), nalazi se:

$$g_{ij} = \sum_{sm} c_{is}^m c_{jm}^s. \tag{4.5}$$

Killing-ova forma, budući da je izvedena iz same strukture algebre, ima posebno mesto u razvoju teorije Lie-jevih algebri; ona preuzima ulogu koju ima skalarni proizvod kod unitarnih prostora, i u nastavku će se, osim ako nije drugačije naglašeno, svi pojmovi vezani za skalarni proizvod odnositi na Killing-ovu formu.

Lema 4.1 **(i)** *Ortokomplement ideala je ideal;* **(ii)** *Svaki Abel-ov ideal je podideal u* $L^\perp$.

▬*Dokaz:* (i) Neka je A ideal u L. Tada je za svaki vektor a iz A i x iz L ispunjeno $[a,x] \in A$, pa za proizvoljno a' iz $A^\perp$ važi $0 = g([a,x],a') = g(a,[x,a'])$, tj. $[x,a']$ je iz $A^\perp$.
(ii) Neka je A m-dimenzionalni Abel-ov ideal u L, i $\{x_1, \dots, x_n\}$ jedan bazis u L sa prvih m vektora iz A. Ako je a proizvoljni element ideala i x bilo koji element algebre, onda je u ovom bazisu (zvezdicama su naznačene nenulte podmatrice):

$$\mathrm{ad}(a) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}(x) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad g(a,x) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

tj. svaki element Abel-ovog ideala je ortogonalan na celu algebru. ∎

Prema tome, ortokomplement cele algebre, $L^\perp$, je ideal u L, koji sadrži sve Abel-ove ideale. Kada je Killing-ova forma nedegenerisana, tj. $L^\perp = 0$, algebra ne sadrži Abel-ove ideale (osim nultog). Korišćenjem Cartan-ovog tenzora, $L^\perp$ se može shvatiti kao skup vektora x takvih da za svako y važi $y^T g x = 0$. To je ispunjeno ako i samo ako je $gx = 0$, pa je $L^\perp = N(g)$; odavde sledi da je Killing-ova forma nedegenerisana ako i samo ako je $\det g \neq 0$. Iz leme 4.1(ii) sledi da je pridružena reprezentacija verna ako je Killing-ova forma nedegenerisana. Naime, ker(ad) je centar algebre, tj. jedan Abel-ov ideal, koji mora biti $\{0\}$.

Kao i svaka metrika, nedegenerisani Cartan-ov tenzor se može koristiti za spuštanje i dizanje indeksa[2]. Na primer, $c_{ijk} = \sum_m g_{km} c_{ij}^m$; ovaj izraz je tenzor antisimetričan po svim indeksima: naime, pošto je ad u ovom slučaju verna reprezentacija, (4.1) povlači $[\mathrm{ad}(x_i), \mathrm{ad}(x_j)] = \sum_k c_{ij}^k \mathrm{ad}(x_k)$, pa množenje sa $\mathrm{ad}(x_m)$ i nalaženje traga daje $c_{ijm} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(x_i)\mathrm{ad}(x_j)\mathrm{ad}(x_m) - \mathrm{ad}(x_j)\mathrm{ad}(x_i)\mathrm{ad}(x_m))$, izraz očigledno antisimetričan po svim indeksima.

Zadatak 4.20: • Pokazati da za nedegenerisanu Killing-ovu formu važi: a) zbir dimenzija ideala i njegovog ortokomplementa je jednak dimenziji algebre; b) suženje Killing-ove forme na ideal je Killing-ova forma ideala.

4.1.5 Kompleksifikacija, dekompleksifikacija, realna forma

U fizici se najčešće javljaju realne Lie-jeve algebre, tj. algebre nad poljem $\mathbb{R}$. S druge strane, zbog potpunosti kompleksnog polja (sadrži korene svih svojih elemenata, te uvek postoje svojstvene vrednosti operatora), teorija kompleksnih Lie-jevih algebri je prva razvijena i znatno je jednostavnija. Pojmovi kompleksifikacije, dekompleksifikacije i realne forme Lie-jeve algebre povezuju kompleksne i realne algebre, omogućavajući da se neki stavovi, izvedeni za kompleksne, lako prenesu na realne algebre i obrnuto.

Definicija 4.7 Kompleksifikovana (kompleksno proširena) *algebra realne algebre $L = L(\mathbb{R})$ je kompleksna algebra $L_\mathbb{C}$, čiji su elementi kompleksne linearne kombinacije vektora iz L, a množenje se definiše proširenjem po linearnosti*[3]. Dekompleksifikovana *algebra $L_\mathbb{R}$ kompleksne algebre $L = L(\mathbb{C})$ je realna algebra dobijena iz L tako što se uz isti zakon množenja L razmatra kao vektorski prostor nad realnim poljem.* Realna forma *kompleksne algebre $L = L(\mathbb{C})$ je svaka realna Lie-jeva algebra L_r čija je kompleksifikacija $L_{r\mathbb{C}}$ izomorfna sa L.*

$L_\mathbb{C}$ je nadskup za L, ali je svaki bazis u L istovremeno i bazis u $L_\mathbb{C}$ (samo je L obrazovana realnim, a $L_\mathbb{C}$ kompleksnim kombinacijama bazisa), te je dimenzija ovih algebri ista (algebre nisu nad istim poljem, pa nisu izomorfne). U ovakvom bazisu su strukturne konstante za L i $L_\mathbb{C}$ jednake (realne su!).

Dekompleksifikacija se konstruktivno vrši tako da se u L izabere bazis $\{x_1, \dots, x_n\}$, pa se $L_\mathbb{R}$ definiše kao realni prostor nad $2n$ vektora

$$\{x_1, \dots, x_n, x'_1 = \imath x_1, \dots, x'_n = \imath x_n\}.$$

[2] Uobičajen naziv za nalaženje dualnog vektora po Riesz-Fréchet-ovom teoremu.

[3] To znači da se vektori a, b iz $L_\mathbb{C}$ koji su kompleksne kombinacije vektora iz L, $a = x + \imath y$ i $b = u + \imath v$, množe tako da se $\imath$ smatra za skalar i može se izvući ispred komutatora. Prema tome: $[a, b] = [x + \imath y, u + \imath v] = [x, u] - [y, v] + \imath[x, v] + \imath[y, u]$.

Stoga su L i $L_{\mathbb{R}}$ isti skupovi, no sa različitom linearnom strukturom: L je kompleksni vektorski prostor, a $L_{\mathbb{R}}$ realni dvaput veće dimenzije, dok je množenje nepromenjeno. Strukturne konstante u ovom bazisu su realni ili imaginarni delovi početnih:

$$\begin{aligned}
[x_i, x_j] = -[x'_i, x'_j] &= \sum_k \mathrm{Re}(c^k_{ij})\, x_k + \sum_k \mathrm{Im}(c^k_{ij})\, x'_k, \\
[x_i, x'_j] &= \sum_k -\mathrm{Im}(c^k_{ij})\, x_k + \sum_k \mathrm{Re}(c^k_{ij})\, x'_k.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Sve realne forme kompleksne algebre se nalaze određivanjem bazisa u $L(\mathbb{C})$ u kojima su sve strukturne konstante realne, i formiranjem realnih lineala nad ovim bazisima. Sledi da je L_r podskup u L, i da ima istu dimenziju kao L samo nad realnim poljem.

Dok su pri zadatom L algebre $L_{\mathbb{C}}$ i $L_{\mathbb{R}}$ jednoznačno određene, L_r u opštem slučaju nije: neke neizomorfne realne algebre kompleksifikacijom daju istu kompleksnu algebru.

Suženjem ireducibilne reprezentacije $D(L)$ kompleksne algebre L na neku realnu formu L_r dobija se reprezentacija $D(L_r)$ realne forme. Ako bi $\mathcal{M}$ bio invarijantni potprostor za $D(L_r)$, onda bi bio invarijantan i za sve kompleksne linearne kombinacije ovih operatora, odnosno za celu reprezentaciju $D(L)$. To znači da su ireducibilne reprezentacije realne algebre suženja ireducibilnih reprezentacija kompleksifikovane algebre. Ovo zapažanje je značajno jer pokazuje da je dovoljno konstruisati ireducibilne reprezentacije kompleksnih algebri.

Zadatak 4.21: Pokazati da je: a) $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathrm{so}(3,\mathbb{C}) = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$; b) $\mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathrm{so}(3,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{so}(3,\mathbb{C})$; c) $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} = \mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$; d) $\mathrm{so}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{so}(n,\mathbb{C})_r$; e) $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{sl}(n,\mathbb{C})_r$; f) $\mathrm{so}(3,\mathbb{R}) = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_r$, $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_r$; g) $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{gl}(n,\mathbb{C})_r$; h) $\mathrm{su}(n) = \mathrm{sl}(n,\mathbb{C})_r$.

4.2 KLASIFIKACIJA LIE-JEVIH ALGEBRI

Radi lakšeg proučavanja, Lie-jeve algebre su podeljene u dva osnovna tipa: poluproste i razrešive, pri čemu su ove klase disjunktne, a svaka algebra se može izraziti kao semidirektni zbir jedne razrešive i jedne poluproste. U ovom poglavlju će se definisati navedene vrste algebri, zatim utvrditi relativno lak kriterijum za određivanje tipa neke algebre, i analizirati njihove opšte osobine.

4.2.1 Poluproste i razrešive algebre

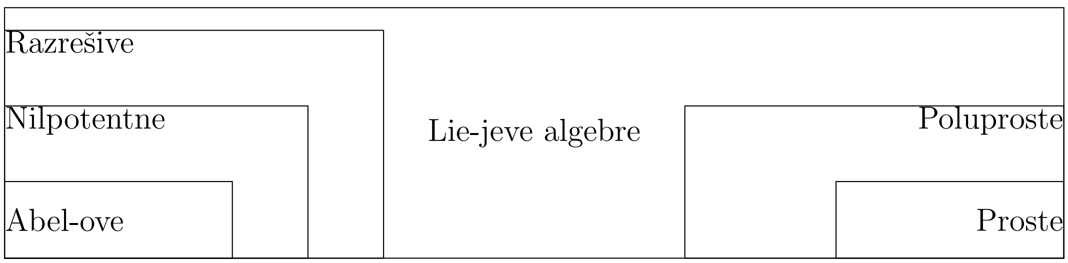
U svakoj Lie-jevoj algebri se mogu definisati dva niza ideala:

$$\begin{aligned}
L^0 &= L, L^1 = [L^0, L^0], \dots, L^k = [L^{k-1}, L^{k-1}] \dots \\
L_0 &= L, L_1 = [L, L_0], \dots, L_k = [L, L_{k-1}] \dots;
\end{aligned}$$

Unutar svakog niza je očigledno svaki ideal podideal prethodnog.

Definicija 4.8 *Lie-jeva algebra (nenulta) je* poluprosta *ako osim nultog nema Abel-ovih ideala; poluprosta algebra je* prosta *ako nema netrivijalnih ideala. Ako je $L^n = 0$ za neko konačno n, Lie-jeva algebra L je* razrešiva*, a ako je $L_m = 0$ za konačno m,* nilpotentna*.*

Pridružena reprezentacija poluprostih algebri je verna, jer je njen kernel centar algebre, a jedini Abel-ov ideal je 0. Kod Abel-ovih algebri je $L_1 = L^1 = 0$, pa su one i nilpotentne i razrešive. Osim toga je $L^k \lhd L_k$, odakle sledi da je svaka nilpotentna algebra istovremeno i razrešiva. Može se reći da su nilpotentnost i razrešivost generalizacije pojma komutativnosti: dok je kod Abel-ovih algebri komutator dva elementa jednak nuli, kod nilpotentnih i razrešivih su nuli jednaki komutatori komutatora određenog stepena. Ako je algebra nilpotentna i $L_m = 0$, vidi se da je njen centar $Z(L) \rhd L_{m-1} \neq 0$. Dalje, kod razrešivih algebri L^{n-1} je nenulti Abel-ov ideal, tako da su klase razrešivih i poluprostih algebri disjunktne.



Slika 4.1: **Podela Lie-jevih algebri.**

Sledeći teorem omogućava određivanje vrste neke algebre pomoću Killing-ove forme.

Teorem 4.1 (Cartan-ov kriterijum) *Lie-jeva algebra L je razrešiva ako i samo ako je $\forall x \in L^1 \quad g(x,x) = 0$, a poluprosta ako i samo ako je Killing-ova forma nedegenerisana.*

▬*Dokaz:* (drugi deo) Lema 4.1 pokazuje da ako je Killing-ova forma nedegenerisana, ne postoje netrivijalni Abel-ovi ideali, te je algebra poluprosta. Ako je Killing-ova forma degenerisana, onda je $L^\perp$ netrivijalni ideal za čije vektore je ispunjeno $g(x,x) = 0$, pa je po prvom delu teorema to jedan razrešivi ideal. Poslednji nenulti član niza $L^{\perp k}$ je Abel-ov ideal (ideal cele algebre je kao komutator ideala), te algebra nije poluprosta. ▮

Ako je g Cartan-ov tenzor u nekom bazisu realne algebre $L(\mathbb{R})$, u istom bazisu kompleksifikovane algebre $L_\mathbb{C}$ Cartan-ov tenzor $g_\mathbb{C}$ ima istu matricu: $g = g_\mathbb{C}$. Isto važi i za Cartan-ove tenzore kompleksne algebre $L(\mathbb{C})$ i realne forme L_r u bazisu L u kome su strukturne konstante realne: $g = g_r$. Odavde sledi da su $L_\mathbb{C}$ i L_r poluproste onda i samo onda ako je L poluprosta. Za dekompleksifikovanu algebru $L_\mathbb{R}$ kompleksne algebre $L(\mathbb{C})$ isti zaključak se izvodi direktno, jer su u pitanju isti skupovi sa istom operacijom množenja. To je razlog i da je $L_\mathbb{R}$ prosta ako i samo ako je takva L.

Zadatak 4.22: Odrediti Killing-ovu formu za algebre $\mathrm{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})$ i Heisenberg-ovu algebru, i zaključiti koje su poluproste.

Zadatak 4.23: Neka je A matrica nekog operatora u bazisu $\{x_1,\dots,x_n\}$ prostora $L(\mathbb{C})$. Odrediti matricu ovog operatora u bazisu $\{x_1,\dots,x_n,\imath x_1,\dots,\imath x_n\}$ prostora $L_\mathbb{R}$. Primenom ovog rezultata na operatore pridružene reprezentacije, uz pomoć Cartan-ovog kriterijuma pokazati da je $L_\mathbb{R}$ poluprosta ako i samo ako je takva L.

4.2.2 Elementarna klasifikacija algebri i reprezentacija

Uvođenje pojmova poluprostih i razrešivih algebri osmišljava sledeći teorem, koji čini osnovu klasifikacije Lie-jevih algebri.

Teorem 4.2 (Levi-Maljcev) *Svaka Lie-jeva algebra je semidirektni zbir $L = R \wedge S$, gde je R razrešivi ideal (i to maksimalni, tzv. radikal algebre), a S poluprosta podalgebra.*

Ovaj zaključak ima dvostruki značaj u teoriji Lie-jevih algebri. Pre svega, daje mogućnost za klasifikaciju svih algebri preko odvojene klasifikacije razrešivih i poluprostih. Pored toga, sugeriše indukciju kao način konstrukcije reprezentacija: ako se uzme u obzir da je razrešivost generalizacija komutativnosti, postaje uočljiva analogija sa indukcijom kod semidirektnih proizvoda grupa kada je prvi faktor Abel-ova grupa.

I pored optimizma koji uliva teorem Levi-Maljceva, klasifikacija svih Lie-jevih algebri nije do kraja izvedena. Naime, pitanje određivanja svih neizomorfnih razrešivih algebri nije rešeno i predstavlja jedan od problema teorije Lie-jevih algebri i grupa. Što se fizike tiče, ovo nije ozbiljna pretnja, jer su praktično sve algebre koje su potrebne ili Abel-ove ili poluproste.

Klasifikacija Abel-ovih algebri je jednostavna: očigledno je da postoji samo po jedna kompleksna i realna Abel-ova algebra svake dimenzije; iz I Schur-ove leme sledi da je jednodimenzionalna svaka ireducibilna reprezentacija konačne dimenzije. Ovaj zaključak se uopštava na sve razrešive algebre:

Teorem 4.3 (Lie) *Svaka konačno-dimenzionalna ireducibilna reprezentacija razrešive algebre je jednodimenzionalna, a reducibilna reprezentacija ne mora biti razloživa.*

▬*Dokaz:* (skica) Kod razrešivih algebri je za neko n ispunjeno $L^n = 0$, pa za svaki homomorfizam f mora važiti $f(L)^n = f(L^n) = 0$, tj. algebra $f(L)$ je razrešiva. Stoga je svaka konačno-dimenzionalna reprezentacija razrešive algebra razrešiva podalgebra neke algebre $\mathrm{gl}(n, \mathbb{F})$. Dalje se može pokazati da je svaka razrešiva podalgebra u $\mathrm{gl}(n, \mathbb{F})$ izomorfna nekoj podalgebri gornje trougaonih matrica iz $\mathrm{gl}(n, \mathbb{F})$. Prema tome, sve konačno-dimenzionalne reprezentacije razrešivih algebri su ekvivalentne reprezentaciji gornje trougaonim matricama (to su matrice čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli) iste dimenzije. Sledi: (i) sve ireducibilne konačno-dimenzionalne reprezentacije razrešivih algebri su jednodimenzionalne; (ii) reducibilne reprezentacije razrešivih algebri ne moraju biti razložive. ▮

Iz Lie-jevog teorema sledi da se problem određivanja reprezentacija razrešivih algebri ne može svesti na klasifikaciju ireducibilnih reprezentacija, jer se reducibilne ne mogu uvek svesti na kvazidijagonalnu formu.

Zadatak 4.24: Pokazati da zbog komutacionih relacija operatora koordinate i impulsa dimenzija prostora stanja u kvantnoj mehanici mora biti beskonačna.

Drugi deo zadatka, klasifikacija poluprostih algebri je urađen, i temelji se na sledećem stavu:

Teorem 4.4 (Artin, Cartan) *Neka je L poluprosta algebra. Tada je $L = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, gde su A_i prosti, međusobno ortogonalni ideali. Ovo razlaganje je jednoznačno do na redosled.*

▬*Dokaz:* Neka je A_1 prost ideal u L. Tada je $A_1^\perp$ ideal u L, i pri tome je $A_1 \cap A_1^\perp = \{0\}$, jer je presek ideal u prostoj algebri A_1. Sada se traži prost ideal A_2 u $A_1^\perp$ i postupak se ponavlja sve dok poslednji dobijeni ortokomplement ne bude prost. Eventualno drugo razlaganje $L = B_1 \oplus \ldots \oplus B_s$ je nemoguće, jer bi netrivijalni preseci $A_i \cap B_j$ bili podideali prostih ideala A_i i B_j. ▮

Na osnovu Artin-ovog teorema, zadatak klasifikacije poluprostih se svodi na klasifikaciju prostih Lie-jevih algebri. Ovaj problem je rešen, prvo za kompleksne, a zatim, uz pomoć kompleksifikacije, dekompleksifikacije i realne forme, i za realne algebre.

Kernel homomorfizma neke poluproste algebre je ideal, te može biti ili nulti ideal (kod izomorfizama) ili zbir nekih od prostih ideala iz Artin-ovog teorema. Lik algebre je izomorfan faktor algebri početne algebre po kernelu, odnosno zbiru preostalih ideala iz Artin-ovog teorema, pa je i sam poluprosta algebra[4]. Prema tome, sve reprezentacije poluprostih algebri su i same poluproste algebre. Za poluproste podalgebre iz $\mathrm{gl}(n, \mathbb{F})$ se može pokazati da su ili ireducibilni ili razloživi skupovi matrica. Sledi da su sve konačno-dimenzionalne reprezentacije poluprostih Lie-jevih algebri razložive, te je dovoljno odrediti ireducibilne reprezentacije. Detalji klasifikacije poluprostih algebri i konstrukcije njihovih ireducibilnih reprezentacija će se razmatrati u sledećem poglavlju.

4.2.3 Kompaktne algebre

Specifično mesto u klasifikaciji Lie-jevih algebri imaju tzv. kompaktne algebre. Sa matematičkog stanovišta one su značajne zbog veze sa kompaktnim grupama, a ove se odlikuju unitarnošću svojih konačno-dimenzionalnih reprezentacija. Odavde potiče njihov značaj za fiziku.

Definicija 4.9 *Realna Lie-jeva algebra L je* kompaktna *ako se na njoj može definisati invarijantna simetrična bilinearna forma koja je strogo pozitivna (tj. važi $w(x,x) > 0$, za svako x iz L osim za $x = 0$, kada je $w(0,0) = 0$).*

Uslov pozitivnosti se može ostvariti samo kod realnih algebri, jer kod kompleksnih iz $w(x,x) > 0$, zbog bilinearnosti, sledi $w(\imath x, \imath x) < 0$. Prema tome, svaka kompaktna algebra je realna, i w pretvara algebru u realni euklidski prostor sa invarijantnim skalarnim proizvodom. Kao što je već napomenuto (zadatak 4.19.), reprezentacija $\mathrm{ad}(L)$ je antisimetrična u odnosu na taj skalarni proizvod, i u ortonormiranom bazisu je reprezentovana antisimetričnim matricama.

Lema 4.2 **(i)** *Poluprosta algebra je kompaktna ako i samo ako joj je Killing-ova forma strogo negativna.*

(ii) *Razlaganje Levi-Maljceva kompaktne algebre L ima oblik $L = Z(L) \oplus S$.*

Dokaz: (i) Zbog antisimetričnosti ad, za kompaktnu algebru je $g(x,x) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}^2(x) = \sum_{ij} \mathrm{ad}_{ij}(x)\mathrm{ad}_{ji}(x) = -\sum_{ij} \mathrm{ad}_{ij}^2(x) \leq 0$. To znači da kod kompaktnih algebri uslov $g(x,x) = 0$ povlači $\mathrm{ad}(x) = 0$, tj. $x \in Z(L) \subset L^{\perp}$. Međutim, $g(x,x) = 0$ važi za svaki element iz $L^{\perp}$, pa je kod kompaktnih algebri $L^{\perp} = Z(L)$. Ako je algebra poluprosta, važi $Z(L) = 0$, pa je, osim za $x = 0$, ispunjeno $g(x,x) < 0$. Obrnuto, ako je g strogo negativna, onda je $-g$ strogo pozitivna invarijantna bilinearna simetrična forma i algebra je kompaktna.
(ii) Neka je w pozitivna forma kompaktne algebre L. Ponavljajući dokaz leme 4.1(i) nalazi se da je ortokomplement S centra algebre u odnosu na w takođe ideal. Iz pozitivnosti forme sledi da je $Z(L) \cap S = 0$. Prema tome, $L = Z(L) \oplus S$, a S je poluprosta algebra, jer je suženje g na S nedegenerisano. ∎

Kod poluprostih kompaktnih algebri može se naći ortonormirani bazis takav da je $g_{ij} = -\delta_{ij}$. U ovom bazisu strukturne konstante su antisimetrične po svim indeksima: $c_{ij}^{k} = -c_{ijk} = -\epsilon_{ijk}$. Stoga je pridružena reprezentacija kososimetrična u običnom smislu.

***Zadatak 4.25**:* U prostorima $\mathbb{R}^{nn}$ i $\mathbb{C}^{nn}$ standardni skalarni proizvod je zadat izrazima $\mathrm{Tr}\,(A^T B)$ i $\mathrm{Tr}\,(A^{\dagger} B)$. Koristeći ovaj skalarni proizvod pokazati da su $\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$ i $\mathrm{su}(n)$ kompaktne algebre. Na osnovu ovoga pokazati da su algebre $\mathrm{su}(n)$ i $\mathrm{so}(n, \mathbb{R})$ poluproste.

U fizičkoj literaturi je uobičajeno da se elementi kompaktne algebre formalno množe imaginarnom jedinicom, čime matrice pridružene reprezentacije postaju hermitske, Killing-ova forma strogo pozitivna, a strukturne konstante imaginarne.

[4] Ovo je posledica linearnosti homomorfizma i u stvari izražava zakon defekta.

4.3 KOMPLEKSNE POLUPROSTE ALGEBRE

Klasifikacija poluprostih Lie-jevih algebri i njihovih ireducibilnih reprezentacija svodi se na zajednički svojstveni problem operatora koji reprezentuju tzv. Cartan-ovu podalgebru. Značajnu ulogu u ovom metodu ima pridružena reprezentacija, te razmatranje svojstvenog problema u pomenutom pristupu iziskuje da i ta reprezentacija, a zbog toga i sama algebra, budu nad kompleksnim poljem. Stoga se ceo zadatak rešava za kompleksne poluproste algebre[5], a tehnike kompleksifikacije i dekompleksifikacije (odeljak 4.1.5) omogućavaju prelaz sa realnih algebri na kompleksne, i obrnuto, te proširivanje dobijenih rezultata na realan slučaj.

4.3.1 Cartan-ova podalgebra

Ideja koja leži u pozadini narednih konstrukcija potiče iz elementarne linearne algebre, a u kvantnoj mehanici je poznata kao određivanje kompletnog skupa komutirajućih operatora. Cilj je da se u prostoru $\mathcal{H}$ odredi skup operatora $H^{\mathcal{H}} = \{H_1, \dots H_r\}$, tako da su svi vektori ortonormiranog bazisa $\{\mid i\rangle | i = 1, \dots, n\}$ prostora $\mathcal{H}$ zajednički svojstveni vektori za sve operatore ovoga skupa: $H_i \mid j\rangle = m_i^j \mid j\rangle$, i da su pri tome svi zajednički svojstveni potprostori za skup $H^{\mathcal{H}}$ jednodimenzionalni. Tada je bazisni vektor $\mid j\rangle$ jednoznačno određen kolonom svojstvenih vrednosti $\mathbf{m}^j = (m_1^j, \dots, m_r^j)^T$, te se često i piše $\mid j\rangle = \mid m_1^j, \dots, m_r^j\rangle = \mid \mathbf{m}^j\rangle$. Treba uočiti da iz samog postojanja zajedničkog ortonormiranog svojstvenog bazisa sledi da su svi operatori iz $H^{\mathcal{H}}$ normalni i da međusobno komutiraju. Ako su im svojstvene vrednosti realne, onda u $\mathcal{H}$ postoji skalarni proizvod takav da su operatori hermitski.

Neka je $\mathcal{H}$ prostor u kome je algebra L reprezentovana operatorima $D(L)$. Početno razmatranje navodi na pokušaj da se upravo među operatorima reprezentacije potraži kompletni skup komutirajućih operatora, H^D. Tada bi se otvorila mogućnost da se elementi algebre, reprezentovani ovim skupom, i u drugim reprezentacijama iskoriste na isti način, tj. da se komutirajući skup odredi na nivou algebre: u prostorima različitih reprezentacija algebre postojali bi zajednički ortonormirani svojstveni bazisi za operatore H^D koji reprezentuju isti (nezavisno od reprezentacije D) podskup H algebre, $H^D = D(H)$. Iz analogije sa reprezentacijama grupa (ekvivalentne reprezentacije imaju jednake karaktere, a karakter je zbir svojstvenih vrednosti operatora reprezentacije) nazire se da bi takav program dao klasifikaciju reprezentacija algebre. Kada se tome doda činjenica da se algebra može identifikovati sa svojom pridruženom reprezentacijom (koja je za poluproste algebre verna), ista procedura bi omogućila i analizu strukture same algebre, što bi dovelo do klasifikacije algebri.

Uz određene izmene i prilagođavanja, ovakav program se može ostvariti. Kritični deo je egzistencija skupa H na nivou algebre. Prvi je zahtev da element h algebre, koji pripada traženom skupu za određenu reprezentaciju $D(L)$ (tj. $D(h)$ je iz H, i samim tim normalni operator), i u nekoj drugoj reprezentaciji $D'(h)$ bude ponovo normalni operator. Ovo nije a priori očigledno, i razjašnjenje daje

Teorem 4.5 *Ako u nekoj vernoj reprezentaciji $D(L)$ poluproste Lie-jeve algebre L operator $D(h)$ ima svojstveni bazis, onda i u svakoj drugoj reprezentaciji $D'(L)$ operator $D'(h)$ ima svojstveni bazis (kaže se da je takav element algebre* poluprost*); skup svih komutirajućih poluprostih elemenata algebre je Abel-ova podalgebra u L.*

[5] Do kraja glave termin algebra se odnosi na kompleksnu poluprostu Lie-jevu algebru.

Drugim rečima, postojanje svojstvenog bazisa reprezentanta elementa poluproste algebre je karakteristika elementa, a ne reprezentacije. Dat je algoritam za nalaženje kandidata za kompletan skup: za svaki element h algebre, treba u bilo kojoj vernoj reprezentaciji D proveriti može li se $D(h)$ dijagonalizovati. Teorem 4.5 ima pozitivan rezultat u smislu da se postojanje svojstvenog bazisa može pripisati elementu algebre, i ne zavisi od načina reprezentovanja. I sledeći zadatak, određivanje skupa komutirajućih operatora rešen je na nivou algebre: to je neka Abel-ova podalgebra poluprostih elemenata. Njihovi reprezentanti svakako komutiraju (zbog homomorfizma), i postoji (zbog poluprostote) zajednički svojstveni bazis.

Nakon uspešnih prvih koraka u realizaciji početne ideje, preostala je provera postoji li kompletan skup komutirajućih elemenata iz L: mogu li se u nekoj podalgebri iz teorema 4.5 naći elementi takvi da su zajednički svojstveni potprostori operatora koji ih reprezentuju jednodimenzionalni. Za razjašnjenje ovog pitanja dovoljno je razmotriti pridruženu reprezentaciju. Ako su h i h' dva komutirajuća, linearno nezavisna, poluprosta elementa, tada je $\mathrm{ad}(h)h' = \mathrm{ad}(h)h = 0$ (jer je $[h, h] = [h, h'] = 0$) i $\mathrm{ad}(h')h' = \mathrm{ad}(h')h = 0$, te je zajednički svojstveni potprostor za svojstvenu vrednost 0 degenerisan. Postojanje novog nezavisnog komutirajućeg elementa h'', ukazalo bi na još veću degeneraciju zajedničkog nultog svojstvenog potprostora[6]. Stoga se kompletan skup komutirajućih poluprostih elemenata ne može naći u opštem slučaju, i početna ideja se mora modifikovati.

Iako je postojanje linearno nezavisnog komutirajućeg poluprostog elementa h' ukazalo na nužnost degeneracije zajedničkog nultog potprostora operatora $\mathrm{ad}(h)$ i $\mathrm{ad}(h')$, ostali zajednički svojstveni potprostori (gde je svojstvena vrednost bar jednog od operatora iz H nenulta) mogu biti nedegenerisani. Tako se formuliše novi zadatak: odrediti skup H poluprostih komutirajućih elemenata u L, takav da su nedegenerisani svi nenulti zajednički svojstveni potprostori operatora $\mathrm{ad}(H)$. Jedan od rezultata teorije poluprostih algebri je da ovakav skup postoji: među podalgebrama iz teorema 4.5 mogu se naći i takve da operatori koji ih predstavljaju u pridruženoj reprezentaciji (algebre L) imaju nedegenerisane sve zajedničke nenulte svojstvene potprostore.

Definicija 4.10 Cartan-ova podalgebra *H poluproste Lie-jeve algebre L je svaka maksimalna Abel-ova podalgebra sa osobinom da su zajednički nenulti svojstveni potprostori operatora* $\mathrm{ad}(H)$ *nedegenerisani. Dimenzija Cartan-ove podalgebre se naziva* rang*, r, algebre L.*

Cartan-ova podalgebra je definisana korišćenjem pridružene, a ne proizvoljne reprezentacije. Ovakvo ograničenje ima bar dve prednosti: prva je što je $\mathrm{ad}(L)$ verna (jer je algebra poluprosta), tako da se za elemente Cartan-ove podalgebre može naći zajednički svojstveni bazis u svakoj reprezentaciji (teorem 4.5); osim toga, kako operatori $\mathrm{ad}(L)$ deluju u samoj algebri, dekompozicija na zajedničke svojstvene potprostore otkriva strukturu algebre. Sa druge strane, mana mu je da nedegenerisanost (nenultih) zajedničkih svojstvenih potprostora ne važi za svaku reprezentaciju: kod drugih reprezentacija se degeneracija mora posebno proučiti.

Treba napomenuti da Cartan-ova podalgebra ne mora biti jednoznačno određena. U L može postojati više Cartan-ovih podalgebri, ali se pokazuje da su im dimenzije jednake, tj. rang jeste karakteristika algebre. Određivanje Cartan-ove podalgebre direktno po definiciji može predstavljati problem, pa se često koriste sledeći rezultati:

---

[6] Pod zajedničkim nultim svojstvenim potprostorom operatora $A_1, \ldots, A_n$ podrazumeva se potprostor koji svi operatori preslikavaju u 0, tj. presek njihovih nulpotprostora: $\ker A_1 \cap \cdots \cap \ker A_n$.

(i) ako je Abel-ova podalgebra H jednaka svom normalizatoru, tj. važi $H = N(H)$, ona je Cartan-ova podalgebra;

(ii) ako je h *regularni* element algebre L, odnosno defekt[7] $\mathrm{ad}(h)$ je minimalan, $\dim\ker(\mathrm{ad}(h)) = \min\{\dim\ker(\mathrm{ad}(l))\,|\, l \in L\}$ (defekt $\mathrm{ad}(l)$ je bar 1, jer je $\mathrm{ad}(l)l = [l,l] = 0$), onda je $\ker(\mathrm{ad}(h))$ jedna Cartan-ova podalgebra.

4.3.2 Koreni i težine

Egzistencija Cartan-ove podalgebre dozvoljava izbor adaptiranog ili *Cartan-Weyl-ovog bazisa*, u kome prvih r vektora razapinju neku Cartan-ovu podalgebru H, a preostali jednodimenzionalne zajedničke svojstvene potprostore operatora $\mathrm{ad}(H)$: $\{h_i, e_\alpha \,|\, i = 1, \dots r,\ \alpha = 1, \dots, n-r\}$. Čak i pri fiksiranoj Cartan-ovoj podalgebri, ovakav bazis nije jednoznačan: vektori e_α su određeni do na konstantu, dok je izbor vektora h_i ograničen samo time da su linearno nezavisni i iz H. Ova činjenica ostavlja slobodu da se bazis prilagodi dodatnim potrebama. Pri fiksiranom Cartan-Weyl-ovom bazisu, vektori e_α su određeni r-torkom svojstvenih vrednosti: ako je $\mathrm{ad}(h_i)e_\alpha = a_i^\alpha e_\alpha$, $i = 1, \dots, r$, vektor $\mathbf{a} = (a_1^\alpha, \dots, a_r^\alpha)^T$ jednoznačno određuje element e_α, te se, kao i u slučaju kompletnog skupa operatora, može označiti kao $e_{\mathbf{a}}$.

Da bi se kasniji zaključci precizno formulisali, uvode se neke notacione konvencije. Proizvoljni vektor v iz prostora reprezentacije $D(L)$ označava se kao $\mid D, v\rangle$; kako je sama algebra L prostor pridružene reprezentacije, x i $\mid \mathrm{ad}, x\rangle$ su alternativne oznake za proizvoljni element algebre. Podbazis Cartan-ove podalgebre i operatori koji ga reprezentuju tretiraju se kao r-dimenzionalne kolone $\mathbf{h} = (h_1, \dots h_r)^T$, odnosno $D(\mathbf{h}) = (D(h_1), \dots, D(h_r))^T$. Ako je $\mid D, x\rangle$ zajednički svojstveni vektor ovih operatora za svojstvene vrednosti $m_1, \dots, m_r$, može se pisati $D(h_i) \mid D, x\rangle = m_i \mid D, x\rangle$. Već je napomenuto da zajednički svojstveni potprostori za $D(H)$ (osim za $D = \mathrm{ad}$), ne moraju biti nedegenerisani, i kolona svojstvenih vrednosti $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)^T$ ne određuje jednoznačno vektor $\mid D, x\rangle$. Stoga $\mid D, \mathbf{m}\rangle$ označava proizvoljni vektor zajedničkog svojstvenog potprostora, a za zadavanje bazisa u tom prostoru se uvodi dodatni indeks λ, da bi se prebrojali linearno nezavisni vektori iz istog zajedničkog svojstvenog potprostora. Kao rezultat dosadašnjih razmatranja dobija se relacija:

$$D(\mathbf{h}) \mid D, \mathbf{m}\rangle = \mathbf{m} \mid D, \mathbf{m}\rangle. \tag{4.7}$$

Za pridruženu reprezentaciju su zajednički nenulti svojstveni potprostori jednodimenzionalni, i (4.7) postaje:

$$\mathrm{ad}(\mathbf{h})e_{\mathbf{a}} = [\mathbf{h}, e_{\mathbf{a}}] = \mathbf{a}e_{\mathbf{a}} \quad (\mathrm{uz} \mid \mathrm{ad}, \mathbf{a}\rangle = e_{\mathbf{a}}). \tag{4.8}$$

Relevantni svojstveni vektori i odgovarajuće svojstvene vrednosti, tradicionalno nose specifične nazive.

Definicija 4.11 *Neka je L kompleksna poluprosta Lie-jeva algebra, $D(L)$ njena reprezentacija u konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru $\mathcal{H}$, i $\mathbf{h}$ bazis Cartan-ove podalgebre. Kolona svojstvenih vrednosti, $\mathbf{m}$, operatora $D(\mathbf{h})$ se naziva* težina*, a odgovarajući zajednički svojstveni potprostor, $\mathcal{H}(\mathbf{h}, \mathbf{m})$, i svojstveni vektor, $\mid D, \mathbf{m}\rangle$, su* potprostor težine *$\mathbf{m}$, odnosno* vektor težine *$\mathbf{m}$. Posebno, kada je u pitanju pridružena reprezentacija, nazivi su* koren*, $\mathbf{a}$,* koreni potprostor*, $L(\mathbf{h}, \mathbf{a})$ i* koreni vektor*, $e_{\mathbf{a}} = \mid \mathrm{ad}, \mathbf{a}\rangle$, respektivno.*

[7] Defekt operatora A je dimenzija njegovog nulpotprostora $\ker A$.

Ovo označavanje se proširuje i na slučaj kada $\mathbf{m}$ i $\mathbf{a}$ nisu težina odnosno koren: naime, ako a nije svojstvena vrednost, $v = 0$ je jedino rešenje jednačine $Av = av$, te se nulti potprostor može shvatiti kao "svojstveni" potprostor za brojeve koji nisu svojstvene vrednosti; u tom smislu se definiše $\mathcal{H}(\mathbf{h}, \mathbf{m}) = L(\mathbf{h}, \mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} 0$ ako $\mathbf{m}$ i $\mathbf{a}$ nisu težina, odnosno koren.

Povezujući korenove i težine, tako da se koreni vektori mogu shvatiti kao operatori dizanja ili spuštanja težina, naredni stav još jednom ističe posebno mesto pridružene reprezentacije.

Lema 4.3 *Neka je $D(L)$ proizvoljna reprezentacija poluproste algebre L u prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $D(e_{\mathbf{a}}) \mid D, \mathbf{m}\rangle \in \mathcal{H}(\mathbf{h}, \mathbf{m} + \mathbf{a})$; uz odgovarajući izbor bazisa u potprostorima težina važi $D(e_{\mathbf{a}}) \mid D, \mathbf{m}\rangle = c \mid D, \mathbf{m} + \mathbf{a}\rangle$, tj. vektor korena $\mathbf{a}$ preslikava vektore težine $\mathbf{m}$ u vektore težine $\mathbf{m} + \mathbf{a}$.*

▬*Dokaz:* Za vektor $\mid D, \mathbf{m}\rangle \in \mathcal{H}(\mathbf{h}, \mathbf{m})$ važi $D(\mathbf{h})(D(e_{\mathbf{a}}) \mid D, \mathbf{m}\rangle) = ([D(\mathbf{h}), D(e_{\mathbf{a}})] + D(e_{\mathbf{a}})D(\mathbf{h})) \mid D, \mathbf{m}\rangle = (D([\mathbf{h}, e_{\mathbf{a}}]) + D(e_{\mathbf{a}})D(\mathbf{h})) \mid D, \mathbf{m}\rangle = (\mathbf{a} + \mathbf{m})(D(e_{\mathbf{a}}) \mid D, \mathbf{m}\rangle)$. Tako je $D(e_{\mathbf{a}}) \mid D, \mathbf{m}\rangle$ vektor težine $\mathbf{a} + \mathbf{m}$. ▮

Treba uočiti da lema ne tvrdi da je $\mathbf{m} + \mathbf{a}$ težina ako je $\mathbf{m}$ težina i $\mathbf{a}$ koren; ukoliko $\mathbf{a} + \mathbf{m}$ nije težina, iz dokaza je jasno da je $D(e_{\mathbf{a}}) \mid D, \mathbf{m}\rangle = 0$, te je iskaz leme proširen i na taj slučaj na osnovu konvencije nakon definicije 4.11. Odavde odmah sledi da se kod konačno-dimenzionalnih reprezentacija, kada operatori mogu imati samo konačan skup svojstvenih vrednosti, svaki vektor bilo koje težine $\mathbf{m}$ uzastopnim delovanjima operatora $D(e_{\mathbf{a}})$ preslikava u nulti vektor: za neki konačan stepen s je $D^s(e_{\mathbf{a}}) \mid D, \mathbf{m}, \lambda\rangle = 0$.

4.3.3 Standardna forma

Najvažniji rezultat teorije kompleksnih poluprostih Lie-jevih algebri počiva na slobodi u izboru Cartan-Weyl-ovog bazisa. Pokazuje se da je bazis Cartan-ove podalgebre moguće naći među elementima koji se uvek reprezentuju hermitskim operatorima. Elementi ovakvog Cartan-Weyl-ovog bazisa će biti označeni velikim slovima: $H_i, E_{\mathbf{a}}$; slično, $\mathbf{H}$ označava kolonu bazisnih vektora Cartan-ove podalgebre, a $D(\mathbf{H})$ kolonu pridruženih operatora.

Teorem 4.6 (Standardna forma algebre) *Za svaku poluprostu kompleksnu Lie-jevu algebru L dimenzije n i ranga r, postoji standardni Cartan-Weyl-ov bazis $\{H_i, E_{\mathbf{a}} | i = 1, \dots, r;\ \mathbf{a} \in \mathbf{A}\}$, gde $\mathbf{A}$ označava skup $n - r$ nenultih korenova, sa osobinama:*

(i) *L se razlaže na Abel-ove podalgebre u obliku $L = L(\mathbf{H}, 0) \oplus \sum_{\mathbf{a} \neq 0} L(\mathbf{H}, \mathbf{a})$; ovde je $L(\mathbf{H}, \mathbf{a}) = \operatorname{span}(E_{\mathbf{a}})$ za $\mathbf{a} \neq 0$ jednodimenzionalna podalgebra, a $L(\mathbf{H}, 0) = \operatorname{span}(H_1, \dots, H_r)$ jedna Cartan-ova podalgebra (dimenzije r);*

(ii) *svi korenovi su realni, i za svaki koren $\mathbf{a}$ je i $-\mathbf{a}$ koren, tj. $\mathbf{A}$ je disjunktna unija dva podskupa $\mathbf{A}^+$ i $\mathbf{A}^- = -\mathbf{A}^+$ sa po $\frac{n-r}{2}$ realnih r-dimenzionalnih kolona.*

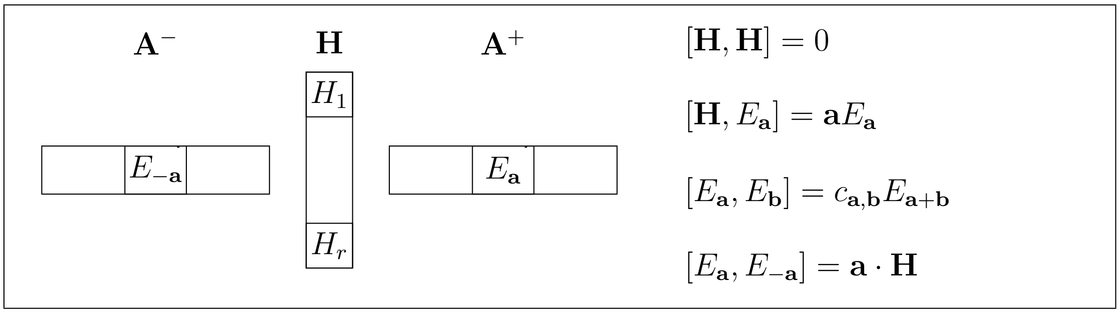
(iii) *komutacione relacije bazisnih vektora su:*

$$[H_i, H_j] = 0,\ [H_i, E_{\mathbf{a}}] = a_i E_{\mathbf{a}},\ [E_{\mathbf{a}}, E_{\mathbf{b}}] = c_{\mathbf{a},\mathbf{b}} E_{\mathbf{a}+\mathbf{b}},\ [E_{\mathbf{a}}, E_{-\mathbf{a}}] = \sum_i a_i H_i$$

(ako $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nije koren, onda je po ranijoj konvenciji $c_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = 0$);

(iv) *u prostoru svake reprezentacije $D(L)$ mogu se odabrati skalarni proizvod i konstanta w_D tako da važi:*

$$D^\dagger(\mathbf{H}) = D(\mathbf{H}),\ D^\dagger(E_\mathbf{a}) = D(E_{-\mathbf{a}}),\ \mathrm{Tr}\,(D(H_i)D(H_j)) = w_D\delta_{ij}.$$



Slika 4.2: **Standardna forma poluproste algebre.**

Prvi deo iskaza teorema predstavlja samo precizno izražavanje ranijih razmatranja, dok je drugi primena sasvim opštih stavova o osobinama antisimetričnih operatora u odnosu na bilinearnu formu u kompleksnim prostorima[8], na operatore pridružene reprezentacije i Killing-ovu formu. Prva i druga komutaciona relacija iz (iii) direktno slede iz definicije proizvoljnog Cartan-Weyl-ovog bazisa, a druge dve iz leme 4.3. U poslednjoj je jasno da je $[E_\mathbf{a}, E_{-\mathbf{a}}]$ iz Cartan-ove podalgebre, pa je samim tim linearna kombinacija vektora H_i; nova je samo mogućnost izbora bazisa tako da su koeficijenti u kombinaciji baš komponente vektora $\mathbf{a}$.

Treba zapaziti da su strukturne konstante u standardnoj formi potpuno određene korenovima (to nije očigledno samo za $c_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, no detaljnija analiza rešava i ovo pitanje). Konsekventno, skup korenova jednoznačno određuje strukturu same algebre, te se definisanjem korenova i standardnog bazisa u stvari određuje sama algebra: taj način zadavanja, realizovan prethodnim teoremom se naziva *standardna forma* algebre. Istovremeno se i problem klasifikacije kompleksnih poluprostih Lie-jevih algebri ranga r svodi na kombinatorni geometrijski problem mogućeg izbora skupa korenova u realnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^r$.

Poslednji deo teorema je iskaz o istovremenoj realnosti svojstvenih vrednosti reprezenata Cartan-ovih elemenata u svakoj reprezentaciji. Ovo je važno kako za kasnija razmatranja, tako i za fiziku. Naime, operatori $D(\mathbf{H})$ imaju svojstveni bazis na osnovu teorema 4.5, a sada je jasno da su im sve svojstvene vrednosti realne, te su komutirajući skup opservabli (u nekom kvantnomehaničkom problemu skup se eventualno može kompletirati dodatnim opservablama). Tako teorem pokazuje da su pojedini elementi algebre reprezentovani opservablama u svim reprezentacijama, što otvara mogućnost da se sam element algebre, a ne samo operator koji ga reprezentuje, vidi kao fizička veličina. Konačno, isti stav znači da su sve težine standardnog bazisa realne.

[8] Takvi prostori se nazivaju kompleksni euklidski prostori, za razliku od unitarnih, u kojima se od forme — skalarnog proizvoda — zahteva antilinearnost po jednom i linearnost po drugom argumentu [C1]. Pomenute osobine operatora su analogne npr. realnosti svojstvenih vrednosti hermitskog operatora u unitarnom prostoru, ili osobinama spektra realne kosohermitske matrice.

Pokazuje se da je opisani izbor moguć zahvaljujući tome što svaki nenulti koren $\mathbf{a}$ izdvaja podalgebru obrazovanu vektorima $\{\mathbf{a}\cdot\mathbf{H}, E_{\mathbf{a}}, E_{-\mathbf{a}}\}$, izomorfnu algebri $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ (zadatak 4.26). Ova činjenica se i nezavisno koristi u fizici: uobičajeno je operatore algebre razvrstati u trojke $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ podalgebri, i tada se govori o različitim vrstama "spinova". Pored toga što se vidi značaj algebre $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ u teoriji algebri, postaje jasno da se fizičke veličine pridružene elementima Lie-jevih algebri često mogu razvrstati na način sličan angularnim momentima (jer su to veličine pridružene algebri $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})$, a kompleksifikacijom ova postaje $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$).

Zadatak 4.26: Za algebru $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ pokazati da je skup dijagonalnih matrica traga 0 jedna Cartan-ova podalgebra, i odrediti jedan Cartan-Weyl-ov bazis. Posebno razmotriti slučajeve $n=2$ i $n=3$.

Zadatak 4.27: Za algebru $\mathrm{so}(3,\mathbb{C})$ odrediti sve Cartan-ove podalgebre, a zatim i standardnu formu.

Zadatak 4.28:$^\circ$ Odrediti Cartan-ov tenzor u Cartan-Weyl-ovom bazisu poluproste algebre.

4.3.4 Odnosi među težinama

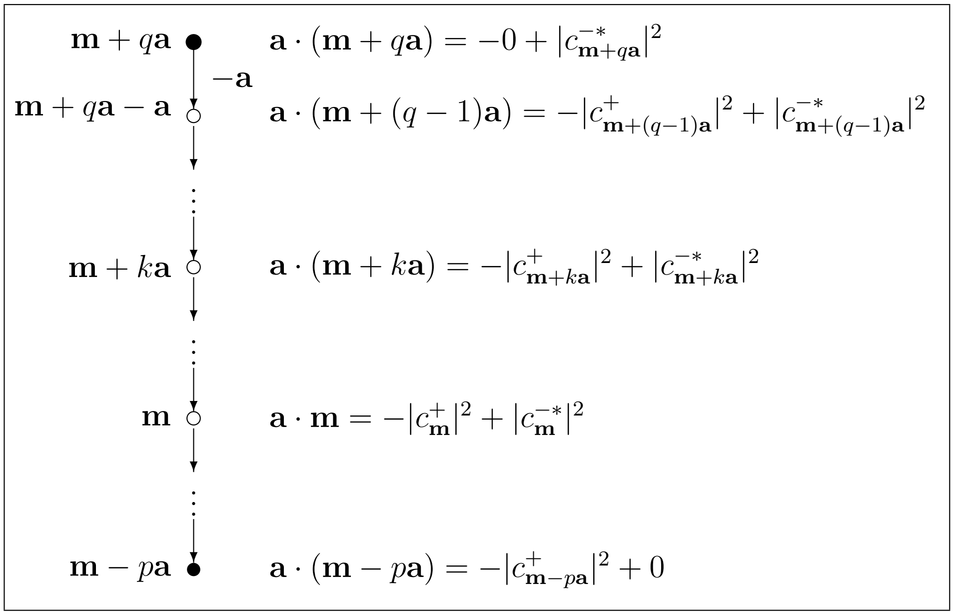
Lema 4.3 i egzistencija Cartan-Weyl-ovog bazisa u kome su sve težine (i korenovi) realni, pruža osnovu za analizu strukture algebri i njihovih konačno-dimenzionalnih reprezentacija. Posledica realnosti težina je da su one (među njima i korenovi) vektori prostora $\mathbb{R}^r$, te se mogu urediti u skladu sa relacijom poretka u realnim vektorskim prostorima:

Definicija 4.12 *Vektor $\mathbf{m}\in\mathbb{R}^r$ je pozitivan, $\mathbf{m}>0$, ako mu je prva nenulta komponenta pozitivna. Vektor $\mathbf{m}$ je veći od vektora $\mathbf{m}'$, $\mathbf{m}>\mathbf{m}'$, ako je $\mathbf{m}-\mathbf{m}'>0$. Koren $\mathbf{a}$ je pozitivan, $\mathbf{a}>0$, ako je pozitivan kao vektor u $\mathbb{R}^r$, a prost ako je pozitivan i nije zbir dva pozitivna korena.*

Na osnovu teorema 4.6(ii), u svakom paru korenova suprotnog znaka jedan je uvek pozitivan, i može se uzeti da je $\mathbf{A}^+$ skup pozitivnih korenova.

U smislu leme 4.3, pozitivni korenovi povećavaju težine, a negativni ih smanjuju. Na taj način, delujući na vektor težine $\mathbf{m}$ operatorima $D^s(E_{-\mathbf{a}})$ i $D^t(E_{\mathbf{a}})$ dobija se niz težina, $\mathbf{a}$-*niz iz* $\mathbf{m}$: $\mathbf{m}-p\mathbf{a},\dots,\mathbf{m},\dots,\mathbf{m}+q\mathbf{a}$. Zbog konačno-dimenzionalnosti razmatranih reprezentacija niz se završava za $s=p$ i $t=q$, tako što je $D^{p+1}(E_{-\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m}\rangle = D^{q+1}(E_{\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m}\rangle=0$.

Iz teorema 4.6(iii-iv) sledi međusobno komutiranje hermitskih operatora $D(\mathbf{H})$, $D(E_{\mathbf{a}})D(E_{-\mathbf{a}})$ i $D(E_{-\mathbf{a}})D(E_{\mathbf{a}})$, te u potprostoru $\mathcal{H}(\mathbf{H},\mathbf{m})$ postoji zajednički ortonormirani svojstveni bazis $\{\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle\}$: $D(\mathbf{H})\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle=\mathbf{m}\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle$ i $D(E_{\pm\mathbf{a}})D(E_{\mp\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle=\alpha^{\pm}_{\mathbf{m}}(\lambda)\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle$. Vektori $D(E_{\pm\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle$ su iz potprostora $\mathcal{H}(\mathbf{H},\mathbf{m}\pm\mathbf{a})$, i međusobno su ortogonalni (neki od njih mogu biti i nulti!), jer je $\langle D,\mathbf{m},\lambda\mid (D(E_{\pm\mathbf{a}}))^\dagger D(E_{\pm\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m},\lambda'\rangle=\alpha^{\mp}_{\mathbf{m}}(\lambda)\delta_{\lambda\lambda'}$. Osim toga, iz $D(E_{\mathbf{a}})D(E_{-\mathbf{a}})(D(E_{\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle)=\alpha^{-}_{\mathbf{m}}(\lambda)(D(E_{\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle)$ (dobija se drugačijim pisanjem zagrada) i $D(E_{-\mathbf{a}})D(E_{\mathbf{a}})(D(E_{\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle)=(-\mathbf{a}\cdot D(\mathbf{H})+D(E_{\mathbf{a}})D(E_{-\mathbf{a}}))(D(E_{\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle)=(-\mathbf{m}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\alpha^{-}_{\mathbf{m}}(\lambda))(D(E_{\mathbf{a}})\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle)$, sledi da su to ponovo zajednički svojstveni vektori za $D(\mathbf{H})$, $D(E_{\mathbf{a}})D(E_{-\mathbf{a}})$ i $D(E_{-\mathbf{a}})D(E_{\mathbf{a}})$. Normiranjem nenultih takvih vektora nalazi se ortonormirani skup $\{\mid D,\mathbf{m}\pm\mathbf{a},\lambda\rangle\}$ u $\mathcal{H}(\mathbf{H},\mathbf{m}\pm\mathbf{a})$: $D(E_{\pm}\mathbf{a})\mid D,\mathbf{m},\lambda\rangle\overset{\mathrm{def}}{=}c^{\pm}_{\mathbf{m}}(\lambda)\mid D,\mathbf{m}\pm\mathbf{a},\lambda\rangle$, koji može biti dopunjen do ortonormiranog zajedničkog svojstvenog bazisa u $\mathcal{H}(\mathbf{H},\mathbf{m}\pm\mathbf{a})$. Ponavljanjem procedure u $\mathcal{H}(\mathbf{H},\mathbf{m}\pm\mathbf{a})$, i u kasnije dobijenim težinskim potprostorima, jasno je da se za svako λ izdvaja jedan $\mathbf{a}$-niz iz $\mathbf{m}$ i odgovarajućih zajedničkih svojstvenih vektora pomenutih operatora: $\{\mid D,\mathbf{m}+k\mathbf{a},\lambda\rangle|k=-p,\dots,q\}$, pri čemu je $c^{+}_{\mathbf{m}+q\mathbf{a}}(\lambda)=c^{-}_{\mathbf{m}-p\mathbf{a}}(\lambda)=0$. Operatori



Slika 4.3: **a-niz iz m.**

$D(E_{\mathbf{a}})$, $D(E_{-\mathbf{a}})$ i $D(\mathbf{H})$ deluju unutar istog niza, i to na isti način (samo se $c^{\pm}_{\mathbf{m}+k\mathbf{a}}(\lambda)$ razlikuju), tako da u nastavku indeks λ neće biti pisan, ali se podrazumeva. Za svaki član niza važi:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{m}+k\mathbf{a}) = \langle D, \mathbf{m}+k\mathbf{a} \mid [D(E_{\mathbf{a}}), D(E_{-\mathbf{a}})] \mid D, \mathbf{m}+k\mathbf{a}\rangle = |c^{-}_{\mathbf{m}+k\mathbf{a}}|^2 - |c^{+}_{\mathbf{m}+k\mathbf{a}}|^2.$$

Koeficijenti normiranja nisu nezavisni, jer su $D(E_{\mathbf{a}})$ i $D(E_{-\mathbf{a}})$ međusobno adjungovani; dejstvo operatora $D(E_{-\mathbf{a}})$ na levu i desnu stranu daje $\langle D, \mathbf{m}+k\mathbf{a}+\mathbf{a} \mid D(E_{\mathbf{a}}) \mid D, \mathbf{m}+k\mathbf{a}\rangle = c^{-*}_{\mathbf{m}+k\mathbf{a}+\mathbf{a}} = c^{+}_{\mathbf{m}+k\mathbf{a}}$, pa je $|c^{+}_{\mathbf{m}+k\mathbf{a}}|^2 = |c^{-}_{\mathbf{m}+k\mathbf{a}+\mathbf{a}}|^2$. Formiran je niz jednakosti (u krajnjim tačkama niza je $c^{-}_{\mathbf{m}-p\mathbf{a}} = c^{+}_{\mathbf{m}+q\mathbf{a}} = 0$) sa slike 4.3. Njihovim sumiranjem po svim $k = q, \dots, -p$ nalazi se

$$p - q = 2\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}. \tag{4.9}$$

U slučaju da je $\mathbf{m} = \mathbf{m}'$, baš najveća težina niza, q je jednako 0, i sumiranjem prvih k izraza koeficijenti normiranja se određuju do na fazni faktor u formi

$$|c^{-}_{\mathbf{m}'-k\mathbf{a}}|^2 = (k+1)\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}' - \frac{k(k+1)}{2}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}. \tag{4.10}$$

Zadatak 4.29: Pokazati da je $\{\mathbf{a}, 0, -\mathbf{a}\}$ ceo $\mathbf{a}$-niz iz $\mathbf{a}$ kod pridružene reprezentacije.

Izvedene relacije su značajne pri klasifikaciji algebri i njihovih ireducibilnih reprezentacija. Pre svega, u slučaju kada je D pridružena reprezentacija, (4.10) omogućava određivanje preostalih strukturnih konstanti $c_{\mathbf{ab}}$ iz teorema 4.6; sa svoje strane, (4.9) ukazuje da korenovi zadovoljavaju vrlo restriktivne geometrijske odnose: odnosi dužina i kosinusi uglova među korenovima su povezani celobrojnim relacijama. Konačno, za ireducibilne reprezentacije iste relacije će dozvoliti kompletnu konstrukciju na osnovu zadate samo najveće težine.

U stvari, zahvaljujući izvedenim jednakostima se može pokazati da među korenovima postoji bazis prostih korenova. Najvažnije rezultate sumira:

Teorem 4.7 **(i)** *U $\mathbb{R}^r$ postoji bazis prostih korenova algebre ranga r, tzv.* fundamentalni sistem*, $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}^1, \dots, \mathbf{s}^r\}$;*

(ii) *svaki pozitivan koren je linearna kombinacija korenova fundamentalnog sistema sa nenegativnim celobrojnim koeficijentima: ako je $\mathbf{a} > 0$ tada je $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{r} n_i \mathbf{s}^i$ uz $n_i \in \mathbb{N}_0$;*

(iii) *ako je L poluprosta algebra sa više prostih ideala, Cartan-Weyl-ov bazis u L se može odabrati u formi unije Cartan-Weyl-ovih bazisa ideala, pri čemu je prostor korenova ortogonalni zbir prostora korenova ideala (pa se i skup korenova razlaže na međusobno ortogonalne podskupove koji odgovaraju različitim idealima).*

Zadatak 4.30: Odrediti fundamentalni sistem korenova za $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$.

4.3.5 Konačno-dimenzionalne ireducibilne reprezentacije

Konačno-dimenzionalne reprezentacije poluproste Lie-jeve algebre su razložive, i njihova klasifikacija se svodi na određivanje ireducibilnih. Sa druge strane, prostor $\mathcal{H}$ neke reprezentacije je ortogonalni zbir potprostora $\mathcal{H}(\mathbf{H}, \mathbf{m})$ različitih težina. Te težine su realne u standardnom Cartan-Weyl-ovom bazisu, pa se mogu urediti prema definiciji 4.12; konačna dimenzija prostora $\mathcal{H}$ povlači konačnost skupa težina, te se uređenjem izdvaja *maksimalna težina*, $\mathbf{M}$, za svaku reprezentaciju. To znači da je za svaki vektor maksimalne težine $\mid D, \mathbf{M}\rangle$ i svaki pozitivni koren ispunjeno $D(E_\mathbf{a}) \mid D, \mathbf{M}\rangle = 0$ (inače bi prema lemi 4.3 dobijeni vektor imao veću težinu $\mathbf{M} + \mathbf{a}$), odnosno u (4.9) je $q = 0$, pa je $p = 2\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{M}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} \geq 0$.

Za proizvoljnu reprezentaciju je moguće da vektor $\mid D, \mathbf{M}\rangle$ sa ovakvim svojstvima ne bude jedinstven (npr. ako je potprostor maksimalne težine degenerisan, ili postoje vektori nemaksimalnih težina koje svi reprezentanti pozitivnih korenova anuliraju). Specifičnost ireducibilnih reprezentacija je upravo jedinstvenost (do na konstantu) ovakvog vektora, što povlači da maksimalna težina u potpunosti određuje celu reprezentaciju.

Teorem 4.8 *Neka je $D(L)$ konačno-dimenzionalna ireducibilna reprezentacija poluproste algebre L u prostoru $\mathcal{H}$, $\mathbf{M}$ maksimalna težina, $\{\mathbf{s}^1, \dots, \mathbf{s}^r\}$ fundamentalni sistem i $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{a}^+>0} \mathbf{a}^+$. Tada važi:*

(i) *vektor $\mathbf{M}$ iz $\mathbb{R}^r$ je maksimalna težina ireducibilne reprezentacije ako i samo ako su svi $p_i = 2\frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{s}^i}{\mathbf{s}^i\cdot\mathbf{s}^i}$ $(i = 1, \dots r)$ nenegativni celi brojevi;*

(ii) *maksimalna težina je nedegenerisana, dok se degeneracija proizvoljne težine $\mathbf{m}$ izražava rekurentnom* Freudenthal-ovom relacijom*:*

$$n_\mathbf{m} = 2\frac{\sum_{\mathbf{a}^+>0}\sum_{k=1}^{\infty} n_{\mathbf{m}+k\mathbf{a}^+}(\mathbf{m} + k\mathbf{a}^+)\cdot\mathbf{a}^+}{\parallel \mathbf{M} + \mathbf{S} \parallel^2 - \parallel \mathbf{m} + \mathbf{S} \parallel^2};$$

(iii) *dimenzija reprezentacije je data* Weyl-ovom relacijom*:*

$$\dim D(L) = \frac{\prod_{\mathbf{a}^+>0}(\mathbf{M} + \mathbf{S})\cdot\mathbf{a}^+}{\prod_{\mathbf{a}^+>0}\mathbf{S}\cdot\mathbf{a}^+};$$

(iv) *svaka težina* $\mathbf{m}$ *se može napisati u obliku* $\mathbf{m} = \mathbf{M} - \sum_{i=1}^{r} k_i \mathbf{s}^i$, *gde su* k_i *nenegativni celi brojevi, tj. postoji vektor težine* $\mathbf{m}$ *koji se iz* $|\ \mathbf{M}\rangle$ *dobija delovanjem nekih od operatora* $\{D(E_{-\mathbf{s}^1}), \dots, D(E_{-\mathbf{s}^r})\}$;

(v) *težinski vektori* $\{D(E_{-\mathbf{a}}) \cdots D(E_{-\mathbf{b}}) \mid \mathbf{M}\rangle \mid \mathbf{a}, \dots, \mathbf{b} \in \mathbf{A}^+\}$ *obrazuju* $\mathcal{H}$, *te maksimalna težina potpuno određuje ireducibilnu reprezentaciju.*

Teorem 4.8 omogućava klasifikaciju i eksplicitnu konstrukciju svih ireducibilnih reprezentacija poluproste algebre. Naime, stav (i) daje njihovu klasifikaciju kroz određivanje vektora koji mogu biti maksimalne težine. Nenegativnost koeficijenata k_i u stavu (iv) znači da se dejstvom bilo kog operatora $D(E_{\mathbf{s}^i})$ vektor $|\ M\rangle$ anulira; uvođenje pojma *nivoa težine* $\mathbf{m}$ kao zbira koeficijenata k_i iz stava (iv), dozvoljava rekurzivni metod nalaženja svih težina reprezentacije. Nulti nivo ima samo maksimalnu težinu. Zatim se, za svaki $\mathbf{s}^i$-niz iz $\mathbf{M}$, znajući da je $q = 0$, odredi p na osnovu (4.9). Sve težine nivoa 1 se nalaze među ovako određenim nizovima. Sada se formiraju $\mathbf{s}^i$-nizovi iz težina nivoa 1. Za svaki od njih je poznata gornja granica q, jer su poznate sve veće težine (u ovom trenutku je to samo $\mathbf{M}$), te se ponovo iz (4.9) može odrediti p. Sada se izdvojaju sve težine nivoa 2. Tako, kada su poznate sve težine nivoa $0, \dots, N$, formiraju se $\mathbf{s}^i$-nizovi iz težina nivoa N, i za svaki od njih znanje svih većih težina (sa prethodnih nivoa) omogućava da se u (4.9) odredi q, pa izračuna p, i formira sledeći nivo. Postupak je završen onda kada se utvrdi da je novi nivo prazan, što znači da su određene sve težine. Konačno, degeneracija svake pojedine težine se izračunava Freudenthal-ovom relacijom, a konstrukcijom odgovarajućeg broja vektora težina na osnovu (v), reprezentacija je potpuno određena.

Na osnovu stava (i) poslednjeg teorema svaka ireducibilna reprezentacija je karakterisana r-torkom nenegativnih celih brojeva $[p_1, \dots, p_r]$. Posebno mesto zauzimaju tzv. *fundamentalne reprezentacije*. To je r neekvivalentnih ireducibilnih reprezentacija $\{D^{[j]}(L) \mid j = 1, \dots, r\}$, takvih da za $D^{[j]}(L)$ važi $p_i = \delta_{ij}$. Kasnije će biti pokazano da ove reprezentacije određuju sve druge ireducibilne reprezentacije date algebre.

Zadatak 4.31: Odrediti koeficijent normiranja $c^-_{\mathbf{m}}$ za težinu $\mathbf{m} = \mathbf{M} - k\mathbf{a}$, dobijenu pri spuštanju iz maksimalne težine $\mathbf{M}$ operatorom $D(E_{-\mathbf{a}})$.

Zadatak 4.32: Odrediti sve ireducibilne reprezentacije algebre $\mathrm{so}(3, \mathbb{C})$ i pokazati da su sve težine nedegenerisane. U svakoj od ovih reprezentacija naći matrice operatora $D(H)$, $D(E_+)$ i $D(E_-)$ Cartan-Weyl-ovog bazisa.

Zadatak 4.33: Za algebre $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$ i $\mathrm{su}(3)$ naći sve ireducibilne reprezentacije i njihove dimenzije. Za reprezentacije $[1, 0]$, $[0, 1]$, $[2, 0]$, $[0, 2]$, $[1, 1]$, $[3, 0]$ i $[2, 1]$ nacrtati težinske dijagrame.

Zadatak 4.34: a) Neka su $N^\dagger_{\mathbf{a}}$ i $P^\dagger_{\mathbf{a}}$ kreacioni operatori neutrona i protona u stanju $|\ \mathbf{a}\rangle$, respektivno, a H_S hamiltonijan jezgra invarijantan na zamenu protona i neutrona. Pokazati da operatori $T_+ = \sum_{\mathbf{a}} P^\dagger_{\mathbf{a}} N_{\mathbf{a}}, T_- = T^\dagger_+$ i $T_3 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{a}} (P^\dagger_{\mathbf{a}} P_{\mathbf{a}} - N^\dagger_{\mathbf{a}} N_{\mathbf{a}})$ obrazuju reprezentaciju algebre $\mathrm{su}(2)$ (*izospin*) u odgovarajućem Fock-ovom prostoru. Pokazati da H_S komutira sa ovom algebrom. Dati fizičku interpretaciju navedenih operatora i odrediti vezu između operatora Q ukupnog naelektrisanja jezgra i operatora B ukupnog broja nukleona (*barionski broj*).
b) Za pione π_+, π_- i π_0 je poznato da čine trodimenzionalni izospinski multiplet. Pomoću kreacionih i anihilacionih operatora ovih čestica odrediti operatore koji reprezentuju bazis $\mathrm{su}(2)$. (Uputstvo: smatrati da indeksi $+, -$ i 0 odgovaraju težinama 1, -1 i 0.)

Pri određivanju ireducibilnih komponenti date reprezentacije $D(L)$ korisno je uvesti *Kazimirove operatore*; to su operatori

$$K_p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i_1,\dots,i_p=1}^{n} g^{i_1\dots i_p} D(x_{i_1})\cdots D(x_{i_p}), \tag{4.11}$$

gde je $\{x_1,\dots,x_n\}$ bazis u L, $g^{i_1\dots i_p} = \sum_{j_1,\dots,j_p} g^{i_1 j_1}\dots g^{i_p j_p} g_{j_1\dots j_p}$, g^{ij} je matrica inverzna Cartan-ovom tenzoru g_{ij} i $g_{j_1\dots j_p} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{ad}(x_{j_1})\dots\mathrm{ad}(x_{j_p}))$.

Može se pokazati da za svako p ovako definisani operatori komutiraju sa svim operatorima reprezentacije $D(L)$, i da ih ima tačno r funkcionalno nezavisnih. To znači da Kazimir-ovi operatori deluju kao skalarni operatori u svim ireducibilnim potprostorima, a njihove svojstvene vrednosti u ovim potprostorima karakterišu ireducibilne reprezentacije.

Zadatak 4.35: Pokazati da Kazimirov operator K_2 komutira sa svim operatorima reprezentacije $D(L)$.

Zadatak 4.36: Pokazati da za maksimalnu težinu ireducibilne reprezentacije važi

$$K_2 \mid \mathbf{M}\rangle = (\parallel \mathbf{M} \parallel^2 + \sum_{\mathbf{a}>0} \mathbf{a}\cdot\mathbf{M}) \mid \mathbf{M}\rangle$$

i odrediti svojstvene vrednosti K_2 za $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ i $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$.

Zadatak 4.37: Odrediti Kazimirov operator K_2 za $\mathrm{so}(3,\mathbb{C})$.

4.3.6 Klasifikacija prostih Lie-jevih algebri

Već je napomenuto da skup korenova određuje sve komutacione relacije poluproste algebre, tako da je poznavanje ovoga skupa zapravo ekvivalentno zadavanju same algebre. Sa druge strane, veze date relacijom (4.9) dozvoljavaju samo neke odnose među korenovima. Tako klasifikacija poluprostih algebri postaje nalaženje mogućih skupova korenova.

Teorem 4.7 omogućava da se u ovom smislu razmatraju samo koreni sistemi prostih algebri (to je zapravo samo manifestacija Artin-Cartan-ovog teorema), jer se njihovim ortogonalnim sabiranjem dobijaju koreni sistemi ostalih poluprostih algebri. Isti teorem pokazuje da je za klasifikaciju algebri određenog ranga dovoljno odrediti moguće proste korenove, dok su ostali njihove celobrojne linearne kombinacije. Pri tome se na osnovu definicije 4.12 zaključuje da razlika prostih korenova nije koren (inače iz $\mathbf{s}^i - \mathbf{s}^j \in A^+$ povlači da je $\mathbf{s}^i$ zbir pozitivnih korenova, a ako je $\mathbf{s}^i - \mathbf{s}^j \in A^-$, isto važi za $\mathbf{s}^j$), tako da je u (4.9) za $\mathbf{s}^i$-niz iz $\mathbf{s}^j$ uvek $p = 0$, i dobija se $-q_{ij} = 2\frac{\mathbf{s}^i\cdot\mathbf{s}^j}{\mathbf{s}^i\cdot\mathbf{s}^i} = 2\frac{s^j}{s^i}\cos(\mathbf{s}^i,\mathbf{s}^j) < 0$, za $\mathbf{s}^i$-niz iz $\mathbf{s}^j$ (s^i je dužina korena $\mathbf{s}^i$). To znači da je ugao između prostih korenova tup, a upoređivanjem q_{ij} i q_{ji} nalazi se $\cos(\mathbf{s}^i,\mathbf{s}^j) = -\frac{1}{2}\sqrt{q_{ij}q_{ji}}$ i $\frac{s^i}{s^j} = \sqrt{\frac{q_{ji}}{q_{ij}}}$. Ove relacije ostavljaju samo nekoliko mogućnosti za odnose među prostim korenovima, i one su date u tabeli 4.1.

Kada je odabran dozvoljeni skup prostih korenova u skladu sa tabelom, za definisanje algebre potrebno je odrediti i sve ostale korenove. Problem se rešava rekurzivno, slično određivanju ireducibilne reprezentacije iz maksimalne težine. U stvari, reč je o istom metodu, jer je reč o težinama pridružene reprezentacije, jedino što se ne zna koja je maksimalna težina. No, kako je

Tabela 4.1: **Odnosi među prostim korenovima.** *U kolonama su navedeni kosinus ugla među prostim korenima, sam ugao, odgovarajući* Cartan-ovi brojevi *q_{ij}, i Dynkin-ova oznaka. Pretpostavljeno je da je $s^i \geq s^j$.*

$\cos(\mathbf{s}^i, \mathbf{s}^j)$	$\angle(\mathbf{s}^i, \mathbf{s}^j)$	q_{ij}	q_{ji}	$\frac{s^i}{s^j}$	Dynkin
0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	neodređen	$\mathbf{s}^i$ • •$\mathbf{s}^j$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	1	1	1	$\mathbf{s}^i$ • − • $\mathbf{s}^j$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$	1	2	$\sqrt{2}$	$\mathbf{s}^i$• =>= •$\mathbf{s}^j$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	1	3	$\sqrt{3}$	$\mathbf{s}^i$• ≡>≡ •$\mathbf{s}^j$

poznato da je svaki pozitivni koren linearna kombinacija prostih sa nenegativnim celim koeficijentima, ulogu početnog, prvog nivoa preuzima skup prostih korenova. Zatim se na isti način formiraju nizovi prostih korenova za svaki nivo, i time određuje sledeći nivo. Konačno, kada je neki nivo prazan, određeni su svi pozitivni korenovi, i množenjem sa -1 dobijaju se i negativni. Pri tome treba imati u vidu da je svaki koren nedegenerisan tako da nema potrebe razmatrati ovo pitanje.

Očigledno je da je problem klasifikacije poluprostih kompleksnih Lie-jevih algebri sveden na određivanje različitih fundamentalnih sistema. Sa svoje strane, ovo je relativno jednostavan kombinatorni problem, i njegovo rešenje je poznato. Rezultat klasifikacije se najčešće predstavlja u formi tzv. Dynkin-ovih dijagrama. Svaki prost koren se predstavi tačkom. U zavisnosti od odnosa među prostim korenima oni se povezuju različitim brojem linija, kao što je navedeno u tabeli. Linije se usmeravaju od dužeg ka kraćem korenu pri čemu se dužina jednog korena može uzeti proizvoljno. Pokazuje se da postoje mogućnosti iz tabele 4.2.

Tabela 4.2: **Proste kompleksne Lie-jeve algebre.** *Za svaku algebru je dat koreni sistem preko Dynkin-ovih dijagrama, dimenzija i odgovarajuća matrična algebra. Četiri desna dijagrama predstavljaju beskonačne serije prostih neizomorfnih kompleksnih Lie-jevih algebri, dok preostali daju tzv. posebne algebre.*

Oznaka	Matrice Dimenzija Dynkin	Oznaka	Dimenzija Dynkin
$\mathbf{a}_r$ $r \geq 1$	$\mathrm{sl}(r+1,\mathbb{C})$ $r(r+2)$ •−•...•−•	$\mathbf{e}_8$	248 •−•−•−•−•−•−•
$\mathbf{b}_r$ $r \geq 2$	$\mathrm{so}(2r+1,\mathbb{C})$ $r(2r+1)$ •−•...•=>=•	$\mathbf{e}_7$	133 •−•−•−•−•−•
$\mathbf{c}_r$ $r \geq 2$	$\mathrm{sp}(2r,\mathbb{C})$ $r(2r+1)$ •−•...•=<=•	$\mathbf{e}_6$	78 •−•−•−•−•
$\mathbf{d}_r$ $r \geq 3$	$\mathrm{so}(2r,\mathbb{C})$ $r(2r-1)$ •−•...•:	$\mathbf{f}_4$	52 •−•=•−•
		$\mathbf{g}_2$	14 •≡•

Zadatak 4.38: Odrediti sve moguće poluproste kompleksne algebre ranga 1 i 2, i njihove korene sisteme.

Zadatak 4.39: • Koristeći Dynkin-ove dijagrame odrediti sve izomorfne proste algebre koje se javljaju u klasifikaciji. Zatim pokazati da su među algebrama $\mathrm{so}(n,\mathbb{C})$ sve proste, osim $\mathrm{so}(2,\mathbb{C})$ i $\mathrm{so}(4,\mathbb{C})$. Objasniti strukturu ove dve algebre. (Uputstvo: iskoristiti činjenicu da je $\mathrm{so}(4,\mathbb{R})$ kompaktna i da joj je centar trivijalan. Dalje primeniti lemu 4.2(i) i stavove o kompleksifikaciji. Konačno, analizirajući dimenziju $\mathrm{so}(4,\mathbb{C})$ zaključiti kakva je struktura ove algebre.)

4.3.7 Algebre su(2) i su(3)

Fundamentalan značaj u fizici ima algebra angularnih momenata, izomorfna algebri $\mathrm{su}(2)$. Slično, u fizici elementarnih čestica, u opisu jakih interakcija pojavljuju se operatori koji generišu algebru $\mathrm{su}(3)$. Stoga će, kao model za primenu prethodne teorije, biti razmotrene najvažnije osobine ovih algebri. Prethodno će biti uočene neke lako proverljive zajedničke osobine svih algebri $\mathrm{su}(n)$.

U fizici se tradicionalno polazi od realnog vektorskog prostora n-dimenzionalnih hermitskih matrica traga 0. To nije Lie-jeva algebra, jer je komutator hermitskih kosohermitska matrica. Dimenzija ovog prostora je n^2-1, a uobičajen izbor bazisa je

$$\{h_i \,|\, i=1,\dots,n^2-1\} = \{H_k, S_{kj}, A_{kj} \,|\, k=1,\dots,n-1;\; j=k+1,\dots,n\}, \tag{4.12}$$

gde je $H_k = \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}}(\sum_{d=1}^{k} E_{dd} - kE_{k+1,k+1})$, $S_{kj} = \frac{1}{2}(E_{kj}+E_{jk})$ i $A_{kj} = \frac{\imath}{2}(E_{jk}-E_{kj})$. E_{ij} označava matricu kojoj je ij-ti element 1, a ostali 0: $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Iz očiglednog identiteta $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}$, lako se dobijaju sve komutacione relacije, kao i jednakost $\mathrm{Tr}\,(H_iH_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$. Množenjem matrica uvedenog prostora imaginarnom jedinicom, dobija se algebra kosohermitskih kompleksnih matrica traga 0, $\mathrm{su}(n)$. Algebra je dimenzije n^2-1, i realna, jer se samo realnim linearnim kombinacijama ovakvih matrica dobijaju matrice istog tipa.

Kompleksnim linearnim kombinacijama elemenata gornjeg bazisa se dobijaju sve kompleksne matrice traga 0, tj. alebra $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$. Stoga je $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ kompleksifikovana algebra $\mathrm{su}(n)_{\mathbb{C}}$, a $\mathrm{su}(n)$ realna forma $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})_r$. Jednostavnim računanjem komutatora, zadaci 4.16 i 4.22, pokazuje se da je za $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ Killing-ova forma $g(x,y) = 2nTr(xy)$. Vidi se da je nedegenerisana ($y \in \mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ znači da je $\mathrm{Tr}\,y^\dagger = 0$, pa je i $y^\dagger \in \mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$; stoga je $g(y^\dagger, y) = 0$ samo ako je $y = 0$, tako da nijedan nenulti vektor nije ortogonalan na celu algebru), što znači da je $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ poluprosta. To isto važi i za njenu realnu formu $\mathrm{su}(n)$; sada je $-\mathrm{Tr}\,(xy) = \mathrm{Tr}\,(x^\dagger y)$, pa kako je poslednji izraz standardni matrični skalarni proizvod, pozitivan je, invarijantan i bilinearan: $\mathrm{su}(n)$ je kompaktna algebra.

Da bi se odredila Cartan-ova podalgebra za $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$, dovoljno je uočiti da dijagonalni elementi bazisa obrazuju $n-1$ dimenzionalnu Abel-ovu podalgebru H. Pri tome se proverava da neka matrica X komutira sa svim matricama H_i ako i samo ako je i X dijagonalna, što znači da je $N(H) = H$, i H je jedna Cartan-ova podalgebra, ranga $r = n-1$. U narednim razmatranjima će se koristiti bazis $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$

$$\{H_k = \frac{\sum_{d=1}^{k} E_{dd} - kE_{k+1,k+1}}{2\sqrt{k(k+1)}},\; \frac{1}{\sqrt{2}}E_{ij} \,|\, k=1,\dots,n-1;\; i,j=1,\dots,n,\; i\neq j\} \tag{4.13}$$

za koji se neposredno proverava da je jedan standardni Cartan-Weyl-ov bazis.

Algebra su(2)

Angularni momenti K_i ($i=1,2,3$) su u kvantnoj mehanici hermitski operatori, čije su komutacione relacije $[K_i, K_j] = i\hbar\sum_k \varepsilon_{ijk}K_k$, jednake onima za bazis (4.12) u slučaju $n=2$. Množenjem sa $-i$ matrica H_k dobijaju se kosohermitski operatori

$$t_1 = -\frac{\imath}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ t_2 = -\frac{\imath}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix},\ t_3 = -\frac{\imath}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Oni čine bazis algebre su(2), sa komutacionim relacijama $[t_i, t_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} t_k$ (zadatak 4.10b). U ovom bazisu se lako određuje pridružena reprezentacija, i Cartan-ov tenzor $g = -2I_3$.

Da bi se našle ireducibilne reprezentacije potrebno je izvršiti kompleksifikaciju algebre su(2), čime se, kao i u opštem slučaju algebre su(n), dobija kompleksna poluprosta algebra sl$(2,\mathbb{C})$, ranga 1 (zadatak 4.21). Konsekventno, težine i korenovi su u standardnom bazisu realni brojevi. Cartan-Weyl-ov bazis (4.13) je

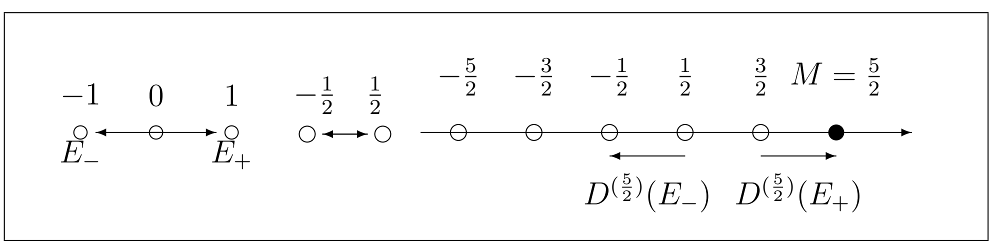
$$H_1 = \imath t_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ E_+ = \frac{\imath t_1 - t_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_- = \frac{\imath t_1 + t_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odgovarajuće komutacione relacije su

$$[H_1, H_1] = 0,\ [H_1, E_\pm] = \pm E_\pm,\ [E_+, E_+] = [E_-, E_-] = 0,\ [E_+, E_-] = H_1,$$

što, prema teoremu 4.6, predstavlja standardnu formu algebre. Jedini pozitivan (i prost) koren je 1, za koreni vektor E_+, a korenom vektoru E_- odgovara negativni koren -1.

To znači da se uslov iz teorema 4.8(i) za maksimalne težine svodi na celobrojnost broja $p = 2M$. Tako se za svako $M = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ dobija po jedna ireducibilna reprezentacija maksimalne težine M. Fundamentalna reprezentacija je $M = \frac{1}{2}$ ($[p = 1]$). Pošto postoji samo jedan negativni koren, -1, sve težine ove ireducibilne reprezentacije su u -1-nizu iz M: $-M, \ldots, M$. Ima ih tačno $2M + 1$, a operatori $D^{(M)}(E_\pm)$ ih dižu i spuštaju za 1 (slika 4.4). Kako je maksimalna težina nedegenerisana, a postoji samo jedan prost koren, u skladu sa ortonormiranošću bazisa $\mid D, \mathbf{m}, \lambda\rangle$ iz izvođenja relacije (4.9), sledi da su sve težine nedegenerisane. Stoga je dimenzija reprezentacije $2M + 1$. Poslednji zaključi se mogu izvesti i na osnovu teorema 4.8.



Slika 4.4: sl$(2,\mathbb{C})$: *korenovi i težine pridružene (ireducibilna sa $M = 1$), fundamentalne ($M = \frac{1}{2}$) i reprezentacije $M = \frac{5}{2}$.*

Zamenjujući u izrazu (4.10) $\mathbf{m}' = M$, i uočavajući da se odstupanje težine m od M može napisati kao $k = M - m$, nalaze se koeficijenti normiranja pri delovanju operatora $D^{(M)}(E_\pm)$ na bazis težina (zadatak 4.31):

$$D^{(M)}(E_\pm) \mid M, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(M \mp m)(M \pm m + 1)} \mid M, m \pm 1\rangle.$$

Zato su u bazisu vektora težina matrice operatora Cartan-Weyl-ovog bazisa:

$$\begin{aligned}\langle M, m' \mid D^{(M)}(H_1) \mid M, m\rangle &= m\delta_{m'm},\\ \langle M, m' \mid D^{(M)}(E_\pm) \mid M, m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(M \mp m)(M \pm m + 1)}\delta_{m',m\pm 1}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Konačno, pošto je rang algebre 1, samo je Kazimirov operator K_2 nezavisan. Znajući da je u bazisu (4.14) Cartan-ov tenzor $\frac{1}{2}g_{ij} = -\delta_{ij} = 2g^{ij}$, dobija se $K_2 = \sum_{i=1}^{3} D^{(M)^2}(t_i)$ (konstanta $-\frac{1}{2}$ se izostavlja). Izražavajući matrice t_i preko standardnog bazisa i zamenjujući ih u (4.15), ili direktno na osnovu zadatka 4.32, pokazuje se da je $K_2 = M(M+1)I_{2M+1}$. U skladu sa objašnjenjem u prethodnom odeljku, vidi se da je Kazimirov operator skalarni operator u prostoru ireducibilne reprezentacije, i njegova svojstvena vrednost $M(M+1)$, pošto je jedini, potpuno karakteriše tu reprezentaciju.

Algebra su(3)

Iz uvodnih razmatranja sledi da je su(3) kompaktna poluprosta algebra dimenzije 8. Bazis (4.12) (tradicionalno, te matrice se množe faktorom 2) čine Gell-Mann-ove matrice (zadatak 4.10c):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\imath & 0 \\ \imath & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & 0 \\ \imath & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\imath \\ 0 & \imath & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Kompleksifikacijom se nalazi algebra $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$, ranga 2, sa standardnim bazisom (4.13):

$$H_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$E_{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{\mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{\mathbf{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{-\mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{-\mathbf{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

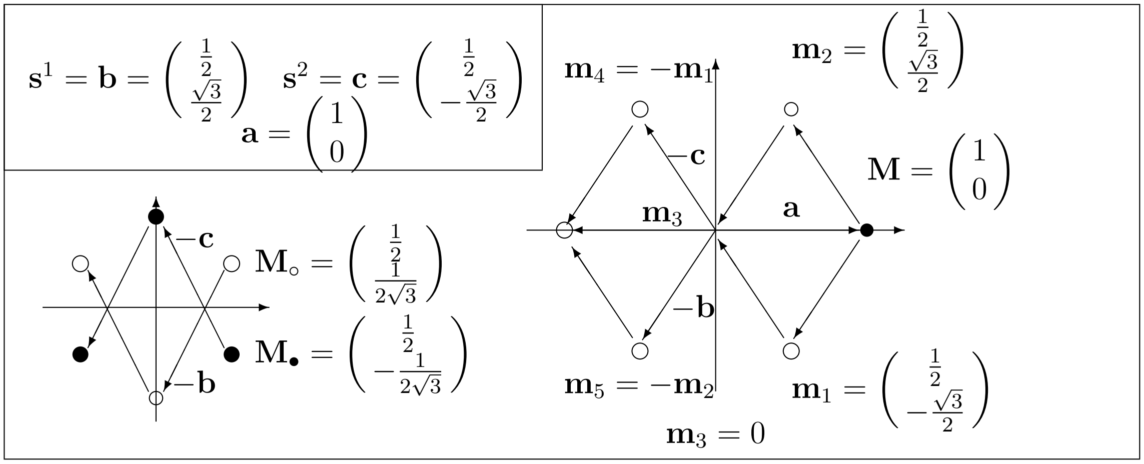
Lako se proverava da su komutacione relacije standardne (slika 4.2), pri čemu korenovi obrazuju temena pravilnog šestougla u ravni $\mathbb{R}^2$ (slika 4.5):

$$\mathbf{A}^+ = \{\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\} \text{ i } \mathbf{A}^- = \{-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c}\}.$$

Nenulte strukturne konstante za komutatore korenih vektora su

$$-c_{\mathbf{a},-\mathbf{b}} = c_{\mathbf{a},-\mathbf{c}} = c_{\mathbf{bc}} = -c_{\mathbf{b},-\mathbf{a}} = c_{\mathbf{c},-\mathbf{a}} = -c_{-\mathbf{b},-\mathbf{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sa slike se može rekonstruisati cela standardna forma algebre: npr., $[E_{\mathbf{b}}, E_{\mathbf{c}}] = c_{\mathbf{b},\mathbf{c}} E_{\mathbf{a}}$, jer je $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Upravo uočena veza istovremeno znači da $\mathbf{a}$, kao zbir dva pozitivna korena, nije prost, te da je fundamentalni sistem $\{\mathbf{s}^1 = \mathbf{b}, \mathbf{s}^2 = \mathbf{c}\}$.



Slika 4.5: $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$: *fundamentalne* ($\mathbf{M}_\circ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ *i* $M_\bullet = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$) *i pridružena reprezentacija.*

Ireducibilne reprezentacije su zadate maksimalnim težinama $\mathbf{M} = (\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{p_1-p_2}{2\sqrt{3}})^T$, gde su p_1 i p_2 nenegativni celi brojevi iz teorema 4.8. Weyl-ova formula, u kojoj je poluzbir pozitivnih korenova $\mathbf{S} = \mathbf{a}$, daje dimenziju ove reprezentacije: $\dim D^{(\mathbf{M})} = \frac{1}{2}(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+2)$.

Fundamentalne reprezentacije (slika 4.5) su određene maksimalnim težinama $\mathbf{M} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})^T$ ($[p_1 = 1, p_2 = 0]$) i $\mathbf{M} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})^T$ ($[p_1 = 0, p_2 = 1]$), dimenzije 3. Za prvu od njih se dejstvom operatora $D^{(\mathbf{M})}(E_{-\mathbf{s}^1})$ dobija $\mathbf{s}^1$-niz iz $\mathbf{M}$, koji ima još samo jednu težinu (jer je $p_1 = 1$), $\mathbf{m} = \mathbf{M} - \mathbf{s}^1 = (0, -\frac{1}{\sqrt{3}})^T$. Pošto je $p_2 = 0$, ovo je jedina težina prvog nivoa. Nalazi se u $\mathbf{s}^1$-nizu iz $\mathbf{M}$, i zna se da je poslednja u tom nizu, te ostaje da se nađe $\mathbf{s}^2$-niz iz $\mathbf{m}$. Kod njega je $p - q = 1$; pošto je $\mathbf{m}$ težina prvog nivoa, pozitivno q bi značilo da je $\mathbf{m} + \mathbf{s}^2$ maksimalna težina, što nije tačno, pa je $q = 0$, i $p = 1$. Tako je nađena jedina težina nivoa 2: $\mathbf{m}' = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})^T$. To je granična težina upravo razmatranog niza, tako da treba naći samo $\mathbf{s}^1$-niz iz $\mathbf{m}'$: $p - q = 0$. Ponovo je $q = 0$, jer na nivou 1 nema težina iz ovog niza, pa je $p = 0$ i treći nivo je prazan. Tako su nađene tri težine, pa pošto je reprezentacija trodimenzionalna, sve su nedegenerisane.

Inače se degeneracija pojedinih težina računa Freudenthal-ovom formulom. Kako se to čini, biće objašnjeno na primeru reprezentacije sa $p_1 = p_2 = 1$. Ona je dimenzije 8, sa maksimalnom težinom $\mathbf{M} = (1, 0)^T$, i to je u stvari pridružena reprezentacija. Njene težine su (zadatak 4.30) date na slici 4.5. Poznato je da je maksimalna težina nedegenerisana. Za težinu $\mathbf{m}_1 = \mathbf{s}^2$, imenilac Freudenthal-ove formule je 1, a izrazi $\mathbf{m}_1 + k\mathbf{a}^+$ su za $\mathbf{a}^+ > 0$ težine samo za $\mathbf{a}^+ = \mathbf{b}$ i $k = 1$, kada se dobija maksimalna težina (ukoliko $\mathbf{m}_1 + k\mathbf{a}^+$ nije težina, odgovarajuća degeneracija u formuli je 0, i član nestaje). Formula postaje $n_{\mathbf{m}_1} = 2n_{\mathbf{m}_1+\mathbf{b}}(\mathbf{m}_1 + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 1$; potpuno analogno se i za težinu m_2 pokazuje nedegenerisanost (samo se umesto $\mathbf{b}$ koristi $\mathbf{c}$). Iz težine $\mathbf{m}_3 = 0$ moguće je dobiti dodavanjem pozitivnih korenova težine $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_3 + \mathbf{c}$, $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_3 + \mathbf{b}$ i $\mathbf{M} = \mathbf{m}_3 + \mathbf{a}$. Freudenthal-ova formula postaje $n_{\mathbf{m}_3} = \frac{2}{3}(n_{\mathbf{M}}\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} + n_{\mathbf{m}_2}\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{b} + n_{\mathbf{m}_1}\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{c}) = 2$. Pošto je dimenzija reprezentacije 8, ostale tri težine su nedegenerisane.

Nezavisni Kazimirovi operatori su K_2 i K_3, koji se relativno dugačkim računom nalaze po definiciji. Umesto K_3 češće se koristi [B3] operator $K_3' = K_3 + \frac{3}{2}K_2$. Par svojstvenih vrednosti K_2 i K_3', koji jednoznačno definiše ireducibilnu reprezentaciju je $\frac{2}{3}(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) + 2p_1 + 2p_2)$ i $\frac{1}{9}(p_1 - p_2)(2p_1 + p_2 + 3)(p_1 + 2p_2 + 3)$.

Glava 5

LIE-JEVE GRUPE

Skup transformacija (geometrijskih, ili nekog drugog tipa) koje ostavljaju invarijantnim neki sistem je grupa. Poznavanje ove grupe simetrije sistema, pored toga što može pojednostaviti različite račune, daje osnovu za niz opštih zaključaka, relevantne za svaki sistem iste simetrije. U tom smislu korišćenje simetrije omogućava jedinstveni opis fizički različitih problema. Tipični primeri su primena održanja impulsa kod translatorno invarijantnih sistema, održanja angularnih momenata pri sfernoj simetriji; slično, niz dobrih kvantnih brojeva manifestuje zakone održanja za unutrašnje simetrije elementarnih čestica. Pored konačnih grupa, u fizici se pojavljuju i neprekidne grupe. Njihovo proučavanje se u mnogo čemu svodi na razmatranje okoline jediničnog elementa. Tangentni prostor u jediničnom elementu ima strukturu Lie-jeve algebre, i neka za fiziku značajna pitanja redukuju se na već rešene probleme u okviru teorije Lie-jevih algebri.

5.1 STRUKTURA LIE-JEVIH GRUPA

Lie-jeve grupe pored algebarske imaju i topološku i analitičku strukturu, što određuje njihove dodatne karakteristike. U ovom poglavlju će biti razmotrene prvo osobine koje slede iz činjenice da je grupa topološki prostor, a zatim će se proučiti posledice koje ima analitička struktura na grupi.

5.1.1 Osnovni pojmovi

Algebarska struktura grupe, preko asocijativne operacije množenja i inverznog elementa (definicija 3.1), uvodi dva preslikavanja:

(i) množenje, $m : G \times G \to G$, dato sa $m(g, g') \stackrel{\text{def}}{=} gg'$;

(ii) inverzija, $i : G \to G$, zadato kao $i(g) = g^{-1}$.

Kada je na skupu G uvedena neka dodatna topološka struktura, ima smisla govoriti o topološkim osobinama ovih preslikavanja. Kod konačnih, i uopšte diskretnih grupa, topologija se ne razmatra, već samo algebarske osobine (može se reći da se podrazumeva trivijalna topologija u kojoj je svaki element grupe otvoren skup, tako da je svako preslikavanje neprekidno). Međutim, kod neprekidnih grupa, topološki aspektni znatno doprinose razjašnjavanju osobina grupe. Za fiziku su značajne neprekidne grupe koje su istovremeno i mnogostrukosti, te omogućavaju primenu tehnika vezanih za ovakve topološke prostore.

Definicija 5.1 *Grupa G je* Lie-jeva grupa *dimenzije n (ili n-parametarska) ako je G glatka mnogostrukost dimenzije n, a preslikavanja $i(g) = g^{-1}$ i $m(g, g') = gg'$ su glatka.*

U skladu sa osnovnom idejom pri uvođenju mnogostrukosti, svakom elementu g se kartom (U_g, ψ_g) pridružuje tačka $\psi_g(g)$ iz $\mathbb{R}^n$ sa koordinatama, *parametrima*, $(g^1, ..., g^n)$. Množenje i inverzija postaju beskonačno diferencijabilne realne funkcije realnih promenljivih. Za proizvoljna dva elementa sa karti (U_α, ψ_α) i (U_β, ψ_β), neke njihove okoline množenjem daju elemente sa iste karte (U_γ, ψ_γ), indukujući funkciju $\hat{m} = (\hat{m}^1, \dots, \hat{m}^n) = \psi_\gamma \circ m \circ (\psi_\alpha^{-1} \times \psi_\beta^{-1})$; njeni su argumenti koordinate na kartama: $\hat{m}(g^1, \dots, g^n, h^1, \dots, h^n)$ (kada je moguće, ovo će biti kratko pisano $\hat{m}(g, h)$). Slično je i sa funkcijom inverzije: inverzi iz okoline g su u okolini g^{-1}, pa je $\hat{i} = \psi_{g^{-1}} \circ i \circ \psi_g^{-1}$ funkcija argumenata $g^1, \dots, g^n$.

Zadatak 5.1: Izraziti aksiome grupe preko funkcija m i i iz definicije Lie-jeve grupe.

Pogodnim izborom karata (obično se govori o različitim parametrizacijama) dobijaju se koordinate koje ističu pojedine osobine grupe. Pokazuje se da uvek postoje karte koje sadrže jedinični element, i pri tome je $\psi_e(e) = 0$; za njihove koordinate se kaže da su *kanonične*. Ako je još unutar neke okoline U_e zadovoljeno $\psi_e(g^{-1}) = -\psi_e(g)$, kaže se da su kanonične koordinate prve vrste, dok je $\psi_e^{-1}(g^1, ..., g^n) = \psi_e^{-1}(g^1, 0, ..., 0)\psi_e^{-1}(0, g^2, 0, ..., 0)...\psi_e^{-1}(0, ..., 0, g^n)$ karakteristika kanoničnih koordinata druge vrste.

Izvedeni pojmovi se uvode na standardni način, uzimajući u obzir sve postojeće strukture (algebarsku i topološku).

Definicija 5.2 Lie-jeva podgrupa (invarijantna) *Lie-jeve grupe je svaka podgrupa (invarijantna) koja je i glatka podmnogostrukost.*

Izomorfizam *Lie-jevih grupa je difeomorfizam koji je pri tome i algebarski izomorfizam.* Reprezentacija *$D(G)$ Lie-jeve grupe G u prostoru $\mathcal{H}$ je glatki homomorfizam D kojim se G preslikava u $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$.*

Direktni (semidirektni) proizvod *$G_1 \otimes G_2$ ($G_1 \wedge G_2$) Lie-jevih grupa G_1 i G_2 je direktni proizvod njihovih mnogostrukosti, sa algebarskom strukturom direktnog (semidirektnog) proizvoda apstraktnih grupa G_1 i G_2.*

Lema preuređenja pokazuje da svaki element grupe množenjem indukuje jednu bijekciju na grupi, $g : G \to G$, definisanu sa $\forall h \in G \; g : h \mapsto gh = m(g, h)$. Isto važi i za preslikavanje i. Sa druge strane, ove bijekcije su kod Lie-jevih grupa glatke (pa i neprekidne), odakle sledi da su homeomorfizmi i difeomorfizmi.

Zadatak 5.2: Dvodimenzionalna grupa $G = \{(A, a) \mid 0 < A \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}\}$ je definisana delovanjem u $\mathbb{R}^1$: $(A, a)x = Ax + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Pokazati da je to Lie-jeva grupa, odrediti njene topološke osobine i funkcije m i i.

Zadatak 5.3: a) Neka je M proizvoljni operator iz $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Pokazati da skup O_M operatora A za koje važi $A^T M A = M$ čini podgrupu u $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, i da ovi operatori imaju determinantu 1 ili -1. b) Neka je M operator iz $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Pokazati da skup operatora $U_M(n)$ za koje važi $A^\dagger M A = M$ čini grupu u $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ i da svi imaju determinantu modula 1.

5.1.2 Topološke osobine

Topološki zahtevi za algebarsko množenje, nametnuti glatkošću funkcija m i i u definiciji 5.1, dovode do korelacije topoloških i algebarskih osobina. To se manifestuje već na primarnim pojmovima otvorenih skupova (za topologiju) i podgrupa (za algebru). Već istaknuta činjenica da je množenje elementom grupe homeomorfizam, odmah pokazuje da su podgrupa i njeni koseti topološki ekvivalentni, što ima niz važnih posledica.

Lema 5.1 **(i)** *Ako je neka podgrupa otvoren skup u G, onda je i zatvoren.*

(ii) *U povezanoj grupi nema otvorenih pravih podgrupa.*

Dokaz: Svaki koset otvorene podgrupe je zbog homeomorfnosti množenja otvoren. Unija ovih koseta (bez podgrupe) je otvoren skup i komplement date podgrupe, pa je podgrupa i zatvoren skup. To odmah znači da je grupa nepovezana ukoliko je reč o pravoj podgrupi. ∎

Za svaku podgrupu H može se formirati skup koseta, koji se označava sa G/H (kada je H invarijantna podgrupa ovo je faktor grupa), i sastoji se od $\frac{|G|}{|H|}$ topološki jednakih skupova. Kanonično preslikavanje (koje je u slučaju invarijantne podgrupe i homomorfizam) $f : G \to G/H$, definisano sa $f(g) = gH$, indukuje faktor topologiju na G/H i time skup koseta postaje topološki prostor, *prostor koseta*. G/H se često koristi pri ispitivanju topoloških osobina grupa.

Teorem 5.1 **(i)** *Ako je N zatvorena invarijantna podgrupa u G, i G je kompaktna (povezana), onda je faktor grupa G/N kompaktna (povezana).*

(ii) *Ako su zatvorena podgrupa H i prostor koseta G/H kompaktni (povezani) onda je i G kompaktna (povezana).*

Postojanje otvorenih pravih podgrupa, tj. i algebarski i topološki izdvojenih podskupova, dovodi do nepovezanosti grupe (lema 5.1), pri čemu su koseti u međusobno različitim komponentama povezanosti, i imaju jednake topološke osobine. Precizno objašnjenje daje

Teorem 5.2 *Komponenta jedinice G_e grupe G je invarijantna podgrupa i pri tome je G/G_e (*grupa komponenti*) diskretna.*

Dokaz: Pošto je komponenta povezanosti maksimalni povezani podskup, ona sadrži svaki povezani podskup sa kojim ima neprazan presek. Inverzija je homeomorfizam, pa je $G_e^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in G_e\}$ povezan skup: kako je $e^{-1} = e$, G_e^{-1} je podskup u G_e; množenje elementom grupe je homeomorfizam, te je, za h iz G_e, skup hG_e povezan i sadrži $h \in G_e$, pa je podskup u G_e. Time su pokazani postojanje inverznog elementa i zatvorenost na množenje komponente jedinice. Asocijativnost množenja je očigledna, a e je po definiciji iz G_e. Prema tome G_e je algebarska podgrupa. Kako je svaka komponenta povezanosti u mnogostrukosti i sama mnogostrukost, ostalo je da se pokaže invarijantnost. Ona je posledica homeomorfnosti preslikavanja $G_e \to gG_eg^{-1}$: lik je povezan skup koji sadrži e, tj. podskup je u G_e. Diskretnost faktor grupe sledi iz činjenice da se pri kanoničnom homomorfizmu komponenta jedinice preslikava u tačku, te isto mora biti slučaj i sa kosetima. ∎

Gornji teorem dozvoljava da se topološka razmatranja vrše na komponenti jedinice. To je invarijantna podgrupa, homeomorfna svojim kosetima (ostale komponente povezanosti). Tako proučavanje povezanih Lie-jevih grupa daje informaciju i o ostalim: i algebarske i topološke osobine nepovezane grupe se mogu dobiti korišćenjem komponente jedinice G_e, diskretne faktor grupe G/G_e i neprekidnog kanoničnog homomorfizma. Zato se stavovi i definicije teorije Lie-jevih grupa po pravilu prvo formulišu za povezane grupe, dok se za ostale naknadno mogu izvesti zaključci na osnovu prethodnih razmatranja.

Tako se za Lie-jevu grupu kaže da je *poluprosta*, ako osim $\{e\}$ nema Abel-ovih povezanih invarijantnih Lie-jevih podgrupa. Poluprosta Lie-jeva grupa je *prosta* ako nema pravih povezanih invarijantnih Lie-jevih podgrupa. Treba uočiti da Lie-jeva grupa može biti prosta (poluprosta) čak i ako ima invarijantne Lie-jeve podgrupe (Abel-ove) koje nisu povezane (npr. diskretne podgrupe).

Zadatak 5.4: a) Pokazati da je grupa $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, ortogonalnih matrica dimenzije n, nepovezana, sa dve komponente povezanosti, pri čemu je komponenta jedinice $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, skup matrica sa determinantom 1. b) Pokazati da je $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ nepovezana grupa sa dve komponente povezanosti, pri čemu je komponenta jedinice skup matrica pozitivne determinante $\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$. c) Pokazati da je $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ povezana grupa. d) Proveriti da su sve navedene podgrupe zatvoreni skupovi u $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Zadatak 5.5: Pokazati da je grupa unitarnih matrica dimenzije n, $\mathrm{U}(n)$ povezana. Isto za $\mathrm{SU}(n)$. Na osnovu toga pokazati da su $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ i $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ povezane grupe. Pokazati zatvorenost svih ovih podgrupa u $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.

Zadatak 5.6: Pokazati da grupa $\mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})$ ima četiri komponente povezanosti. Odrediti komponentu jedinice, tzv. *Lorentz-ovu grupu*, L, i ispitati njene topološke osobine.

Zadatak 5.7: Poincaré-ova grupa Π', je skup $\{(A,a) \mid A \in \mathrm{O}(1,3,\mathbb{R}), \quad a \in \mathbb{R}^4\}$ transformacija u $\mathbb{R}^4$ definisanih sa $(A,a)x = Ax + a$. Pokazati da je $\Pi' = T^4 \wedge \mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})$, gde je T^4 grupa četvorodimenzionalnih translacija. Ispitati topološke osobine ove grupe i njene komponente jedinice.

Zadatak 5.8:° Neka je G grupa transformacija na nekoj mnogostrukosti M i pri tome je delovanje glatko i tranzitivno (definicija 3.5). Pokazati da je M difeomorfna prostoru koseta G/H, gde je H podgrupa u G izomorfna bilo kojoj maloj grupi (dejstvo je tranzitivno, pa su sve male grupe izomorfne).

Pokazano je da komponenta jedinice, tj. najveća povezana podgrupa koja sadrži e, uslovljava osobine cele grupe. Sledeći stav otkriva specifičnu osobinu svih povezanih grupa koje su i topološki prostori (među njima su i povezane Lie-jeve grupe): svaka okolina jediničnog elementa umnogome određuje osobine cele grupe.

Teorem 5.3 *Povezana Lie-jeva grupa G je generisana svakom okolinom jediničnog elementa, tj. svaki element grupe se može izraziti kao proizvod elemenata iz bilo koje okoline elementa e.*

▬*Dokaz:* Neka je U otvorena okolina e i $U^{-1} = \{u^{-1} \mid u \in U\}$. Skup $V = U \cap U^{-1}$ sadrži sve svoje inverzne elemente i e, a množenje je i dalje asocijativno. Ako bi bio i zatvoren u odnosu na množenje, u pitanju bi bila otvorena podgrupa, što je suprotno pretpostavci povezanosti G (lema 5.1), osim za $U = V = G$. Na isti način se sve navedene osobine pokazuju i za skup $V^2 = \{vv' \mid v, v' \in V\} \supset V$. Nastavljanjem analognih razmatranja se rekurzivno formiraju skupovi $V^{m+1} = \{vV^m \mid v \in V\}$, pri čemu je stalno $V^{m+1} \supset V^m$, tj. sve veći deo grupe je obuhvaćen novim skupom, sve dok u nekom koraku on ne postane zatvoren, kada je $V^m = G$, što znači da je svaki element grupe proizvod m elemenata iz U. ▮

Prema tome, množenjem elemenata iz ma koje okoline jediničnog elementa povezane Lie-jeve grupe generiše se cela grupa. Tako svaka okolina jediničnog elementa, zahvaljujući grupnom množenju i topološkim uslovima, nosi informacije o celoj grupi. Uz ranije izvedene zaključke, ovo dozvoljava da se teorija Lie-jevih grupa zasnuje na proučavanju okolina jedinice povezanih grupa. U nastavku će biti razmotren način na koji se takvi, lokalni zaključci, mogu zatim primeniti za celu grupu. Kao prvi primer kako lokalna razmatranja daju relevantne informacije o celoj grupi, može poslužiti često korišćena

Lema 5.2 *Svaka diskretna invarijantna podgrupa povezane grupe je podgrupa centra grupe.*

▬*Dokaz:* Neka je H diskretna invarijantna podgrupa, a U neka okolina e, i $V_e = U \cap U^{-1}$. Tada je skup $V_h \stackrel{\text{def}}{=} \{vhv^{-1} \mid v \in V_e\}$ u okolini $h \in H$, a zbog invarijantnosti H je $V_h \subset H$. No, za dovoljno malo U, tj. V_e, zbog diskretnosti H, nema u okolini h drugih elemenata iz H, pa je $V_h = \{h\}$, tj. $vh = hv$, za svako v iz V. Na osnovu teorema 5.3, sledi da h komutira sa svim elementima grupe. ▮

5.1.3 Lokalni izomorfizam

Na osnovu prethodnih stavova postalo je intuitivno jasno da grupe slične u okolini jediničnog elementa imaju mnoge zajedničke osobine. Takva svojstva se nazivaju *lokalna*. Za preciznu formulaciju ovakvih zapažanja potrebno je prilagoditi pojam izomorfizma.

Definicija 5.3 *Lie-jeve grupe G i G' su* lokalno izomorfne *ako za neke okoline jedinica U_e i $U'_{e'}$ postoji difeomorfizam $f : U_e \to U'_{e'}$ za koji je:*

(i) *$h, g, hg \in U_e$ povlači $f(hg) = f(h)f(g) \in U'_{e'}$;*

(ii) *$h, g \in U_e$ i $f(h)f(g) \in U'_{e'}$ povlači $hg \in U_e$ i $f(hg) = f(h)f(g)$.*

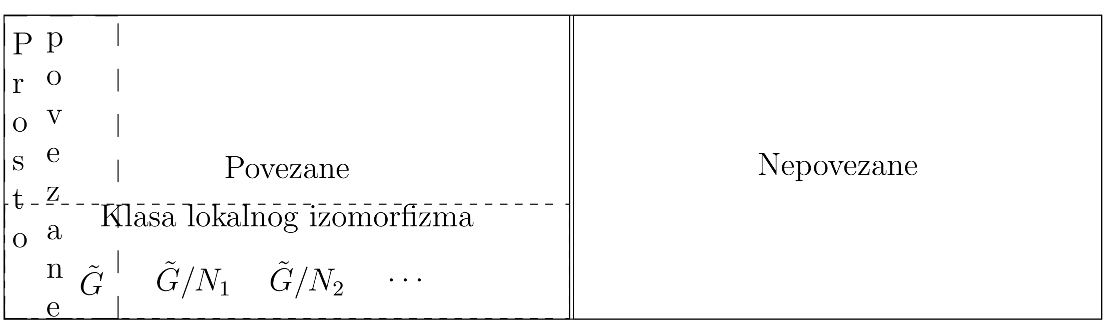
Jednostavnije, iako ne zahteva zatvorenost množenja na U_e i $U'_{e'}$, lokalni izomorfizam ima sve osobine običnog izomorfizma kad god je proizvod originala ili likova ponovo u odgovarajućoj okolini. Lako je proveriti da je lokalni izomorfizam relacija ekvivalencije, koja izjednačava grupe sa jednakim lokalnim osobinama. Ipak, lokalni izomorfizam nije pravi izomorfizam, pa među lokalno izomorfnim grupama postoje i one koje nisu izomorfne; poznavanje jedne grupe može se smatrati potpunim, tek kada je određeno kojoj klasi izomorfnih grupa pripada, te je važno znati koje klase pravog izomorfizma sadrži jedna klasa lokalnog izomorfizma.

Teorem 5.4 *Za svaku povezanu Lie-jevu grupu G postoji jedinstvena (do na izomorfizam) prosto povezana* univerzalno natkrivajuća grupa *$\tilde{G}$, takva da:*

(i) *postoji homomorfizam $\pi : \tilde{G} \to G$ grupe $\tilde{G}$ na G, tj. $G \cong \tilde{G}/\ker\pi$;*

(ii) *π je lokalni izomorfizam grupa $\tilde{G}$ i G;*

(iii) *jezgro homomorfizma π je diskretna invarijantna podgrupa centra grupe $\tilde{G}$, izomorfna fundamentalnoj grupi $\pi_1(G)$: $\pi_1(G) \cong \ker\pi$.*



Slika 5.1: **Povezanost Lie-jevih grupa.** *Među povezanima su prosto povezane, po jedna klasa izomorfnih prosto povezanih u svakoj klasi lokalnog izomorfizma. N_i su diskretne invarijantne podgrupe centra univerzalno natkrivajuće grupe $\tilde{G}$.*

Teorem pokazuje da u klasi lokalnog izomorfizma postoji tačno jedna klasa (univerzalno natkrivajuća) izomorfnih prosto povezanih grupa, i niz klasa homomorfnih likova univerzalno natkrivajuće grupe; pri tome je svaka klasa (pravog) izomorfizma predstavljena faktor grupom $G = \tilde{G}/N$, gde je N diskretna invarijantna (time i centralna, lema 5.2) podgrupa u $\tilde{G}$, tj. homomorfnim likom grupe $\tilde{G}$ kanoničnog homomorfizma $\pi : \tilde{G} \to G$ sa jezgrom $\ker\pi = N$. π preslikava sve tačke kernela u istu tačku, jedinicu grupe G; krive koje u $\tilde{G}$ povezuju različite, a pri tom udaljene (jer je ovo diskretan skup) tačke kernela, preslikavaju se u petlje u jedinici grupe G. Ovako se dobijaju netrivijalne petlje iz $\pi_1(G)$.

Zadatak 5.9: Pokazati da je sa $f(x) = e^{\imath 2\pi x}$ definisano univerzalno natkrivanje grupe $\mathrm{U}(1)$ grupom $\mathbb{R}$ (realni brojevi sa operacijom sabiranja). Odrediti odavde fundamentalnu grupu $\pi_1(\mathrm{U}(1))$. Uspostaviti analogno preslikavanje realne ose na $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$.

Zadatak 5.10: Odrediti fundamentalne grupe za $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ i $\mathrm{SU}(n)$. (Uputstvo: na osnovu zadatka 5.8 odrediti prostor koseta $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$ i $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1)$, pa iskoristiti sledeći stav: ako je H podgrupa za koju je prostor koseta difeomorfan sferi S^k $(k > 2)$, onda je $\pi_1(G) = \pi_1(H)$).

Zadatak 5.11: Pokazati da je $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ prosto povezana grupa (Uputstvo: posmatrati $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$ kao grupu transformacija u $\mathbb{F}^n$, i odrediti orbite i male grupe, zatim iskoristiti zadatak 3.33 i teorem: ako su podgrupa i prostor koseta prosto povezani, cela grupa je prosto povezana).

Zadatak 5.12: Odrediti centre grupa $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})$, $\mathrm{U}(n)$ i $\mathrm{SU}(n)$.

Zadatak 5.13: Pokazati da je svaki element grupe $\mathrm{SU}(2)$ oblika

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |\, a \,|^2 + |\, b \,|^2 = 1.$$

Na osnovu ovoga zaključiti da je sfera S^3 mnogostrukost grupe $\mathrm{SU}(2)$.

Zadatak 5.14: Pokazati da je sa

$$f(x) = X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + \imath x_2 \\ x_1 - \imath x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^4,$$

uspostavljena bijekcija između $\mathbb{R}^4$ i hermitskih matrica dimenzije 2. Neka je $Y = AXA^\dagger$, $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Pokazati da je indukovano preslikavanje $O(A)f^{-1}(X) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(Y)$ homomorfizam i lokalni izomorfizam grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ na Lorentz-ovu grupu.

5.1.4 Analitičke osobine i Lie-jeva algebra

U dosadašnjim razmatranjima nisu korišćene sve osobine Lie-jevih grupa: bilo je važno da je G topološki prostor, i da su preslikavanja m i i neprekidna. Takve grupe se nazivaju *neprekidne* grupe, te svi izvedeni zaključci važe za njih. Uočeni značaj okoline jediničnog elementa ukazuje na ulogu koju aparat analize mora imati, u slučaju Lie-jevih grupa. Funkcije množenja i inverzije su glatke, mogu se diferencirati, a okolina jedinice se može identifikovati sa tangentnim prostorom u jediničnom elementu.

Svaka karta izdvaja koordinatni bazis tangentnog prostora. Na taj način, izborom karte sa kanoničnim koordinatama u okolini jedinice, u tangentnom prostoru jediničnog elementa je zadat bazis $\{a_i = \partial_i \,|\, i = 1,\dots,n\}$. U dovoljno maloj okolini jediničnog elementa množenjem se dobijaju elementi sa iste karte, pa je $\hat{m}^i(g,e) = \hat{m}^i(g^1,...,g^n,0,...,0) = (ge)^i = g^i$, i $\hat{m}^i(e,h) = h^i$. Ako je $\hat{m}^k_j(g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{m}^k(g,h)}{\partial h^j}|_{h=e}$, nalazi se $\hat{m}^k_j(e) = \delta^k_j$, $\frac{\partial^2 \hat{m}^k(e,e)}{\partial g^i \partial g^j} = \frac{\partial^2 \hat{m}^k(e,e)}{\partial h^i \partial h^j} = 0$; u okolini jediničnog elementa funkcija množenja postaje $\hat{m}^k(g,h) = g^k + h^k + \sum a^k_{ij} g^i h^j + \dots$. Konstante $a^k_{ij} = \frac{\partial^2 \hat{m}^k(e,e)}{\partial g^i \partial h^j}$ su na datoj karti potpuno određene grupnim množenjem. Isto važi i za konstante $c^k_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} a^k_{ij} - a^k_{ji}$, koje zadovoljavaju obe relacije 4.2: antisimetričnost je očigledna, a Jacobi-jev identitet sledi iz asocijativnosti grupnog množenja.

Zadatak 5.15: • Dokazati relacije 4.2 za gore definisane konstante c_{ij}^k.

Ako se komutator vektora koordinatnog bazisa definiše sa $[a_i, a_j] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum c_{ij}^k a_k$, tangentni prostor $T_e(G)$ postaje Lie-jeva algebra sa strukturnim konstantama c_{ij}^k u bazisu a_i. Važno je uočiti da izbor druge karte može promeniti koordinatni bazis i strukturne konstante, no tangentni prostor i komutator u Lie-jevoj algebri ne zavise od izbora bazisa. Stoga je dobijena algebra u potpunosti određena grupom, preciznije bilo kojom okolinom jediničnog elementa.

Definicija 5.4 *Lie-jeva algebra $L(G)$ Lie-jeve grupe G je tangentni prostor u jediničnom elementu, pri čemu je komutator određen strukturnim konstantama c_{ij}^k koordinatnog bazisa karte sa kanoničnim koordinatama.*

U konstrukciji algebre $L(G)$ učestvuje isključivo okolina jediničnog elementa, pa sve lokalno izomorfne grupe imaju izomorfne Lie-jeve algebre. U suprotnom smeru, Lie-jeva algebra određuje klasu lokalno izomorfnih grupa, odnosno do na izomorfizam jedinstvenu univerzalno natkrivajuću grupu: postoji bijekcija između skupa Lie-jevih algebri i prosto povezanih Lie-jevih grupa.

Jasno je stoga da se Lie-jeva algebra može identifikovati samo sa okolinom jediničnog elementa (kao što se uvek tangentni prostor u tački mnogostrukosti može identifikovati sa okolinom te tačke). Grupno množenje se može lokalno, na toj okolini, izvesti iz komutatora Lie-jeve algebre, na sledeći način. Svaki vektor tangentnog prostora određuje familiju krivih kojima je on tangenta. Kod Lie-jevih grupa u toj familiji postoji tačno jedna kriva $g(t)$ za koju važi $g(t+s) = g(t)g(s)$, ili u kanoničnim koordinatama $\hat{m}^k(g(t), g(s)) = g^k(t+s)$. Naime, diferenciranje po s daje: $\frac{\mathrm{d}\hat{m}^k(g(t),g(s))}{\mathrm{d}s} = \sum_j \frac{\mathrm{d}g^j(s)}{\mathrm{d}s} \frac{\partial \hat{m}^k(g(t),g(s))}{\partial g^j} \xrightarrow{s\to 0} \sum_j a^j \hat{m}_j^k(g(t))$ i $\frac{\mathrm{d}g^k(t+s)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}g^k(t+s)}{\mathrm{d}(t+s)} \xrightarrow{s\to 0} \frac{\mathrm{d}g^k(t)}{\mathrm{d}t}$. Dobijen je sistem diferencijalnih jednačina, $\frac{\mathrm{d}g^k(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_j a^j \hat{m}_j^k(g(t))$, uz početni uslov $g^k(0) = 0$ (tj. $g(0) = e$), ima tačno jedno rešenje za svaki tangentni vektor $a = (a^1, \dots, a^n)$ (teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja Cauchy-jevog problema). Ovakva kriva je očigledno *jednoparametarska podgrupa* $g(t)$ u G. Sa druge strane, formalno razmatrajući uslov $g(t)g(s) = g(t+s)$ kao funkcionalnu jednačinu, dobija se rešenje $g(t) = e^{at}$, čijim diferenciranjem u $t = 0$ se nalazi $\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = a$. Zbog toga se jednoparametarske podgrupe često smatraju za *eksponencijalno preslikavanje* tangentnih vektora, bez obzira što izraz $g(t) = e^{at}$ u opštem slučaju ima samo simbolički, a ne neposredan smisao.

Zaključak prethodnih razmatranja je da svaki tangentni vektor u jedinici grupe, tj. svaki element Lie-jeve algebre, jednoznačno određuje jednu jednoparametarsku podgrupu u G. Ovakve jednoparametarske podgrupe u opštem slučaju ne popunjavaju celu grupu. Međutim, ispostavlja se da se svaki element komponente jedinice grupe može dobiti množenjem nađenih jednoparametarskih podgrupa, preko Kempbell-Baker-Hausdorff-ove formule[1]. Tako Lie-jeva algebra, pri zadatoj grupnoj mnogostrukosti, potpuno definiše povezanu Lie-jevu grupu. Zbog toga se često elementi Lie-jeve algebre nazivaju *generatorima* Lie-jeve grupe.

Eksponencijalno preslikavanje u kvantnoj teoriji uspostavlja vezu između simetrija sistema i opservabli za koje važe zakoni održanja. Simetrije su reprezentovane unitarnim operatorima, dok su održane opservable zapravo reprezentanti generatora grupe (često pomnoženi imaginarnom jedinicom). To ukazuje na značaj eksponencijalnog preslikavanja u fizici. Za slučaj matričnih, tj.

[1]Po Zassenhaus-u!

operatorskih grupa, ono dobija sasvim uobičajeni smisao eksponenciranja matrica. Naime, zbog postojanja inverznog elementa grupe, elementi matrične grupe G m-dimenzionalnih matrica su nesingularne matrice, tj. G je podgrupa grupe svih nesingularnih matrica $\mathrm{GL}(m,\mathbb{F})$. Stoga se svaki element može napisati u obliku $g = e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k$, gde je a neka matrica iste dimenzije, tj. element algebre $\mathrm{gl}(m,\mathbb{F})$. Proizvoljna kriva $g(t) = e^{a(t)}$ u G definiše krivu $a(t)$ u $\mathrm{gl}(m,\mathbb{F})$, a uslov $g(0) = I_m$ povlači $a(0) = 0$. Specijalno, za jednoparametarske podgrupe, uslov $g(t)g(s) = g(t+s)$ sada daje kao pravo (a ne simbolično) rešenje $g(t) = e^{at}$, tj. $a(t) = at$ za neku matricu a iz $\mathrm{gl}(m,\mathbb{F})$: diferencirajući uslov po s (izvod matrice je matrica čiji su elementi izvodi elemenata početne matrice) nalazi se $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g(t+s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(s+t)} g(t+s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g(t)g(s)$, što, za $s = 0$ i $\frac{dg(s)}{ds}|_{s=0} = a$, daje $\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = ag(t)$. Tangentni vektor na ovu krivu u jediničnom elementu je a, i postaje očigledno da su tangentni vektori matrice iz $\mathrm{gl}(m,\mathbb{F})$, da je Lie-jeva algebra matrične grupe neka podalgebra u $\mathrm{gl}(m,\mathbb{F})$, te da svaki element te podalgebre određuje jednu jednoparametarsku podgrupu.

Lako je uočiti da postoji jednoznačna veza između podalgebri (ideala) u $L(G)$ i povezanih podgrupa (invarijantnih podgrupa) u grupi G (dovoljno je shvatiti tangentni prostor podgrupe kao potprostor tangentnog prostora grupe). Odavde sledi da je G prosta ili poluprosta, ako i samo ako je takva $L(G)$. Takođe je $L(G/N)$ ($N \triangleleft G$) izomorfna sa $L(G)/L(N)$. Kasnije će biti pokazano da kompaktne grupe imaju kompaktne Lie-jeve algebre (što u opštem slučaju ne znači da kompaktna algebra određuje kompaktnu grupu). Lie-jeva algebra direktnog (semidirektnog) proizvoda grupa je direktni (semidirektni) zbir Lie-jevih algebri faktora.

Zadatak 5.16: Pokazati da je $L(\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})) = \mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$.

Zadatak 5.17: Za matrice A i a iz $\mathbb{F}^{nn}$ važi $A = e^a$. Pokazati da je $\det A = e^{\mathrm{Tr}\,(\ln A)} = e^{\mathrm{Tr}\,a}$.

Zadatak 5.18: a) Pokazati da je $\mathrm{so}_M(n,\mathbb{R})$ (zadatak 4.8) Lie-jeva algebra grupe O_M (zadatak 5.3.a-b). Isto za grupu $U_M(n)$ iz zadatka 5.3.b i skup matrica iz $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$ sa osobinom $a^\dagger M = -Ma$.

Zadatak 5.19: Koristeći prethodne zadatke pokazati da je: $L(\mathrm{SL}(n,\mathbb{F})) = \mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$, $L(\mathrm{SO}(p,q,\mathbb{R})) = \mathrm{so}(p,q,\mathbb{R})$, $L(\mathrm{U}(n)) = u(n)$ i $L(\mathrm{SU}(n)) = \mathrm{su}(n)$.

Zadatak 5.20: Odrediti matrice koje reprezentuju rotacije i boost-ove duž koordinatnih osa. Zatim pokazati da su generatori ovih jednoparametarskih podgrupa upravo matrice iz zadatka 4.9c.

Zadatak 5.21: Elementi Euklidove grupe ravni $E(2,\mathbb{R})$ su parovi $(A|a)$ ortogonalnih transformacija A ravni i translacija za vektor a: $(A|a)x = Ax + a, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$. Pokazati da je $E(2,\mathbb{R}) = T^2 \wedge \mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ i odrediti algebru ove grupe.

Zadatak 5.22: U prostoru $\mathbb{C}^3$ delovanje grupa $\mathrm{U}(1)$ i $\mathrm{SU}(2)$ može se definisati na sledeći način ($U \in \mathrm{U}(1), S \in \mathrm{SU}(2)$):

$$(U,I)x = \begin{pmatrix} e^{-\imath\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\imath\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\imath 2\varphi} \end{pmatrix} x, \quad (1,S) = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Pokazati da je skup transformacija $(U,S) = (U,I)(1,S)$ lokalno izomorfan grupi $\mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{SU}(2) \subset \mathrm{SU}(3)$. Odrediti Lie-jevu algebru ove grupe.

5.1.5 Invarijantna integracija

U teoriji konačnih grupa se javlja tzv. *funkcional usrednjavanja* u formi $f(G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)$, gde je $f(g)$ neka funkcija na grupi, čije su vrednosti kompleksni brojevi (npr. u formuli za razlaganje reprezentacija preko karaktera) ili matrice (npr. formula za grupne projektore). Ovakvi izrazi imaju važnu ulogu u dokazivanju pojedinih stavova (teorem ortogonalnosti ili Schur-Auerbachov stav), zahvaljujući osobini da je $f(G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(hg) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(gh)$ za svaki element h grupe G (posledica leme preuređenja). Analogon funkcionala usrednjavanja za Lie-jeve grupe je *invarijantni integral*, tesno povezan sa merom na grupnoj mnogostrukosti. To je integral oblika: $\int_G f(g)\,\mathrm{d}\mu(g)$, gde je μ neka mera na grupi (funkcija koja podskupovima u G pridružuje pozitivne brojeve, "zapreminu").

Definicija 5.5 *Integral je invarijantan ako je i levo i desno invarijantan, tj. ako je:*

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(hg)\,\mathrm{d}\mu(g) = \int_G f(gh)\,\mathrm{d}\mu(g).$$

Mera se najčešće izražava preko funkcije težine $\rho(g)$ na kartama: $\mathrm{d}\mu(g) = \rho(g)\,\mathrm{d}g$, gde je $\mathrm{d}g = \mathrm{d}g^1 \ldots \mathrm{d}g^n$ element zapremine karte u $\mathbb{R}^n$. Neka je $\rho_D(g) = \frac{\mathrm{const}}{J_D(g)}$ i $\rho_L(g) = \frac{\mathrm{const}}{J_L(g)}$, gde su J_D i J_L Jacobi-jeve determinante $J_D(g) = J(\frac{\partial(hg)^i}{\partial h^j})\mid_{h=e}$ i $J_L(g) = J(\frac{\partial(gh)^i}{\partial h^j})\mid_{h=e}$. Lako je pokazati da ovakve funkcije težine definišu desnu i levu invarijantnu meru, respektivno.

Kod kompaktnih grupa postoji *Haar-ova (invarijantna) mera*, takva da je dobijena integracija invarijantna, a zapremina grupe normirana na 1: $\int_G \mathrm{d}\mu(g) = \mu(G) = 1$. Naime, zbog invarijantnosti pozitivne forme kod algebri kompaktnih grupa, važi $\rho_D(g) = \rho_L(g)$, tj. gornjom procedurom se dobija obostrano invarijantna mera. Osim toga, pošto je grupa ograničena mnogostrukost u $\mathbb{R}^n$, integral se može normirati tako da je $\int_G \mathrm{d}\mu = 1$.

5.2 REPREZENTACIJE LIE-JEVIH GRUPA

Teorija reprezentacija Lie-jevih grupa se zasniva na vezi grupa sa Lie-jevim algebrama, budući da su za poslednje razvijeni metodi konstrukcije reprezentacija. Međutim, kako je veza jednoznačna samo u klasi prosto povezanih (tj. univerzalno natkrivajućih) grupa, na prirodan način se pojavljuje potreba za uključivanjem višeznačnih reprezentacija.

5.2.1 Reprezentacije grupe i njene algebre

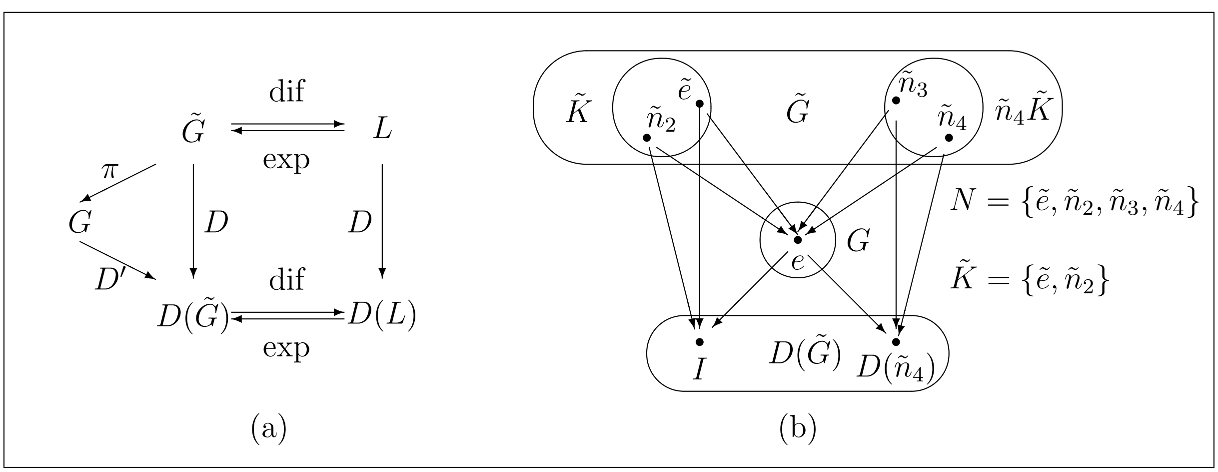
Glatkost i grupe i reprezentacije (definicija 5.2) omogućava da se konstrukcija reprezentacija zasnuje na već izloženoj teoriji reprezentacija Lie-jevih algebri, korišćenjem eksponencijalnog preslikavanja algebre. Treba uočiti da su reprezentacije operatorske, odnosno matrične grupe, tako da eksponencijalno preslikavanje na nivou reprezentacija treba uvek shvatiti u smislu običnog matričnog eksponenta.

Neka je $D(G)$ reprezentacija grupe G u vektorskom prostoru $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ dimenzije m. Jasno je da je $D(G)$ podgrupa grupe nesingularnih matrica $\mathrm{GL}(m,\mathbb{F})$. Ako je $g(t)$ jednoparametarska podgrupa u G, određena tangentnim vektorom a, zbog homomorfizma je $D(g(t))$ jednoparametarska podgrupa u grupi $D(G)$, pa i u $\mathrm{GL}(m,\mathbb{F})$. Stoga je $D(g(t)) = e^{At}$, gde je $A = \frac{\mathrm{d}D(g(t))}{\mathrm{d}t}|_{t=0}$ tangentni vektor u $I_m = D(e)$, tj. matrica iz $\mathrm{gl}(m,\mathbb{F})$. Definišući $D(a) = A$, tako da je

$$D(g(t)) = e^{D(a)t},\ D(a) = \frac{\mathrm{d}D(g(t))}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}, \tag{5.1}$$

dobija se reprezentacija algebre $D(L(G))$ u potpunosti zadata reprezentacijom $D(G)$ grupe. Pri tome se pitanje ireducibilnosti lako rešava. Ako je $\mathcal{H}'$ invarijantni potprostor za $D(G)$, prelaskom u adaptirani bazis, i diferenciranjem dobijenih matrica ove reprezentacije, dobijaju se matrice $D(L(G))$ za koje je $\mathcal{H}'$ očigledno invarijantni potprostor. Obrnuto, ako je $\mathcal{H}'$ invarijantni potprostor za $D(L(G))$, biće invarijantan i za delovanje eksponenata tih matrica, tj. i za reprezentaciju $D(G)$. To znači da je $D(L(G))$ reducibilna, odnosno ireducibilna, ako i samo ako je takva i $D(G)$.

Na ovaj način je pokazano kako svaka reprezentacija grupe daje jednu reprezentaciju algebre. Međutim, u fizici, se često postavlja obrnut problem: eksperimentalno uočeni zakoni održanja, ili neki drugi argumenti, određuju skup opservabli i njihovih komutacionih relacija, tj. reprezentaciju Lie-jeve algebre neke grupe G. Za različita razmatranja je potrebno znati reprezentaciju grupe, tj. na osnovu date reprezentacije algebre treba odrediti matrice pridružene elementima grupe. Ista pitanja otvara pokušaj da se iz poznatih ireducibilnih reprezentacija algebri (npr. poluprostih) konstruišu ireducibilne reprezentacije grupa. Razjašnjenje ovog pitanja počiva na sledećem zapažanju. Ako je G povezana Lie-jeva grupa, ona je homomorfni lik univerzalno natkrivajuće grupe $\tilde{G}$ (teorem 5.4). Svaka reprezentacija $D'(G)$ istovremeno je i reprezentacija $\tilde{G}$: homomorfizam $\tilde{G}$ na grupu $D'(G)$ uspostavlja kompozicija $D \overset{\mathrm{def}}{=} D' \circ \pi$ (slika 5.2). Kako je matrična grupa $D'(G)$ ista kao $D(\tilde{G})$, (5.1) daje istu reprezentaciju algebre $L(\tilde{G}) = L(G)$, nezavisno od toga da li je shvaćena kao algebra G ili natkrivajuće grupe. Stoga se svaka reprezentacija algebre L može pridružiti u smislu relacija (5.1) nekoj reprezentaciji univerzalno natkrivajuće grupe, tj. postoji bijektivna veza među reprezentacijama natkrivajuće grupe i algebre.



Slika 5.2: **Veza reprezentacija grupa i algebri.** *(a) Svaka reprezentacija D' grupe G je i reprezentacija $D = D' \circ \pi$ grupe $\tilde{G}$, i diferenciranjem daje reprezentaciju algebre; u suprotnom smeru, eksponenciranjem se dobija samo reprezentacija $\tilde{G}$. (b) Višeznačne reprezentacije.*

Da bi se omogućilo razmatranje reprezentacija povezanih Lie-jevih grupa preko reprezentacija njihovih algebri, ostaje da se ispita kada je reprezentacija D univerzalno natkrivajuće grupe $\tilde{G}$ istovremeno i reprezentacija lokalno izomorfne povezane grupe G. Neka je $\tilde{K} = \ker D$, i $G = \tilde{G}/N$ jedna od lokalno izomorfnih grupa iz klase univerzalno natkrivajuće grupe $\tilde{G}$. Neka je dalje $K = \tilde{K} \cap N$. Kanoničnim homomorfizmom u element $g \in G$ se preslikavaju elementi $\tilde{g}_1 N = \{\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_{|N|}\}$. Matrice ovih elemenata u reprezentaciji $D(\tilde{G})$ su $D(\tilde{g}_i), \quad i = 1, ..., |N|$, i među njima ima $m = \frac{|N|}{|K|}$ različitih, jer se koseti podgrupe $\tilde{K}$ reprezentuju istim matricama. To znači da se svakom elementu g grupe G pridružuje m različitih matrica $\{D(\tilde{g}_1), ..., D(\tilde{g}_m)\}$. Zato $D(\tilde{G})$ nije obična, već višeznačna reprezentacija grupe G. Pri tome iz $g = kh$ sledi $D(\tilde{k}_i)D(\tilde{h}_j) \in \{D(\tilde{g}_1), ..., D(\tilde{g}_m)\}$, tj. homomorfizam je zadovoljen samo do na klase od m matrica koje odgovaraju elementima grupe G. Ako je $D(\tilde{G})$ verna, ona je istovremeno $|N|$-značna reprezentacija grupe G, a samo u slučaju da je $\tilde{K} > N$ reprezentacija $D(\tilde{G})$ je prava reprezentacija grupe G.

Sada je jasno da svaka reprezentacija $D(L)$ Lie-jeve algebre L povezane grupe G određuje reprezentaciju $D(\tilde{G}) = e^{D(L)}$ univerzalno natkrivajuće grupe. Ova reprezentacija je u opštem slučaju višeznačna reprezentacija za G (kao i za ostale lokalno izomorfne grupe), a višeznačnost zavisi od odnosa jezgara $\ker D$ reprezentacije $D(\tilde{G})$ i $\ker \pi$ lokalnog izomorfizma $\pi : \tilde{G} \to G$ iz teorema 5.4. Specijalno, za prosto povezane grupe, eksponenciranje reprezentacije algebre daje pravu reprezentaciju grupe. Konačno, ako je G nepovezana grupa, eksponenciranje reprezentacija Lie-jeve algebre daje reprezentacije natkrivanja komponente jedinice, tj. grupe $\tilde{G}_e$. Ove reprezentacije su kao i do sada višeznačne reprezentacije za G_e. Sa druge strane, kako je G_e invarijantna podgrupa u G, sa diskretnom faktor grupom (teorem 5.2), za određivanje reprezentacija G je pogodan metod indukcije.

5.2.2 Unitarnost reprezentacija

Važna karakteristika kvantne teorije je da se merljive veličine izražavaju preko modula skalarnih proizvoda (matrični elementi nekih opservabli). Ovo odmah uslovljava da su simetrije sistema, tj. transformacije čijim se dejstvom sistem opservabilno ne menja, reprezentovane operatorima koji ne menjaju moduo skalarnog proizvoda. Na taj način se pokazuje da grupe simetrija moraju biti reprezentovane unitarnim (ili antiunitarnim) operatorima[2]. Zbog toga će posebno biti razmotreno pitanje unitarnosti reprezentacija Lie-jevih grupa. Unitarne reprezentacije su ili ireducibilne ili razložive na unitarne ireducibilne komponente, što dodatno olakšava njihovu klasifikaciju. U skladu sa razmatranjima prethodnog odeljka, gde je uspostavljena veza reprezentacija grupa i algebri, jasno je da unitarnost reprezentacije grupe povlači da su matrice odgovarajuće reprezentacije algebre kosohermitske. Ovo je razlog da se u fizici, da bi se elementima algebre pridružio smisao opservabli, reprezentanti algebre množe imaginarnom jedinicom.

Teorem 5.5 **(i)** *Sve ireducibilne unitarne reprezentacije Abel-ove grupe su jednodimenzionalne.*

(ii) *Kod kompaktne grupe je svaka reprezentacija ekvivalentna unitarnoj, postoji verna unitarna reprezentacija, a sve ireducibilne reprezentacije su konačno-dimenzionalne.*

[2]To je sadržaj Wigner-ovog teorema, [B6].

(iii) *Prosta, povezana, nekompaktna grupa nema, osim trivijalne, konačno-dimenzionalne unitarne reprezentacije; grupa koja je poluprosta, povezana i nekompaktna nema verne unitarne reprezentacije konačne dimenzije.*

(iv) *Prosto povezana Lie-jeva grupa G ima unitarnu ireducibilnu reprezentaciju konačne dimenzije veće od 1 ako i samo ako poluprosta podalgebra S u razlaganju Levi-Maljceva algebre $L(G)$ sadrži netrivijalan (kompaktan) ideal, koji je algebra kompaktne podgrupe u G.*

▬*Dokaz:* (i) Ovo je u stvari Schur-ova lema.
(ii) Prvi deo se dokazuje na isti način kao kod konačnih grupa, samo se svuda piše invarijantni integral umesto sume. Za drugi deo dovoljno je uočiti da je u prostoru funkcija na grupi definisana verna unitarna (regularna) reprezentacija koja sadrži sve ireducibilne.
(iii) Ako je reprezentacija verna i unitarna, onda je $D(G)$ zatvoren podskup kompaktne grupe $\mathrm{U}(n)$, pa je i $D(G)$, time i G, kompaktna grupa, što je suprotno pretpostavci. U opštem slučaju kernel reprezentacije može biti diskretna podgrupa K centra. Ako je D unitarna, onda je $D(G) \cong G/K$ kompaktan skup koseta kao i K, pa je i G kompaktna (teorem 5.1). Za drugi deo je dovoljno uočiti da je reprezentacija poluproste algebre verna reprezentacija ortokomplementa kernela u odnosu na Killing-ovu formu.
(iv) Neka je $D(G)$ unitarna reprezentacija grupe G. Unitarnost reprezentanata jednoparametarskih podgrupa znači da se elementi algebre reprezentuju kosohermitskim operatorima: $(x, y) = (D(e^{ta})x, D(e^{ta})y)$, odakle se diferenciranjem po t u $t = 0$ nalazi $(D(a)x, y) = -(x, D(a)y)$. Ovakva reprezentacija definiše invarijantnu formu $w(a, b) = -\mathrm{Tr}\,(D(a)D(b))$. Kako je $w(a, a) = -\sum \alpha_i^2$, gde su α_i svojstvene vrednosti za $D(a)$ (čisto imaginarne), $w(a, a)$ je pozitivno na ortokomplementu kernela reprezentacije. Stoga je ortokomplement kernela kompaktan ideal, koji ne može biti razrešiv, jer razrešiva algebra nema ireducibilne reprezentacije dimenzije veće od 1. Prema tome u ovom idealu mora postojati poluprost ideal, na kome je D verna ireducibilna kosohermitska reprezentacija. Ovaj ideal je algebra neke podgrupe u G koja je verno reprezentovana unitarnim operatorima, tj. kompaktna je. ▮

Činjenica da kompaktne grupe imaju vernu unitarnu reprezentaciju, pokazuje da je algebra ovakvih grupa kompaktna. Naime, tada je $D(L)$ verna kosohermitska reprezentacija i definiše pozitivnu invarijantnu formu $w(x, y) = \mathrm{Tr}\,(D(x)D(y))$. To znači da ako je u klasi lokalno izomorfnih grupa bar jedna kompaktna, zajednička Lie-jeva algebra ima to svojstvo. Iz ovoga se ne može zaključiti da su i ostale grupe kompaktne. Npr. $\mathrm{U}(1)$ je kompaktna i lokalno izomorfna natkrivajućoj aditivnoj grupi realnih brojeva, koja je nekompaktna.

5.2.3 Direktni proizvod reprezentacija

Operacije sa reprezentacijama Lie-jevih grupa se izvode na isti način kao kod konačnih grupa. Veza grupa i algebri daje nov pristup konstrukciji direktnih proizvoda reprezentacija grupa. Neka su D' i D'' dve reprezentacije grupe G u prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{H}'$. Za njihov direktni proizvod $D(G) = D'(G) \otimes D''(G)$, relacija (5.1) daje ($I'$ i I'' su odgovarajući jedinični operatori)

$$D(a) = D'(a) \otimes I'' + I' \otimes D''(a),$$

tj. $D(L) = D'(L) \otimes I'' + I' \otimes D''(L)$.

Sledi da direktnom proizvodu reprezentacija poluproste grupe G odgovara reprezentacija algebre $L(G)$ čije su težine svi mogući zbirovi težina reprezentacija $D'(L)$ i $D''(L)$. Dijagram težina reprezentacije $D(L)$ se nalazi tako što se iz svake težine dijagrama D', kao iz koordinatnog početka, u istom prostoru nacrta dijagram težina za D''. Takva tehnika je pogodna za određivanje Clebsch-Gordan-ovih serija i koeficijenata Lie-jevih grupa. Takođe se vidi da je svaka ireducibilna reprezentacija poluproste grupe ireducibilna komponenta u razlaganju direktnog proizvoda fundamentalnih reprezentacija. Naime, koristeći oznake iz § 4.3.5, jasno je da za svaku ireducibilnu reprezentaciju $[p_1, ..., p_r]$ važi

$$\underbrace{D^{[1]} \otimes ... \otimes D^{[1]}}_{p_1} \otimes ... \otimes \underbrace{D^{[r]} \otimes ... \otimes D^{[r]}}_{p_r} = [p_1, ..., p_r] \oplus ...$$

Tako skup fundamentalnih reprezentacija određuje sve ireducibilne reprezentacije poluproste grupe.

Na isti način se izvode i reprezentacije direktnog proizvoda dve poluproste grupe, samo što je po teoremu 4.7(iii) ovo sabiranje ortogonalno (algebre faktora su ortogonalni ideali).

Zadatak 5.23: Odrediti matrice reprezentacija grupa $\mathrm{SU}(2)$ i $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, dobijene eksponencijalnim preslikavanjem reprezentacija algebre $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})$ maksimalnih težina $0, \frac{1}{2}$ i 1.

Zadatak 5.24: Klasifikovati konačno-dimenzionalne ireducibilne reprezentacije grupe Lorentz-a. Odrediti spin za prvih nekoliko reprezentacija. Pokazati da grupa nema unitarne reprezentacije konačne dimenzije (uputstvo: pokazati da je $\mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$ prosta, na osnovu toga što je $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ prosta, a zatim iskoristiti teorem 5.5(iii)).

5.3 GRUPE ROTACIJA, LORENTZ-A I POINCARÉ-A

Rotaciona, $\mathrm{SU}(3)$, Lorentz-ova i Poincaré-ova grupa su Lie-jeve grupe koje se najčešće javljaju u fizičkim teorijama, i stoga će biti posebno razmotrene.

5.3.1 Grupa rotacija

Topološke osobine

Grupa rotacija trodimenzionalnog euklidskog prostora je skup svih operatora koji ne menjaju ni dužine vektora prostora (stoga ortogonalnih), ni orijentaciju bazisa (sledi da im je determinanta 1). Dakle, to je grupa $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, komponenta jedinice grupe $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$. Poslednja osim rotacija sadrži i refleksije, i važi $\mathrm{O}(3,\mathbb{R}) = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \otimes \{e, P\}$, gde je $P = -I$ prostorna inverzija. Jasno je da je u skladu sa teoremom 5.2, $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) = \{e, P\} \cong \mathbf{C}_2$.

Najčešće korišćena parametrizacija je pomoću ose i ugla rotacija. Rotacija $R_{\xi \mathrm{u}}$ za ugao ξ oko orta $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$, predstavljena je vektorom $\xi \mathrm{u} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Koordinate ovog vektora su kanonične koordinate prve vrste: rotacija za ugao $\xi = 0$ je identično preslikavanje $I_3 = e$, dok je $R_{-\xi \mathrm{u}} R_{\xi \mathrm{u}} = e$. Zato je prostor parametara, tj. grupna mnogostrukost, oblast u $\mathbb{R}^3$ data u sfernim koordinatama nejednakošću $\xi \leq \pi$; to je lopta poluprečnika π.

Odavde sledi da je $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ trodimenzionalna, povezana kompaktna grupa. Rotacije za ugao π oko ortova u i $-\mathrm{u}$ su ista transformacija pa suprotni krajevi istog prečnika ove lopte predstavljaju isti element grupe. Zbog toga postoje dve klase homotopski neekvivalentnih petlji:

(i) obične petlje: mogu se sažeti u tačku, pa su homotopski ekvivalentne nultoj petlji;

(ii) svaki put koji spaja suprotne krajeve istog prečnika je petlja (zbog uočene identifikacije ovih tačaka), koja se homotopski može preslikati u taj prečnik, ali ne i u nultu petlju.

Tako fundamentalna grupa ima dva elementa, i mora važiti $\pi_1(\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})) \cong \mathbf{C}_2$. Samim tim grupa rotacija nije univerzalno natkrivajuća grupa.

Lie-jeva algebra

Po definiciji tangentnog vektora, jednoparametarska podgrupa rotacija oko orta u se može predstaviti kao $R_{t\mathrm{u}} = e^{tr_{\mathrm{u}}}$. Eksplicitno izračunavanje matrica rotacija oko koordinatnih osa za ugao t, i njihovo diferenciranje, daje matrice $\{r_1, r_2, r_3\}$ (zadatak 4.9b), sa komutacionim relacijama: $[r_i, r_j] = \sum \varepsilon_{ijk} r_k$. Tako je jasno da je dobijena Lie-jeva algebra $\mathrm{so}(3, \mathbb{R})$, odnosno njoj izomorfna algebra $\mathrm{su}(2)$, proučena u §4.3.7.

Univerzalno natkrivajuća grupa SU(2)

Grupa SU(2) je skup svih unitarnih matrica dimenzije 2 sa jediničnom determinantom. Uslovi $UU^\dagger = I$ i $\det U = 1$ omogućuju da se proizvoljna takva matrica preko realnih parametara a, b, c i d napiše u obliku

$$U = \begin{pmatrix} a + \imath b & c + \imath d \\ -c + \imath d & a - \imath b \end{pmatrix}, \; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Vidi se da je mnogostrukost grupe SU(2) jedinična sfera S^3 u $\mathbb{R}^4$. Sledi da je SU(2) kompaktna i prosto povezana. Posledica ista dva uslova je da je Lie-jeva algebra ove grupe skup kosohermitskih matrica traga 0, su(2): ako je $U(t) = e^{tu}$ jednoparametarska podgrupa, $\det U = 1$ povlači $\mathrm{Tr}\, u = 0$ (jer je $\det U = e^{\mathrm{Tr}\,(\ln U)} = e^{\mathrm{Tr}\,(tu)}$), a $U^\dagger = U^{-1}$ daje $u^\dagger = -u$. U bazisu $\{t_1, t_2, t_3\}$ (zadatak 4.10b) dobijaju se komutacione relacije $[t_i, t_j] = \sum \varepsilon_{ijk} t_k$, tj. su(2) je izomorfna algebri $\mathrm{so}(3, \mathbb{R})$, pa su i grupe lokalno izomorfne. Prema tome, kao prosto povezana, SU(2) je univerzalno natkrivajuća grupa za $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$. Centar grupe SU(2) je $Z(\mathrm{SU}(2)) = \{I_2, -I_2\}$ (zadatak 5.12). Stoga je jasno da je $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R}) = \mathrm{SU}(2)/\{I_2, -I_2\}$, kao i da ove dve grupe (do na pravi izomorfizam) čine celu klasu lokalnog izomorfizma.

Reprezentacije grupa SU(2) i SO(3)

Grupe $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ i SU(2) su kompaktne, te su im ireducibilne reprezentacije ekvivalentne unitarnim i konačno-dimenzionalne. Dobijaju se eksponenciranjem reprezentacija algebre $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{su}(2)_{\mathbb{C}}$, koje su već nađene (§4.3.7). Karakterišu se maksimalnim težinama $S = 0, \frac{1}{2} \ldots$. Ostale težine su $S, S-1, .., -S$, i nedegenerisane su, te je dimenzija reprezentacije sa maksimalnom težinom S jednaka $2S + 1$. Reprezentacija algebre $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ sadrži podskup matrica koje reprezentuju njene realne forme, te treba naći ovaj skup za $\mathrm{so}(3, \mathbb{R})$. Očigledno je bazis realne forme $\{r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\imath}(E_+ + E_-), r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_- - E_+), r_3 = -\imath H_1\}$, i lako se proverava da će u svim reprezentacijama $\mathrm{so}(3, \mathbb{R})$ biti reprezentovana kosohermitskim operatorima, tj. da su reprezentacije $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ unitarne.

Operatori jednoparametarske podgrupe e^{tr_3} u reprezentaciji maksimalne težine S su dijagonalni, $D^{(S)}(e^{tr_3}) = \mathrm{diag}(e^{\imath St}, e^{\imath(S-1)t}, \ldots, e^{-\imath St})$, te je karakter

$$\chi^{(S)}(e^{tr_3}) = \frac{\sin(\frac{2S+1}{2}t)}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Ta jednoparametarska podgrupa odgovara rotacijama za ugao t oko ose e_3. Karakter međutim zavisi samo od ugla t, a ne i od pravca ose, tako da sve rotacije za isti ugao moraju imati isti karakter (one čine klasu konjugacije u $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$). Iz oblika matrice se odmah vidi da su reprezentacije grupe SU(2) za S celobrojno prave reprezentacije grupe $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ (jer je tada

$D^{(S)}(R(2\pi e_3)) = D^{(S)}(e^{2\pi r_3}) = I$), dok su za polucelo S to dvoznačne reprezentacije (jedinični element grupe, koji je isto što i rotacija za 2π oko neke ose, predstavlja se matricama I i $-I$).

Clebsch-Gordan-ove serije za ireducibilne reprezentacije grupe SU(2) se određuju bilo preko algebre, bilo direktno na osnovu karaktera. Kako je već objašnjeno, dijagram težina kod direktnog proizvoda reprezentacija grupa se nalazi tako što se dijagrami reprezentacija algebri sabiraju. Za $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ je dijagram težina jednodimenzionalan. Ako se na svaku težinu na dijagramu ireducibilne reprezentacije $D'(L)$ (maksimalna težina S') dodaju svi vektori sa dijagrama ireducibilne reprezentacije $D''(L)$ (maksimalna težina S''), maksimalna težina pri sabiranju je $S'+S''$. To znači da u proizvodu reprezentacija D' i D'' postoji ireducibilna reprezentacija maksimalne težine $S = S' + S''$. Među težinama proizvoda se onda moraju javiti sve težine koje pripadaju ovoj reprezentaciji: $S, S-1, \dots, -S$. Od preostalih težina na dijagramu proizvoda najveća je $S = S' + S'' - 1$. Oduzimanjem njenih težina, i ponavljanjem procedure dok se ne prebroje sve težine, nalazi se da se sve reprezentacije maksimalne težine $S = \mid S' - S'' \mid, \dots, S' + S''$ javljaju u proizvodu tačno jedanput. Time su određene sve Clebsch-Gordan-ove serije grupe $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, odnosno njene univerzalno natkrivajuće grupe SU(2):

$$D^{(S)} \otimes D^{(S')} = \oplus_{S''=|S-S'|}^{S+S'} D^{(S'')}.$$

Ova relacija, zbog identifikacije generatora rotacione grupe sa angularnim momentima, pokazuje način slaganja angularnih momenata u kompozitnim kvantnim sistemima.

5.3.2 Grupa SU(3)

Standardna teorija reprezentacija ove grupe je ranije proučena, a specifična tehnika rada sa reprezentacijama svih grupa SU(n) je razrađena u dodatku A. Zato ovaj odeljak samo rezimira osnovna topološka svojstva grupe SU(3). To je osmoparametarska grupa unitarnih trodimenzionalnih matrica sa jediničnom determinantom. Kompaktna je, povezana i prosto povezana (zadatak 5.10); centar joj je $Z(\mathrm{SU}(3)) = \{e^{\frac{2\pi\imath}{3}k} \mid k = 0,1,2\} \cong \mathbf{C}_3$. Tako klasa lokalno izomorfnih grupa kojoj SU(3) pripada kao univerzalno natkrivajuća, sadrži još samo grupu $\mathrm{SU}(3)/\mathbf{C}_3$.

5.3.3 Lorentz-ova grupa

Topološke osobine

Proširenu grupu Lorentz-a, $\mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})$, čine sve ortogonalne transformacije prostora Minkowskog, tj. sve transformacije koje ne menjaju *interval*

$$s(x,y)^2 = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 \tag{5.2}$$

među proizvoljnim tačkama x i y. Preciznije, to je skup svih matrica A za koje je $A^T M A = M$, gde je $M = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

Ova grupa ima četiri komponente povezanosti: L, TL, PL i PTL, gde je komponenta jedinice L podgrupa matrica sa determinantom 1 i pozitivnim elementom a_{00}, $T = -M$ (vremenska inverzija), $P = M$ (prostorna inverzija) i $PT = -I$ (totalna inverzija). Pri tome je $\mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})/L \cong \mathbf{D}_2$. Grupa L se naziva Lorentz-ova grupa[3]. Grupa je nekompaktna i prosta (zadatak 5.6), te

[3] Ponekad se pod ovim terminom podrazumeva $\mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})$, u kom slučaju se za L koristi naziv prava Lorentz-ova grupa.

nema konačno-dimenzionalne ireducibilne unitarne verne reprezentacije. Grupa $\mathrm{SO}(1,3,\mathbb{R})$ je nepovezana unija L i PTL.

Skup svih matrica oblika $\mathrm{diag}(1,A)$, gde je A iz $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ opisuje sve rotacije, te je $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ podgrupa Lorentz-ove grupe. Neka je N neka dvodimenzionalna ravan u prostoru Minkowskog koja sadrži ort e_0. Lorentz-ove transformacije koje ovu ravan ostavljaju invarijantnom, a u ortokomplementu (u odnosu na standardni skalarni proizvod) deluju kao jedinični operator, čine jednoparametarsku podgrupu *boost-ova*. U bazisu $\{e_0,n,u,v\}$ adaptiranom na ovu dekompoziciju, matrica proizvoljnog elementa ove podgrupe ima oblik

$$B(\theta)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0 & 0\\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma & \beta\Gamma & 0 & 0\\ \beta\Gamma & \Gamma & 0 & 0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \theta\in(-\infty,\infty),\Gamma=\operatorname{ch}\theta,\beta=\operatorname{th}\theta.$$

***Zadatak 5.25**:* Dokazati da se svaka Lorentz-ova transformacija A može jednoznačno napisati u obliku $A=BR$, gde je B boost, a R rotacija.

***Zadatak 5.26**:* Odrediti matricu boost-a u pravcu $n=(n_x,n_y,n_z)$ za brzinu $-\beta$ (tj. matricu prelaska iz sistema čestice koja se kreće brzinom $\beta(n_x,n_y,n_z)$ u "nepokretni" sistem), a zatim razmotriti slučaj kada $\beta\to 0$.

Lie-jeva algebra

Kako je komponenta jedinice grupa $\mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})$ i $\mathrm{SO}(1,3,\mathbb{R})$ upravo L, sve imaju istu Lie-jevu algebru, $\mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$. Ona je izomorfna Lie-jevoj algebri $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ (zadatak 4.21c), grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, pa su ove grupe lokalno izomorfne. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ je prosto povezana grupa i univerzalno je natkrivajuća za L. U stvari, centar grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ je grupa $\mathbf{C}_2=\{I_2,-I_2\}$, a homomorfizam sa $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ na L ima upravo ovaj kernel (zadatak 5.14). Prema tome $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ dvostruko natkriva L, i zbog toga je $\pi_1(L)=\mathbf{C}_2$ (naime $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sadrži podgrupu $\mathrm{SU}(2)$, koja natkriva podgrupu $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ iz L). Pošto je algebra $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ prosta, takva je i $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$, odakle sledi da su i grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ i L proste.

Konačno-dimenzionalne reprezentacije Lorentz-ove grupe

Pošto je $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ algebra Lorentz-ove grupe, konačno-dimenzionalne reprezentacije se nalaze eksponenciranjem reprezentacija kompleksifikovane algebre $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$. Jedan bazis u $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ je $\{t_1,t_2,t_3\}$, sa poznatim komutacionim relacijama $[t_i,t_j]=\sum\varepsilon_{ijk}t_k$ ($\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ je izomorfna sa $\mathrm{so}(3,\mathbb{C})$). U bazisu dekompleksifikacije $\{t_1,t_1'=\imath t_1,\dots,t_3,t_3'=\imath t_3\}$ algebre $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ važi $[t_i,t_j]=\sum\varepsilon_{ijk}t_k=-[t_i',t_j']$, $[t_i,t_j']=\sum\varepsilon_{ijk}t_k'$. Kompleksnim kombinacijama ovog bazisa, koje su dozvoljene u algebri $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$, dobija se bazis $\{u_i=\frac{1}{2}(t_i+\imath t_i'),v_i=\frac{1}{2}(t_i-\imath t_i')\mid i=1,2,3\}$ takav da je $[u_i,u_j]=\sum\varepsilon_{ijk}u_k$, $[v_i,v_j]=\sum\varepsilon_{ijk}v_k$, $[u_i,v_j]=0$. Ovo znači da je $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ direktni zbir dve $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ algebre (zadatak 4.21). Njen rang je stoga 2, a prosti koreni su međusobno ortogonalni.

Maksimalne težine su kolone $(M,M')^T$, gde su M i M' maksimalne težine za $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. Fundamentalne reprezentacije su $(M=\frac{1}{2},M'=0)^T$ i $(M=0,M'=\frac{1}{2})^T$, i međusobno su konjugovane (*spinorska* i *antispinorska* reprezentacija). Reprezentacija (M,M') je direktni proizvod reprezentacija maksimalne težine M, za podalgebru generisanu elementima u_i, i M', za podalgebru nad v_i; dimenzija joj je $(2M+1)(2M'+1)$. Na ovaj način su dobijene konačno-dimenzionalne reprezentacije za $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$, pa time i za $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Treba zapaziti da $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ nije direktni zbir $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})\oplus\mathrm{so}(3,\mathbb{R})$, jer je bazis $\{u_i, v_i \mid i=1,2,3\}$ formiran kompleksnim kombinacijama elemenata iz $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Stoga dobijene reprezentacije L i $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ nisu unitarne, što se moralo očekivati jer grupe nisu kompaktne (podalgebra generisana sa t_i odgovara rotacijama i one su unitarno reprezentovane). Jasno, dobijene reprezentacije su dvoznačne za L ako je $M+M'$ polucelo. Iz $t_3=u_3+v_3$ (Cartan-ovi vektori za $\mathrm{so}(3,\mathbb{R})$ i dve algebre $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$), sledi da reprezentacija (M,M') grupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ subdukuje na $\mathrm{SU}(2)$ sve reprezentacije maksimalne težine S (spin) u intervalu $\mid M-M'\mid\leq S\leq M+M'$.

5.3.4 Poincaré-ova grupa

Topološke osobine

Proširena Poincaré-ova grupa, Π', je skup svih transformacija prostora Minkowskog koje ostavljaju neizmenjen interval (5.2). Takve su ortogonalne transformacije Lorentz-ove grupe, ali i četvorodimenzionalne translacije. Element grupe Π' je par $(A|a)$, gde je A element $\mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})$, a a vektor za koji se vrši translacija. Njegovo dejstvo na proizvoljni vektor x prostora Minkowskog je:

$$(A|a)x = Ax + a.$$

Odavde se nalazi proizvod dva elementa $(A|a)(A'|a')=(AA'|Aa'+a)$, na osnovu čega je $(A|a)^{-1}=(A^{-1}|-A^{-1}a)$ i $e=(I|0)$. Skupovi $\mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})=\{(A|0)\mid A\in L\}$ i $T^4=\{(I|a)\mid a\in\mathbb{R}^4\}$ su podgrupe ortogonalnih transformacija i četvorodimenzionalnih translacija, i pri tome je: $\Pi'=T^4\wedge\mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})$.

Pošto je T^4 prosto povezana, nekompaktna Abel-ova grupa, a $\mathrm{O}(1,3,\mathbb{R})$ nepovezana, nekompaktna grupa, Π' je nepovezana, nekompaktna grupa, koja nije poluprosta. Njena komponenta jedinice $\Pi=T^4\wedge L$, (prava) Poincaré-ova grupa, je $\mathbf{C}_2$-povezana, nekompaktna grupa, koja zbog Abel-ove invarijantne podgrupe T^4 takođe nije poluprosta. Ostale komponente povezanosti se nalaze kao i kod proširene Lorentz-ove grupe, preko vremenske, prostorne i totalne inverzije. Π je dimenzije 10 (4 parametra translacije i 6 iz L), i njena univerzalno natkrivajuća grupa je $\tilde{\Pi}=T^4\wedge\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Lie-jeva algebra grupe Π je $\pi=t^4\wedge\mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$, i pošto je $\mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$ prosta, a t^4 Abel-ova, ovo je forma Levi-Maljceva (teorem 4.2).

***Zadatak 5.27**:* U prostoru kompleksnih funkcija na $\mathbb{R}^4$ za koordinatnu reprezentaciju (zadatak 3.36) Poincaré-ove grupe, $D(A|a)f(x)\stackrel{\mathrm{def}}{=}f((A|a)^{-1}x)$, odrediti operatore koji reprezentuju generatore bazisnih translacija, rotacija i boost-ova.

Klasifikacija unitarnih ireducibilnih reprezentacija

Grupa Π nije kompaktna, a $\mathrm{SO}(1,3,\mathbb{R})$ je nekompaktna i prosta, te faktor $S=\mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$ u razlaganju Levi-Maljceva ne sadrži kompaktne ideale. Po teoremu 5.5. sve netrivijalne unitarne ireducibilne reprezentacije Poincaré-ove grupe su beskonačno-dimenzionalne. Okolnost da je Π semidirektni proizvod Abel-ove i poluproste grupe, omogućuje da se ostvari tražena klasifikacija reprezentacija metodom indukcije.

Prvo je potrebno naći ireducibilne reprezentacije grupe T^4. Ona je direktni proizvod $T^1_0\otimes T^1_1\otimes T^1_2\otimes T^1_3$ grupa translacija duž osa prostora Minkowskog. Unitarne ireducibilne reprezentacije

Abel-ovih faktora T_i^1 su jednodimenzionalne: $d^{(p_i)}(b_i) = e^{\imath p_i b_i}$ (sa b_i je obeležena jednodimenzionalna translacija $x \mapsto x + b_i$), gde je p_i proizvoljan realan broj. Reprezentacije T^4 su stoga direktni proizvodi ovakvih reprezentacija i karakterišu se 4-dimenzionalnim vektorom p:

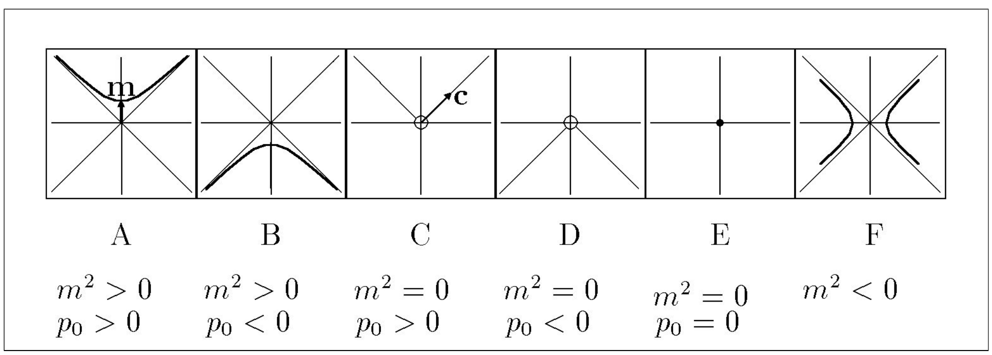
$$\Delta^{(p)}(I|b) = e^{\imath pb} \quad (pb = p^T M b = p_0 b_0 - p_1 b_1 - p_2 b_2 - p_3 b_3).$$

Ovim su obuhvaćene sve reprezentacije direktnog proizvoda, a razlog za izbor ovakvog zapisa će ubrzo postati jasan. Očigledno, skup unitarnih ireducibilnih reprezentacija grupe T^4 je $\mathbb{R}^4$.

Orbite s-konjugacije (elementima $(A|a)$ grupe Π) u dobijenom skupu reprezentacija podgrupe T^4 određuju se na osnovu lako proverljive relacije:

$$\Delta^{(p)}_{(A|a)}(I|b) = \Delta^{(p)}(I|A^{-1}b) = \Delta^{(Ap)}(I|b). \tag{5.3}$$

Odavde sledi da se u istoj orbiti nalaze sve reprezentacije koje se mogu dobiti iz vektora p delovanjem cele grupe L. Elementi L ne menjaju interval, pa su orbite povezani skupovi reprezentacija sa istim $p^2 = p^T M p = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$. Stoga realni broj m, takav da je $m^2 = p^2$, potpuno karakteriše orbitu, i u zavisnosti od njegove vrednosti dobijaju se orbite sa slike 5.3. Za fiziku su od značaja samo orbite A ($m > 0, p_0 > 0$) i C ($m = 0, p_0 > 0$), koje daju reprezentacije za masene i bezmasene čestice pozitivne energije. Stoga će samo one biti razmatrane.



Slika 5.3: **Orbite reprezentacija grupe T^4 pri dejstvu Poincaré-ove grupe.** *Dat je presek u ravni p_0p_3, pri čemu je osa p_0 usmerena naviše, a p_3 nadesno. Cele orbite se dobijaju delovanjem prostornih rotacija na ove preseke, tj. ortogonalnim transformacijama koje ostavljaju p_0-osu invarijantnom. Kod fizički značajnih orbita A i C, pokazani su predstavnici orbita* $\mathbf{m} = (m, 0, 0, 0)^T$ *i* $\mathbf{c} = (1, 0, 0, 1)^T$.

Sledeći korak u indukciji je određivanje malih grupa za A i C. Jedan predstavnik orbite A za dato m je $\mathbf{m} = (m, 0, 0, 0)^T$. Ovaj vektor je invarijantan pod delovanjem svih rotacija iz L. Zato je mala grupa ove reprezentacije $T^4 \wedge \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, sa univerzalno natkrivajućom grupom $T^4 \wedge \mathrm{SU}(2)$. Predstavnik orbite C je $\mathbf{c} = (1, 0, 0, 1)^T$; mala grupa ove reprezentacije je grupa $T^4 \wedge E(2, \mathbb{R})$ ($E(2, \mathbb{R})$ je Euklidova grupa translacija i rotacija u ravni). Da je $E(2, \mathbb{R})$ podgrupa u L koja ostavlja $\mathbf{c}$ invarijantnim, najjednostavnije se vidi razmatranjem odgovarajuće Lie-jeve algebre (faktor T^4 sledi iz opšte teorije indukcije). Bazis algebre Lorentz-ove grupe su generatori rotacija i boost-ova $\{r_i, b_i \mid i = 1, 2, 3\}$ (zadatak 4.9c), i svi elementi algebre su linearne kombinacije ovih matrica. Pri tome samo podalgebra obrazovana matricama r_3, $q_1 = r_1 + b_2$ i $q_2 = r_2 - b_1$ anulira vektor $\mathbf{c}$, što znači da će eksponenti ovih matrica ostaviti vektor $\mathbf{c}$ nepromenjenim i obrazovati malu grupu. Komutacione relacije ove algebre su $[r_3, q_1] = q_2$, $[r_3, q_2] = -q_1$, $[q_1, q_2] = 0$. Lako se vidi da je to Lie-jeva algebra grupe $E(2, \mathbb{R})$ (zadatak 5.21).

Preostalo je nalaženje ireducibilnih reprezentacija malih grupa. Kao što je pokazano u teoriji indukcije, potrebno je odrediti ireducibilne reprezentacije grupa SU(2) i $E(2, \mathbb{R})$. Za grupu SU(2) problem je već ranije rešen, i nađene su reprezentacije maksimalne težine $S = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ Reprezentacije $E(2, \mathbb{R})$, odnosno njene dvostruko natkrivajuće grupe $T^2 \wedge \mathrm{SO}'(2, \mathbb{R})$ mogu se dobiti ponovo indukcijom[4]. U punoj analogiji sa onim što je rečeno za celu Poincaré-ovu grupu, skup reprezentacija grupe T^2 je $\mathbb{R}^2$, a orbite su kružnice sa centrom u koordinatnom početku. Za fiziku je od interesa samo nulta orbita — koordinatni početak (ostale orbite bi dovele do pojave beskonačnog spina). Mala grupa ove orbite je cela grupa $T^2 \wedge \mathrm{SO}'(2, \mathbb{R})$. To je Abel-ova grupa čije se reprezentacije lako nalaze: $D^{(S)}(t) = e^{\imath St}, \quad S = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \ldots$

Konačno, mogu se klasifikovati sve unitarne ireducibilne reprezentacije Poincaré-ove grupe. Karakterišu se parom (m, S). Nenegativni broj m prebrojava orbite i za orbite A je $m > 0$, a za orbitu C je $m = 0$. Celi ili poluceli broj S je za $m = 0$ jedina težina podgrupe $\mathrm{SO}'(2, \mathbb{R})$, dok je za $m > 0$ nenegativan, i predstavlja maksimalnu težinu podgrupe SU(2), pa su u reprezentaciji i sve težine $S, \ldots, -S$.

Prostorna inverzija je česta simetrija fizičkih sistema, te je potrebno razmotriti reprezentacije grupe $\Pi + P\Pi$. Za konstrukciju ireducibilnih reprezentacija ove grupe primenjuje se metod indukcije sa podgrupe indeksa dva na upravo klasifikovane reprezentacije Poincaré-ove grupe. Predstavnik orbite A se pri prostornoj inverziji preslikava sam u sebe, i svaka reprezentacija $(m > 0, S)$ je samo-P-konjugovana. Zato indukcija daje dve reprezentacije, *parnu* $(m, S, +)$ i *neparnu* $(m, S, -)$ grupe $\Pi + P\Pi$. U slučaju $m = 0$ je $Pc = (1, 0, 0, -1)$. Odavde sledi da se operator koji odgovara rotaciji za ugao φ oko ose z, P-konjugacijom preslikava u rotaciju za isti ugao oko ose $-z$, odnosno u rotaciju za ugao $-\varphi$ oko ose z. Drugim rečima, orbite P-konjugacije su parovi $\pm S$, osim za $S = 0$, kada je reprezentacija samokonjugovana. Konačni zaključak je da grupa $\Pi + P\Pi$ ima reprezentacije

$$\{(m, S, \pm) \mid m > 0, S = 0, \frac{1}{2}, 1 \ldots\}, \quad (m = 0, S = 0, \pm), \quad \{(m = 0, S) \mid S = \frac{1}{2}, 1 \ldots\}.$$

Kod prvo navedenih reprezentacija projekcije spina uzimaju sve vrednosti $S, S-1, \ldots, -S$, a u slučaju $m = 0$ samo S i $-S$.

Fizičke posledice

Postulat relativnosti je da je Π grupa simetrije svih fizičkih sistema. Kako kvantna teorija stanja fizičkih sistema opisuje vektorima prostora stanja, invarijantnost opservabilnih fenomena pod transformacijama Poincaré-ove grupe znači da u prostoru stanja deluje neka unitarna reprezentacija grupe Π. Kada bi Poincaré-ova grupa potpuno opisivala simetrije sistema, tj. kada ne

[4] Univerzalno natkrivajuća grupa za $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ je $\mathbb{R}^1$ (zadatak 5.8); kako je $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ topološki kružnica S^1, njena fundamentalna grupa je aditivna grupa celih brojeva. No, pošto se sve vreme gleda univerzalno natkrivajuća grupa za $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, koja je dvostruko natkriva, i sada se mora tražiti dvostruko natkrivanje, tj. podgrupa u SU(2) koja natkriva rotacije oko z ose. To je skup matrica $\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$, koji je dvostruko - ne i univerzalno - natkrivanje $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$.

bi postojale nikakve druge simetrije, klasifikacija njenih ireducibilnih unitarnih reprezentacija bi bila klasifikacija različitih osnovnih fizičkih sistema, *elementarnih čestica*. Dopunska fizička razmatranja pokazuju da je totalna Lie-jeva grupa simetrije svakog fizičkog sistema direktni proizvod grupe Π i neke konačno-dimenzionalne kompaktne grupe (Colleman-Mandula-in teorem): $G = \Pi \otimes C$. Poslednja se naziva *grupa unutrašnjih simetrija* i u različitim fizičkim teorijama se koriste $\mathrm{U}(1), \mathrm{SU}(2), \mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{SU}(2), \mathrm{SU}(3)$, kao i neke druge.

Teorem Colleman-Mandula-e pokazuje da su ireducibilne reprezentacije grupe G direktni proizvodi ireducibilnih reprezentacija Π i C, tj. da su karakterisane parom (m, S) i dodatnom oznakom μ reprezentacije grupe C. m se identifikuje sa *masom*, a indeks S sa *spinom*, odnosno *helicitetom* za $m = 0$. Naime, izbor predstavnika orbita A odgovara referentnom sistemu vezanom za česticu, tj. sistemu u kome čestica miruje. U tom slučaju je ukupni angularni moment jednak spinu, a $m^2 = p_0^2$ odgovara kvadratu mase mirovanja čestice (pomnoženoj kvadratom brzine svetlosti). Slično, za orbitu C važi da je r_3 projekcija angularnog momenta na pravac kretanja čestice, i ova veličina se naziva *helicitet*. Tako su masa i spin, kao posledica postulata relativnosti, tj. simetrije prostor-vremena, karakteristike elementarnih čestica: one kod kojih je S celobrojno nazivaju se *bozon*, a one kod kojih to nije slučaj *fermion*. Zbog nekompaktnosti Π, fizički relevantne unitarne ireducibilne reprezentacije G su beskonačno-dimenzionalne, te elementarne čestice mogu biti opisane samo u beskonačno-dimenzionalnim prostorima stanja.

Sa druge strane kompaktnost C dozvoljava konačno-dimenzionalne ireducibilne reprezentacije $D^{(\mu)}(C)$ ove grupe, tako da se za isto (m, S, μ) nalazi standardni bazis $\mid \mu i\rangle$ $(i = 1, \ldots, n_\mu)$ u prostoru reprezentacije $D^{(\mu)}(C)$. Svaki ovakav vektor se pridružuje jednoj čestici, čime (m, S, μ) određuje tzv. *multiplet* elementarnih čestica. Na primer, reprezentacije grupe Π protona i neutrona su $(m_p, \frac{1}{2})$ i $(m_n, \frac{1}{2})$; sličnost njihovih masa dozvoljava da se shvate kao multiplet grupe $\Pi \otimes C$, gde je $C = \mathrm{SU}(2)$ grupa unutrašnje simetrije *izospina*. Pri tome je $\mu = \frac{1}{2}$ (maksimalna težina dvodimenzionalne reprezentacije), i multiplet se može označiti sa $(m = m_p = m_n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Standardni bazis reprezentacije $D^{(\frac{1}{2})}(\mathrm{SU}(2))$ je zadat težinama $\pm\frac{1}{2}$; obično se proton pridružuje pozitivnoj, a neutron negativnoj težini.

Jasno je da sve čestice istog multipleta imaju isti spin. U tom smislu teorem Colleman-Mandula-e postaje teorem zabrane ("no-go"-teorem), pokazujući da fizičke teorije u kojima je simetrija opisana isključivo Lie-jevim grupama, ne mogu čestice različitog spina objediniti u isti multiplet. To je dovelo do preispitivanja polaznih ideja u samoj koncepciji primene simetrije u fizici. Dublja analiza ograničenja koja nameće struktura mnogostrukosti na grupu, pokazuje da za neka od njih nema fizičkih razloga. Samim tim može se u definiciji Lie-jeve grupe mnogostrukost zameniti nešto drugačijom strukturom, i tako otkloniti matematički uzrok pomenute zabrane (fizički nije ni postojao). U fizici elementarnih čestica se to čini tako da algebarska struktura grupe ostane nepromenjena, dok se topološka menja time što se neke od koordinata grupne mnogostrukosti opisuju *Grassmann-ovim brojevima* (međusobno antikomutiraju, a komutiraju sa običnim realnim brojevima). Na taj način se, zadržavajući pogodnosti rada sa Lie-jevim grupama, te i fizički potvrđene rezultate takve koncepcije, dolazi do pojma *supergrupe* i *supersimetrije*.

Dodatak A

IREDUCIBILNE REPREZENTACIJE GRUPA $\mathrm{SU}(n)$

U ovom dodatku će biti razrađen jedan metod za konstrukciju ireducibilnih reprezentacija grupa $\mathrm{SU}(n)$. Metod bazira na vezi reprezentacija permutacione grupe sa ireducibilnim komponentama direktnog stepena neke fundamentalne reprezentacije grupe $\mathrm{SU}(n)$. Sa malim izmenama primenljiv je na sve grupe čije su algebre date Dynkin-ovim dijagramima [C7].

A.1 Reprezentacije grupa S_m

Metod klasifikacije ireducibilnih reprezentacija permutacionih grupa, skiciran u ovom odeljku, može se koristiti i za druge informacije o ovim reprezentacijama; npr. moguće je odrediti matrične elemente ili Clebsch-Gordan-ove serije [B3].

Poznato je da u grupi S_m jednu klasu konjugacije čine sve permutacije sa istom cikličnom strukturom. Pri tome svaka particija $(m_1, ..., m_k)$ broja m na prirodne brojeve $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_k$, takve da je $m_1 + ... + m_k = m$, definiše cikličnu strukturu

$$(m_1, ..., m_k) = (\leftarrow m_1 \rightarrow)(\leftarrow m_2 \rightarrow)...(\leftarrow m_k \rightarrow).$$

Drugim rečima, svaka particija obostrano jednoznačno određuje jednu klasu konjugacije grupe S_m. *Young-ova šema* particije $(m_1, ..., m_k)$ je šema sa k vrsta, pri čemu se i-ta vrsta sastoji iz m_i kvadrata:

$$\begin{array}{l} \overbrace{\square\square\square\cdots\square\square\square}^{m_1} \\ \square\square\square\cdots\square\square \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{\square\square\square\cdots\square}_{m_k} \end{array} .$$

Očigledna je obostrano jednoznačna veza Young-ovih šema sa m kvadrata i particija broja m, odnosno klasa konjugacije grupe S_m. Poznata činjenica da je broj klasa konjugacije konačne grupe jednak broju njenih ireducibilnih reprezentacija, sugeriše mogućnost klasifikacije ireducibilnih reprezentacija grupe S_m pomoću Young-ovih šema.

Neka je $\mathcal{H}$ vektorski prostor dimenzije d, sa bazisom $\{| \, i\rangle \mid i = 1, ..., d\}$. U prostoru $\mathcal{H}^m = \underbrace{\mathcal{H} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}}_{m}$, dejstvom na vektore nekorelisanog bazisa (zadatak 3.38)

$$\{| \, i_1, \dots, i_m\rangle = | \, i_1\rangle \otimes \cdots \otimes | \, i_m\rangle \mid i_1, \dots, i_m = 1, ..., d\}, \tag{A.1}$$

definiše se operator $\Delta(\pi)$ pridružen permutaciji π iz S_m:

$$\Delta(\pi) \mid i_1, \dots, i_m\rangle = | \, i_{\pi^{-1}1}, \dots, i_{\pi^{-1}m}\rangle.$$

Lako se proverava da je skup $\Delta(S_m)$ svih takvih operatora reprezentacija grupe S_m.

Reprezentacija $\Delta(\pi)$ nije u opštem slučaju ireducibilna i, da bi se razložila, potrebno je odrediti različite invarijantne potprostore. Kao i uvek, lineal nad skupom koji se dobija delovanjem svih operatora reprezentacije na proizvoljni vektor je jedan invarijantni potprostor. Neka je $v = | \, 1, \dots, m\rangle$; odgovarajući invarijantni potprostor $\mathcal{M}$ obrazovan je vektorima $| \, i_1, \dots, i_m\rangle$, gde su brojevi i_k međusobno različiti i uzimaju vrednosti od 1 do m.

Young-ova šema particije $(m_1, ..., m_k)$, može se popuniti brojevima $1, \dots, m$ na sledeći način:

$$\begin{array}{l}
\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\cdots\boxed{}\boxed{}\boxed{m_1} \\
\boxed{}\boxed{}\boxed{}\cdots\boxed{}\boxed{}\ (m_1 + m_2) \\
\boxed{}\boxed{}\boxed{}\cdots\boxed{m}
\end{array} \quad .$$

Koristeći ovako popunjenu šemu mogu se konstruisati operatori koji daju invarijantne potprostore reprezentacije $\Delta(S_m)$. Neka je σ_i proizvoljna permutacija koja permutuje samo brojeve iz i-te vrste (ostale ostavlja invarijantnim) i $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$. *Simetrizator* šeme je operator $S = \sum_\sigma \Delta(\sigma)$ (sumiranje se vrši po svim opisanim permutacijama). Slično, neka je α_i proizvoljna permutacija koja permutuje samo brojeve iz i-te kolone (ostale ostavlja invarijantnim) i $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_k$. *Antisimetrizator* šeme je operator $A = \sum_\alpha (-1)^\alpha \Delta(\alpha)$ ($(-1)^\alpha$ označava parnost permutacije α). Očigledno je da su operatori S i A potpuno određeni Young-ovom šemom, kao i operator AS. Pokazuje se da ovaj operator ima samo jednu nenultu svojstvenu vrednost. Presek odgovarajućeg svojstvenog potprostora i $\mathcal{M}$ je ireducibilni invarijantni potprostor grupe S_m. Prema tome, svaka Young-ova šema jednoznačno određuje jednu ireducibilnu reprezentaciju grupe S_m. Različite šeme daju neekvivalentne reprezentacije. U slučaju da šema ima jednu vrstu, važi $A = I$, i odgovarajuća reprezentacija se naziva simetrična. Analogno, kada je šema jedna kolona, tada je $S = I$ i dobija se antisimetrična reprezentacija.

A.2 Razlaganje direktnog stepena reprezentacije

Neka je $D(G)$ reprezentacija grupe G u d-dimenzionalnom prostoru $\mathcal{H}$, a $D_{ij}(g)$ njeni matrični elementi u bazisu $\{| \, i\rangle \mid i = 1, \dots, d\}$. U prostoru $\mathcal{H}^m$ deluje m-ti direktni stepen ove reprezentacije (§ 3.3.3), tj. reprezentacija $D^m(g)$, čiji operatori u nekorelisanom bazisu (A.1) imaju matrične elemente $D^m_{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_m}(g) = D_{i_1 j_1}(g) \cdots D_{i_m j_m}(g)$. U istom prostoru je, na način opisan u prethodnom odeljku, definisana reprezentacija $\Delta(S_m)$ grupe S_m. Ranije razmotrenu vezu jednodimenzionalnih ireducibilnih reprezentacija permutacione grupe i stepena reprezentacije proizvoljne grupe uopštava

Teorem A.1 *Neka je $\Delta(S_m) = \sum_{\lambda=1}^{q} a_\lambda \Delta^{(\lambda)}(S_m)$ razlaganje $\Delta(S_m)$ na ireducibilne komponente, i $\{\mid \lambda t_\lambda l\rangle \mid \lambda = 1, \dots, q; t_\lambda = 1, \dots, a_\lambda; l = 1, \dots, d_\lambda\}$ standardni bazis (§ 3.3.1) ovog razlaganja. Potprostori $\mathcal{H}_l^{(\lambda)} = \mathrm{span}\,(\{\mid \lambda t_\lambda l\rangle \mid t_\lambda = 1, \dots, a_\lambda\})$ su invarijantni potprostori reprezentacije $D^m(G)$, i za isto λ i različito l definišu međusobno ekvivalentne redukovane reprezentacije grupe G.*

Dokaz: Pokazano je (zadatak 3.54) da operatori $D^m(g)$ komutiraju sa operatorima koji reprezentuju permutacije. Stoga, operatori $D^m(g)$ komutiraju i sa svim operatorima $P_{lk}^{(\lambda)}(\Delta) = \frac{|\lambda|}{m!}\sum_\pi \Delta_{lk}^{(\lambda)}(\pi)\Delta(\pi)$. Posebno, operator $P_{ll}^{(\lambda)}$ je projektor na potprostor $\mathcal{H}_l^{(\lambda)}$, koji je zato invarijantan za sve operatore reprezentacije $D^m(G)$ (svojstveni potprostori operatora su invarijantni za sve operatore koji komutiraju sa njim). Ekvivalentnost redukovanih reprezentacija za različito l, se lako proverava upoređivanjem karaktera reprezentacija $P_{ll}^{(\lambda)} D^m(G)$ i $P_{11}^{(\lambda)} D^m(G)$. ∎

To znači da su redukovane reprezentacije u prostorima $\mathcal{H}_l^{(\lambda)}$ jednoznačno određene indeksom λ ireducibilne reprezentacije grupe S_m, pa će biti označene sa $D^{(\lambda)}(G)$. U opštem slučaju ovo nije ireducibilna reprezentacija grupe G (indeks λ ne prebrojava ireducibilne reprezentacije grupe G, već grupe S_m). Delovanje ovih operatora na standardni bazis je: $D^{(\lambda)}(g) \mid \lambda t_\lambda l\rangle = \sum_{s_\lambda} D_{s_\lambda t_\lambda}^{(\lambda)}(g) \mid \lambda s_\lambda l\rangle$.

Prema tome, reprezentacija $D^m(G)$ se razlaže na reprezentacije koje odgovaraju različitim Young-ovim šemama. Jasno je da se u ovom razlaganju ne javljaju reprezentacije sa više od d vrsta u odgovarajućoj šemi, jer se antisimetrizacijom linearno zavisnih vektora dobija nulti vektor, tj. odgovarajući antisimetrizator 0. Takođe je jasno da se u razlaganju uvek nalazi i potpuno simetrična reprezentacija (npr. lineal nad vektorom $\mid 1\rangle \otimes \cdots \otimes \mid 1\rangle$).

A.3 Veza reprezentacija grupa SU(n) i S_m

Grupe SU(n) su prosto povezane, kompaktne, proste grupe, tako da su im sve ireducibilne reprezentacije konačno-dimenzionalne i ekvivalentne unitarnim, a ima ih prebrojivo mnogo. Stoga se mogu naći metodom opisanim u odeljku 4.3.5. Algebra su(n) je realna forma algebre sl($n, \mathbb{C}$), i pri tome je sama jedna od svojih $n-1$ fundamentalnih reprezentacija. Ispostavlja se da se pri redukciji zbira više težinskih dijagrama ove reprezentacije pojavljuju sve fundamentalne reprezentacije, što znači da se razlaganjem direktnih stepena identične reprezentacije grupe SU(n) dobijaju sve ireducibilne reprezentacije ove grupe.

U prethodnim odeljcima je pokazano da je redukcija stepena $D^m(G)$ svake reprezentacije grupe G povezana sa redukcijom reprezentacije $\Delta(S_m)$. Ovaj metod je posebno pogodan za identičnu reprezentaciju grupa SU(n), jer se pokazuje da je svaka redukovana reprezentacija $D^{(\lambda)}(\mathrm{SU}(n))$ ireducibilna za svako λ i svako m.

To znači da se svaka ireducibilna reprezentacija grupe SU(n) javlja pri redukciji reprezentacije $\mathrm{SU}(n)^m$ (direktni stepen identične reprezentacije matrične grupe SU(n)) za neko m, te joj se jednoznačno pridružuje Young-ova šema sa m kvadrata, koja odgovara nekoj ireducibilnoj reprezentaciji grupe S_m. Pošto SU(n) deluje u n-dimenzionalnom prostoru, sve pridružene Young-ove šeme imaju najviše n-vrsta (odgovarajući antisimetrizator je 0 za $k > n$), bez obzira što ukupan broj kvadrata nije ograničen. Očigledno, samoj identičnoj reprezentaciji $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{SU}(n)^1$ odgovara šema sa jednim kvadratom. Osim toga, šema sa jednom kolonom od n kvadrata odgovara potpunoj antisimetrizaciji, te je u $\mathcal{H}^n$ taj potprostor jednodimenzionalan, i odgovara jediničnoj reprezentaciji grupe SU(n).

A.4 Težine ireducibilnih reprezentacija grupa SU(n)

U prethodnom odeljku je pokazano da je potprostor koji odgovara određenoj Young-ovoj šemi dobijen simetrizacijom po vrstama i antisimetrizacijom po kolonama šeme. S druge strane, reč je o potprostoru direktnog proizvoda prostora $\mathbb{C}^n$ u kome deluje sama grupa SU(n).

Neka su težine identične reprezentacije $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Odgovarajući vektori težina $\{| \mu_i\rangle = | i\rangle \mid i = 1, \ldots n\}$ mogu se uzeti za bazis korišćen za definiciju reprezentacije $\Delta(S_m)$. To znači da Young-ova šema odgovara simetrizaciji i antisimetrizaciji vektora težina. Težine su aditivne, te se lako određuju, kao što je objašnjeno u odeljku § 4.3.3. Popunjavanjem Young-ove šema dozvoljenim indeksima težina se tako nalaze sve težine date reprezentacije. Pri tome se isti ne može ponoviti u jednoj koloni, jer bi se antisimetrizacijom dobio nulti vektor, a zbog simetrizacije je redosled brojeva u istoj vrsti irelevantan.

Na primer, algebra su(3) je svoja fundamentalna reprezentacija $[1, 0]$, sa težinama

$$\mathbf{m}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \ \mathbf{m}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \ \mathbf{m}^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(zadatak 4.33). Postoje samo dve reprezentacije sa dva kvadrata (jedna kolona i jedna vrsta) i težine se mogu sabirati na sledeće načine:

$$\begin{array}{ccl}
\boxed{1}\boxed{1} & & \mathbf{m} = \mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^1 = (1, \frac{1}{\sqrt{3}})^T \\
\boxed{1}\boxed{2} & \begin{array}{c}\boxed{1}\\ \boxed{2}\end{array} & \mathbf{m} = \mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})^T \\
\boxed{1}\boxed{3} & \begin{array}{c}\boxed{1}\\ \boxed{3}\end{array} & \mathbf{m} = \mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^3 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}})^T \\
\boxed{2}\boxed{2} & & \mathbf{m} = \mathbf{m}^2 + \mathbf{m}^2 = (0, -\frac{2}{\sqrt{3}})^T \\
\boxed{2}\boxed{3} & \begin{array}{c}\boxed{2}\\ \boxed{3}\end{array} & \mathbf{m} = \mathbf{m}^2 + \mathbf{m}^3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})^T \\
\boxed{3}\boxed{3} & & \mathbf{m} = \mathbf{m}^3 + \mathbf{m}^3 = (-1, \frac{1}{\sqrt{3}})^T
\end{array}$$

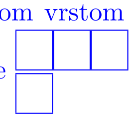
Vidi se da se u slučaju jedne vrste dobija reprezentacija $[2, 0]$, a u slučaju jedne kolone fundamentalna reprezentacija $[0, 1]$. Na ovaj način je moguće relativno jednostavno odrediti degeneraciju svih težina.

Trag svih matrica algebre su(n) jednak je 0. To važi i za bazis Cartan-ove podalgebre, pa je zbir težina u prvoj fundamentalnoj reprezentaciji 0. Kolona sa n kvadrata se može popuniti samo svim različitim težinama, pa ne daje doprinos ukupnoj težini, određenoj popunjenom šemom, i može se izostaviti. Stoga se za grupe SU(n) može koristiti klasifikacija pomoću šema sa najviše $n-1$ vrsta. Samo u slučaju jedinične reprezentacije, šema sa jednom kolonom od n kvadrata se zamenjuje oznakom 1.

A.5 Dimenzija reprezentacija grupa SU(n)

Pomoću Young-ovih šema određuju se i dimenzije pojedinih ireducibilnih reprezentacija grupe SU(n). Jedan način je opisan u prethodnom odeljku: nađu se sve težine date reprezentacije. Međutim, u slučaju većih šema, opisana tehnika postaje zametna, i koristi se sledeći algoritam.

Dimenzija reprezentacije grupe SU(n) koja odgovara Young-ovoj šemi $(m_1, ..., m_k)$ je $d = \frac{a_n}{b}$, gde samo brojilac zavisi od grupe, a i brojilac i imenilac od oblika šeme. a_n se dobija na sledeći način: na prvo mesto prve kolone se upiše broj n, pa se ostatak kolone popuni brojevima $n-1, n-2, \ldots, n-k+1$; preostala mesta u svakoj vrsti se popune brojevima u rastućem nizu s leva na desno; broj a_n je jednak proizvodu svih upisanih brojeva. Da bi se odredio broj b, potrebno je iz nekog kvadrata povući nadole i nadesno poluprave. Ukupan broj kvadrata kroz koje ove poluprave prolaze (računajući i uočeni) se upiše u dati kvadrat. Kada se ovo uradi za sve kvadrate šeme, brojevi se izmnože i dobijeni proizvod je b.

Zadatak A.1: a) Odrediti dimenzije reprezentacija sa jednim kvadratom, sa jednom vrstom od k kvadrata i jednom kolonom od k kvadrata za grupu SU(n). b) Odrediti dimenzije reprezentacije  za grupe SU(2) i SU(3).

A.6 Clebsch-Gordan-ove serije grupa SU(n)

Young-ove šeme daju i jednostavan algoritam za određivanje Clebsch-Gordan-ovih serija grupa SU(n). Neka su $D^{(\alpha)}(\mathrm{SU}(n))$ i $D^{(\beta)}(\mathrm{SU}(n))$ dve reprezentacije opisane Young-ovim šemama sa m_α i m_β kvadrata. Direktni proizvod ovih reprezentacija će biti sadržan u reprezentaciji $\mathrm{SU}(n)^{m_\alpha + m_\beta}$, i Young-ove šeme u Clebsch-Gordan-ovoj seriji će sadržati $m_\alpha + m_\beta$ kvadrata.

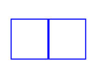
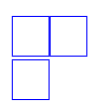
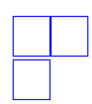
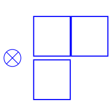
Algoritam je sledeći. Šema β se popuni tako što se u sve kvadrate i-te vrste upiše broj i, a šema α se ostavi nepopunjena. Zatim se kvadrati prve vrste šeme β jedan za drugim dodaju šemi α na sve moguće načine, uz zahteve:

(i) rezultujuća šema je Young-ova šema, tj. dužine vrsta su nerastuće pri kretanju odozgo nadole, a nema više od n vrsta;

(ii) u istoj koloni nema dva ista broja (u ovom slučaju se jedinice raspoređuju u različite kolone na sve moguće načine).

(iii) Kada je ovo urađeno, na svaku dobijenu šemu se dodaju kvadrati iz druge (zatim i sledećih) vrste šeme β. Pri tome se pored (i) i (ii), zahteva i da prelazeći po dobijenoj šemi zdesna na levo i odozgo nadole, broj postavljenih kvadrata u svakom trenutku bude manji ili jednak broju kvadrata sa prethodnim brojem (tj. pri opisanom kretanju broj pređenih kvadrata sa brojem 2 je manji od broja pređenih kvadrata sa brojem 1, itd.).

Kada se ovaj postupak uradi za sve vrste šeme β, dobijene Young-ove šeme određuju reprezentacije iz Clebsch-Gordan-ove serije.

Zadatak A.2: Odrediti Clebsch-Gordan-ove serije reprezentacija  $\otimes$  i  $\otimes$  grupa SU(2) i SU(3).

Dodatak B

REPREZENTACIJE POINCARÉ-OVE GRUPE

U odeljku 5.3.4 je izvršena klasifikacija unitarnih ireducibilnih reprezentacija Poincaré-ove grupe, odnosno određeno je koje se reprezentacije mogu pojaviti i kakvi su im simetrijski kvantni brojevi, što je bilo dovoljno za niz fizički važnih zaključaka. Poslednji deo konstrukcije, indukcija iz dozvoljenih reprezentacija male grupe je izostavljen, te same reprezentacije nisu izvedene. Ovaj korak se može izvršiti, primenjujući sasvim opšti metod nalaženja reprezentacija semidirektnih proizvoda grupa, tako da izraz (3.7), daje tražene operatore (u prostoru beskonačne dimenzije).

B.1 Ireducibilne unitarne reprezentacije

U oba relevantna slučaja, A ($m > 0, p_0 > 0$) i C ($m = 0, p_0 > 0$) skup koseta male grupe je beskonačan (maseni hiperboloid i svetlosni konus), tako da su indukovane reprezentacije nužno beskonačno-dimenzionalne (što je bilo očekivano zbog nekompaktnosti grupe). Dalje, svaki element naznačenih hiperpovrši u potpunosti karakteriše jedan koset male grupe, tj. postoji bijekcija skupa koseta i tačaka na hiperpovrši.

Prvo će biti razmotrene reprezentacije tipa ($m > 0, S$). Svaka Lorentz-ova transformacija jednoznačno definiše jednu rotaciju i jedan boost (zadatak 5.25); rotacija je element male grupe, dok je boost predstavnik koseta. Iz jednoznačnosti pomenute faktorizacije Lorentz-ovih transformacija, sledi da svaki boost određuje jedan koset male grupe, tj. da se boost-ovi mogu odabrati za predstavnike koseta. To znači da svaka tačka p (četvorodimenzionalni vektor) masenog hiperboloida $p^2 = m^2$ određuje tačno jedan boost $(B(p)|0)$ za koji važi $(B(p)|0)\mathbf{m} = p$. Kada se ovim boost-om izvrši konjugacija reprezentacije $\Delta^{(\mathbf{m})}(T^4)$ dobija se $\Delta^{(p)}(T^4)$, što se vidi iz (5.3). Osnovna definicija indukovane reprezentacije se sada može napisati u obliku

$$D_{qp}(A|a) = \Delta^{(\mathbf{m})}(I|a')d^{(S)}(R)\delta(B(q)^{-1}(I|a)B(q)B(q)^{-1}AB(p),(R|a')) =$$

$$\Delta^{\mathbf{m}}(B^{-1}(q)a)d^{(S)}(R)\delta(B(q)^{-1}AB(p),R),$$

gde je iskorišćena pomenuta bijekcija transverzale (skup boost-ova) i orbite (maseni hiperboloid) u indeksiranju blokova, a R je onaj element male grupe (rotacija) za koji je uslov u Kronecker-ovoj delti ispunjen. Tako, da bi se odredila matrica proizvoljnog elementa $(A|a) \in \Pi$, treba naći za svaku reprezentaciju p iz orbite reprezentacije $\mathbf{m}$ (tj. za svako p za koje je $p^2 = m^2$) element $R(A,p)$ i reprezentaciju $q(p)$, takve da je blok D_{qp} različit od nule. Drugim rečima, traži se boost $B(q)$ takav da je $B^{-1}(q)AB(p) = R(A,p)$ čista rotacija. Najlakše je proveriti da li je neka transformacija čista rotacija delovanjem na vektor m, koji samo u tom slučaju ostaje nepromenjen. Lako se vidi da je za $q = Ap$ ovo zadovoljeno, pa je nenulti blok upravo $D_{Ap,p}$, a odgovarajuća rotacija $R(A,p) = B^{-1}(Ap)AB(p)$. Konačno, u bazisu $\{| \, p,s\rangle \mid p^2 = m^2, p_0 > 0, s = S, S-1, ..., -S\}$, reprezentacija $D^{(m,S)}(\Pi)$ deluje na sledeći način:

$$D^{(m,S)}(A|a) \mid p,s\rangle = e^{\imath(Ap)a} \sum_{s'} D^{(S)}_{s's}(R(A,p)) \mid Ap, s'\rangle. \tag{B.1}$$

Slično je i sa reprezentacijama $(m = 0, S)$. Kao što je rečeno, mala grupa je izomorfna sa $E(2,\mathbb{R})$, pri čemu su za fiziku relevantne njene reprezentacije u kojima se netrivijalno reprezentuju samo rotacije oko z-ose: $\Delta^{(S)}(R_z(\alpha)) = e^{-\imath S\alpha}$. Ponovo je potrebno odrediti predstavnike koseta, i korišćenjem polarne forme pokazuje se da se tačka $\mathbf{c} = (1,0,0,1)$ svetlosnog konusa preslikava u drugu tačku p iste hiperpovrši operacijom $R_{xy}(p)B_z(p)$, gde su boost duž z-ose $B_z(p)$ i rotacija oko ose u xy-ravni $R_{xy}(p)$ jednoznačno određeni vektorom p (boost preslikava vektor $\mathbf{c}$ u kolinearni, iste euklidske dužine kao p, a rotacija zatim ovaj vektor preslika u p). Potrebno je još naći koset $q(p)$ takav da je $(R_{xy}(q)B_z(q))^{-1}AR_{xy}(p)B_z(p)$ element male grupe. Delovanjem na $\mathbf{c}$ se proverava da je $q(p) = Ap$, i traženi element male grupe je $(R_z(\alpha), Q)$= $(R_{xy}(Ap)B_z(Ap))^{-1}AR_{xy}(p)B_z(p) \in E(2,\mathbb{R})$ (element Q u uređenom paru semidirektnog proizvoda nije bitan jer se reprezentuje trivijalno). Konačno, u bazisu $\{| \, p,S\rangle \mid p^2 = 0, p_0 > 0\}$ je

$$D^{(0,S)}(A|a) \mid p,S\rangle = e^{\imath(Ap)a - \imath S\alpha} \mid Ap, S\rangle \tag{B.2}$$

Iz relacija (B.1) i (B.2) se jasno vidi unitarnost dobijenih reprezentacija. Treba zapaziti da $R(A,p)$ i α zavise od A.

Da bi se odredili reprezentanti generatora Poincaré-ove grupe dovoljno je diferencirati dobijene izraze. Kao i uvek, generatori su impulsi za translacije, a angularni momenti za rotacije (pomnoženi imaginarnom jedinicom, jer su pravi generatori kosohermitski, a fizičke observable hermitske). Jednoparametarska podgrupa translacija duž ose x^μ je $(I|a^\mu)$ (pisano je a^μ za vektor čija je μ-ta koordinata a^μ, a ostale su nule), pa se diferenciranjem nalazi:

$$\frac{\partial}{\partial a^\mu} D^{(m,S)}(I|a^\mu) \mid p,s\rangle \mid_{a^\mu=0} = p_\mu \mid p,s\rangle, \tag{B.3}$$

za slučaj $m \neq 0$, i isti izraz, samo sa velikim S u vektorima, za $m = 0$. Prema tome, impulsi deluju kao multiplikativni operatori u ovom bazisu, tj. u pitanju je impulsna reprezentacija.

Slično je i sa angularnim momentima. Primenjujući Leibnitz-ovo pravilo u (B.1) i (B.2) za generatore jednoparametarskih podgrupa rotacija $R(\phi)$, nalazi se:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} D^{(m,S)}(R(\phi)|0) \mid p,s\rangle \mid_{\phi=0} =$$

$$\sum_{s'} \frac{\partial}{\partial \phi} D^{(S)}(R(R(\phi),p)) \mid_{\phi=0} \mid p,s'\rangle + \frac{\partial}{\partial \phi} \mid R(\phi)p, s\rangle \mid_{\phi=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} D^{(0,S)}(R(\phi)|0) \mid p,S\rangle \mid_{\phi=0} = \frac{\partial}{\partial \phi} e^{-iS\alpha(\phi)} \mid_{\phi=0} \mid p,S\rangle + \frac{\partial}{\partial \phi} \mid R(\phi)p, S\rangle \mid_{\phi=0} .$$

U poslednjem izrazu je naglašena zavisnost α od ϕ. Tražeći posredni izvod $\frac{\partial}{\partial\phi} = \sum_\mu \frac{\partial p^\mu}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial p^\mu}$ u drugom članu, pokazuje se da je taj član u stvari orbitalni angularni moment, izražen u impulsnoj reprezentaciji:$K_i = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}p_j\frac{\partial}{\partial p_k}$. Za tumačenje prvog člana potrebno je odrediti zavisnost rezultujuće rotacije od $R(\phi)$. U prvom slučaju se nalazi $R(R(\phi),p) = B^{-1}(R(\phi)p)R(\phi)B(p)$, tj. $B(R(\phi)p) = R(\phi)B(p)R^{-1}(R(\phi),p)$. Transponovanjem ove jednakosti, uz primenu simetričnosti boost-ova i ortogonalnosti rotacija, nalazi se $R(R(\phi),p) = R(\phi)$, i to nezavisno od p. Prema tome, prvi član u slučaju $m \neq 0$ je reprezentant generatora u konačno-dimenzionalnoj reprezentaciji $D^{(S)}(\mathrm{SU}(2))$ rotacione grupe. Slično se za $m = 0$ nalazi da je za rotacije oko z-ose $\alpha = \phi + o(\phi)$, tako da se odgovarajući generator reprezentuje brojem S, tj. predstavlja jednodimenzionalnu reprezentaciju grupe rotacija oko z-ose. Zaključak je da se angularni moment razdvaja na spinski i orbitalni deo. Pri tome je važno uočiti da sam prostor reprezentacije nije konstruisan kao direktni proizvod orbitalnog i spinskog prostora; za razliku od nerelativističke kvantne mehanike, spinski prostor se ne pojavljuje kao "unutrašnji".

B.2 Neunitarne reprezentacije

Reprezentacije (B.1) i (B.2) su faktorisane na deo koji potiče od translacije i deo koji je vezan za Lorentz-ovu transformaciju. Međutim, Lorentz-ove transformacije se izražavaju na komplikovan način, i to je jedan od razloga što su, istorijski gledano, prvo određene neke neunitarne reprezentacije Poincaré-ove grupe. Drugi razlog je što se u slučaju kada je moguća potpuna faktorizacija, tj. kada se Lorentz-ove transformacije direktno reprezentuju u nekoj reprezentaciji (M, M') (§23) nezavisno od impulsa, lako nalaze matrice u koordinatnoj reprezentaciji. Cena za ove pogodnosti je pre svega već napomenuta neunitarnost, a u većini slučajeva i reducibilnost takve reprezentacije. Naime, jasno je da reprezentaciji određenog spina S odgovara više, čak beskonačno mnogo, reprezentacija Lorentz-ove grupe, koje subdukcijom na grupu rotacija daju takav spin.

Umesto reprezentacija (m, S) razmatranih do sada, konstruišu se reprezentacije $(m,(M,M'))$, koje u impulsnom bazisu deluju na sledeći način:

$$D^{(m,(M,M'))}(A|a) \mid p, n\rangle = e^{\imath(Ap)a}\sum_{n'} D^{(M,M')}_{n'n}(A) \mid Ap, n'\rangle. \tag{B.4}$$

Zadatak B.1: Proveriti da je gornjim izrazom zadata jedna reprezentacija Poincaré-ove grupe.

Sada je element $A \in L$ u svim nenultim blokovima reprezentovan $(2M+1)(2M'+1)$ matricom $D^{(M,M')}(A)$, nezavisno od p. Indeks n uzima $(2M+1)(2M'+1)$ vrednosti. Ova reprezentacija definiše masu čestice, $p^2 = m^2$, ali ne i spin, ona sadrži reprezentacije sa spinovima u intervalu $\mid M - M' \mid, ..., M + M'$, tako da je odmah jasno da nije ireducibilna (osim kada je M ili M' nula). Konačno-dimenzionalne reprezentacije Lorentz-ove grupe su neunitarne, tako da je i cela reprezentacija takva.

U slučaju kada je M' (ili M) jednako nuli, ovako definisana reprezentacija je ireducibilna i ekvivalentna reprezentaciji (m, S), gde je $S = M$ (odnosno $S = M'$). Naime, lako se proverava da je veza medju bazisima

$$\mid p, s\rangle = \sum_n D^{(M,0)}_{ns}(Q(p)) \mid p, n\rangle.$$

Zadatak B.2: Proveriti da u bazisu $\mid p, s\rangle$ iz prethodnog izraza, operatori Poincaré-ove grupe imaju matrični oblik (B.1) i (B.2).

B.3 Koordinatna reprezentacija

Prelazak iz impulsne u koordinatnu sliku se kao i uvek u kvantnoj mehanici ostvaruje Fourier-ovim transformom. Za reprezentacije iz prethodnog odeljka to se lako izvodi jer su blok-matrice koje reprezentuju Lorentz-ove transformacije nezavisne od impulsa. Pri tome treba voditi računa da se integracija u impulsnom prostoru vrši po hiperboloidu mase (ili svetlosnom konusu). To se formalno uvodi u račun delta funkcijom $\delta(p^2 - m^2)$. Tako se nalazi

$$\mid x, n\rangle = \int \mid p, n\rangle e^{-\imath px} \delta(p^2 - m^2) d^4 p = \int \mid p, n\rangle e^{\imath px} \frac{d^3 p}{2p_o}.$$

U poslednjem izrazu integracija se vrši po tri prostorne komponente impulsa. Koristeći (B.4) i invarijantnost izraza $\delta(p^2 - m^2)d^4 p$ pri Lorentz-ovim transformacijama, nalazi se

$$D(A|a) \mid x, n\rangle = \sum_{n'} D_{n'n}(A) \mid Ax + a, n'\rangle.$$

Dodatak C

REŠENJA ZADATAKA

Jedinična matrica reda n je označena sa I_n, a J_n je matrica dimenzije n koja samo na sporednoj dijagonali ima jedinice (na ostalim mestima 0).

C.1 Topološki prostori i mnogostrukosti

Rešenje 1.1. Ukupno ima 29 topologija raspoređenih u 9 klasa. Njihovi otvoreni skupovi su:

1	$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},X\}$		
2	$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$
	$\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{b\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\},X\}$
3	$\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$	$\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{b\},\{c\},\{b,c\},X\}$
4	$\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},\{a,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{b\},\{a,b\},\{b,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{c\},\{a,c\},\{b,c\},X\}$
5	$\{\emptyset,\{a\},\{a,b\},X\}$	$\{\emptyset,\{a\},\{a,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{b\},\{a,b\},X\}$
	$\{\emptyset,\{b\},\{b,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{c\},\{a,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{c\},\{b,c\},X\}$
6	$\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{b\},\{a,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{c\},\{a,b\},X\}$
7	$\{\emptyset,\{a\},X\}$	$\{\emptyset,\{b\},X\}$	$\{\emptyset,\{c\},X\}$
8	$\{\emptyset,\{a,b\},X\}$	$\{\emptyset,\{a,c\},X\}$	$\{\emptyset,\{b,c\},X\}$
9	$\{\emptyset,X\}$		

Rešenje 1.2. 9 klasa homeomorfizma numerisanih u rešenju zadatka 1.1.
Ako su $\mathcal{T}_1'=\{\emptyset,\{a\},\{b\},X'\}$, $\mathcal{T}_2'=\{\emptyset,\{a\},X'\}$, $\mathcal{T}_3'=\{\emptyset,\{b\},X'\}$, $\mathcal{T}_4'=\{\emptyset,X'\}$ moguće topologije na X', po šemi iz zadatka 1.1 se dobijaju potprostori iz tabele.
Kanonična injekcija je uvek neprekidna, a otvoreni skupovi u $\{X',\mathcal{T}'\}$ su likovi otvorenih skupova u $\{X,\mathcal{T}\}$. Npr. ako se razmatra potprostor $\{X',\mathcal{T}_2'\}$ u $\{X,\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,c\},X\}\}$, jedini neprazan otvoreni skup koji se preslikavanjem i dobija iz potprostora je $\{a\}$ i to je lik otvorenog skupa $\{a\}$ u X'.

1	$\mathcal{T}_1'$		
2	$\mathcal{T}_1'$	$\mathcal{T}_1'$	$\mathcal{T}_2'$
	$\mathcal{T}_2'$	$\mathcal{T}_3'$	$\mathcal{T}_3'$
3	$\mathcal{T}_1'$	$\mathcal{T}_2'$	$\mathcal{T}_3'$
4	$\mathcal{T}_2'$	$\mathcal{T}_3'$	$\mathcal{T}_1'$
5	$\mathcal{T}_2'$	$\mathcal{T}_2'$	$\mathcal{T}_3'$
	$\mathcal{T}_3'$	$\mathcal{T}_2'$	$\mathcal{T}_3'$
6	$\mathcal{T}_1'$	$\mathcal{T}_1'$	$\mathcal{T}_4'$
7	$\mathcal{T}_2'$	$\mathcal{T}_3'$	$\mathcal{T}_4'$
8	$\mathcal{T}_4'$	$\mathcal{T}_2'$	$\mathcal{T}_3'$
9	$\mathcal{T}_4'$		

Rešenje 1.3. Pošto je $f^{-1}(C')\cap f^{-1}(X\setminus C')=\emptyset$ i $f^{-1}(C')\cup f^{-1}(X\setminus C')=X$, sledi da je $f^{-1}(X\setminus C')=X\setminus f^{-1}(C')$. Zbog neprekidnosti f, skup $f^{-1}(X\setminus C')$ je otvoren, pa je $f^{-1}(C')$ zatvoren. Analogno u drugom smeru.

Rešenje 1.4. (a,b), (a,∞) otvoreni; $[a,b]=\mathbb{R}\setminus\{(-\infty,a)\cup(b,\infty)\}$, $\{a\}=\mathbb{R}\setminus\{(-\infty,a)\cup(a,\infty)\}$ zatvoreni. $(a,b]$ nije ni otvoren ni zatvoren. Definicija $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ x\in T_\delta=(x_0-\delta,x_0+\delta)\ \Rightarrow\ f(x)\in T_{f(x_0)}=(f(x_0)-\epsilon,f(x_0)+\epsilon)$ se svodi na definiciju 1.3.

Rešenje 1.5. Prazan skup nema graničnih tačaka, a zatvoren je. Ostali rezultati su dati u sledećim tabelama.

Element	Okoline	Kvaziokoline
a	$\{a\},\{a,b\}\{a,c\},X$	$\emptyset,\{b\},\{c\},\{b,c\}$
b	$\{a,b\},X$	$\{a\},\{a,c\}$
c	$\{a,c\},X$	$\{a\},\{a,b\}$

Podskup	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	X
Granične tačke	b,c	$\emptyset$	$\emptyset$	b,c	b,c	$\emptyset$	b,c
Zatvarač	X	b	c	X	X	b,c	X
Gust	Da	Ne	Ne	Da	Da	Ne	Da

Rešenje 1.6. Pošto se u svakoj kvaziokolini iracionalnog broja nalazi racionalan (npr. napiše se iracionalan broj približno decimalno, sa dovoljno mnogo decimalnih mesta), iracionalni brojevi su granične tačke skupa racionalnih brojeva, te je zatvarač ceo skup $\mathbb{R}$.

Rešenje 1.7. Svi prostori su kompaktni i separabilni, jer je skup konačan. Hausdorff-ov je samo prvi prostor. Povezani su prostori iz klasa 3,4,5,7,8,9.

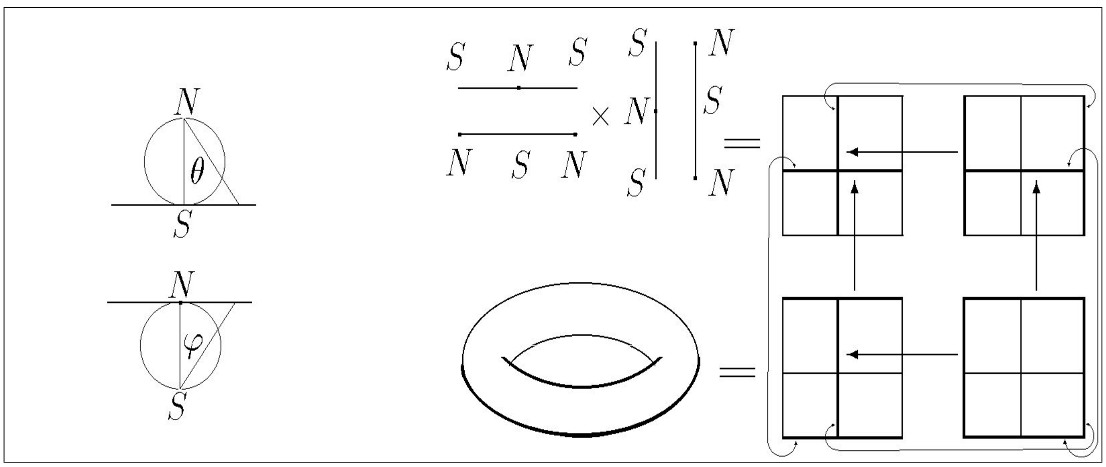
Rešenje 1.8. Proveriti aksiome metrike: (i) $d_2(x,y)\overset{\text{def}}{=}\sqrt{(x-y,x-y)}=0$, povlači $x=y$;
(ii) $d_2(y,x)=\sqrt{(y-x,y-x)}=\sqrt{(x-y,x-y)}=d_2(x,y)$;
(iii) $d_2(x,z)=\sqrt{(x-y+y-z,x-y+y-z)}\le\sqrt{d^2(x,y)+d^2(y,z)+2\|x-y\|\|y-z\|}=d_2(x,y)+d_2(y,z)$. Neka je $x^{(k)}=(\xi_1^{(k)},\dots,\xi_n^{(k)})^T$ Cauchy-jev niz iz $\mathbb{F}^n$, tj. $\sum_{i=1}^n|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(l)}|^2\to0$. To znači da je po komponentama $|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(l)}|^2\to0$, odnosno koordinate čine Cauchy-jeve nizove, koji sigurno konvergiraju u $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Neka je $x=(\xi_1,\dots,\xi_n)$, gde je $\xi_i=\lim\xi_i^{(k)}$. Onda je $\|x-x^{(k)}\|\to0$, tj. $x=\lim x^{(k)}$, i prostor je potpun.

Rešenje 1.9. Linearna kombinacija funkcija iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$ je opet iz istog skupa. Navedeni niz je iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Iz definicije sledi da su funkcije $(k_n-k_m)^2$ nenulte samo kada je $|t|\in(\frac{n-1}{n},1)$. Niz je Cauchy-jev, jer je $d_2^2(k_n,k_m)=2\int_{\frac{n-1}{n}}^1(k_n(t)-k_m(t))^2\,\mathrm{d}t$; kako su vrednosti $k_n(t)$ između 0 i 1, uz pretpostavku da je $m\le n$, gornji izraz je manji ili jednak od $2(1-\frac{m-1}{m})$, tj. konvergira ka 0. Ako je $\chi_S(t)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}1, & t\in S\\ 0, & t\notin S\end{cases}$, onda $\{k_n\}\to\chi_{(a,b)}(t)$ (proveriti po definiciji), a ova granična funkcija nije diferencijabilna pa ni iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Proveriti aksiome metrike: (i) ako je $\max_{t\in\mathbb{R}}\{|x(t)-y(t)|\}=0$, tada je $x=y$;
(ii) simetričnost je očigledna; (iii) $\max_{t\in\mathbb{R}}\{|x(t)-z(t)|\}=\max_{t\in\mathbb{R}}\{|x(t)-y(t)+y(t)-z(t)|\}\le\max_{t\in\mathbb{R}}\{|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\}\le\max_{t\in\mathbb{R}}\{|x(t)-y(t)|\}+\max_{t\in\mathbb{R}}\{|y(t)-z(t)|\}$.
Uslovi konvergencije $\{f_n\}\to f$:
d_2 — konvergencija "u srednjem", $\int_{-\infty}^\infty|(f_n(t)-f(t)|^2\,\mathrm{d}t\to0$,

d_∞ — uniformna konvergencija, $\max_{t\in\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| \to 0$.
Iz poznate teoreme o graničnom prelazu pri diferenciranju, sledi da uniformno konvergentni niz diferencijabilnih funkcija ne mora i sam biti diferencijabilna funkcija, te ni u odnosu na ovu metriku prostor nije potpun.

Rešenje 1.10. Ne može, jer bi bila homeomorfna otvorenom skupu u $\mathbb{R}^n$, koji zbog otvorenosti nije kompaktan. Ipak, razmisliti još jednom.

Rešenje 1.11. Jedan atlas: izbaciti severni pol, tačku N, čime se dobija jedna karta (jer je ostatak homeomorfan otvorenom intervalu), a S za drugu kartu. Osim ove dve tačke svi elementi su iz preseka karata. U zavisnosti od toga kako će se ove karte projektovati u $\mathbb{R}^1$ menjaju se i funkcije prelaza. Npr. u stereografskoj projekciji koordinate su $\mathrm{tg}(\theta)$ i $\mathrm{tg}(\varphi)$, pri čemu je veza analitička jer je $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$. I sami uglovi se takođe mogu uzeti za koordinate (slika C.1).



Slika C.1: **Atlasi kružnice (levo) i torusa (desno).** *Svaka od 4 karte torusa nastaje kao proizvod dve karte kružnice. Deblje linije su pri tome nastale od severnog pola na nekoj od karata kružnice, strelice povezuju linije (različitih karata) duž koje treba vršiti "lepljenje" da bi se dobio torus.*

Rešenje 1.12. Sami sebi su karte.

Rešenje 1.13. Napraviti direktni proizvod po definiciji, za dva atlasa iz zadatka 1.11. Zatim identifikovati ("slepiti") delove različitih karata koji se na S^1 preklapaju. Dobija se torus, sl. C.1.

Rešenje 1.14. Petlja u $M\times N$ se može napisati kao $\gamma(t) = (\gamma_M(t), \gamma_N(t))$, gde su γ_M i γ_N projekcije γ u M i N. Očigledno su i projekcije petlje. γ je homotopno sa γ' ako i samo ako su i odgovarajuće projekcije homotopne. To znači da je skup klasa homotopije u $M\times N$ direktni proizvod klasa iz M i N. Pošto je $\gamma\circ\gamma' = (\gamma_M\circ\gamma'_M, \gamma_N\circ\gamma'_N)$, odgovarajući zakon se prenosi i na klase homotopije, čime se dobija struktura direktnog proizvoda grupa.

Rešenje 1.15. Preslikavanje $\alpha \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ je difeomorfizam kružnice i navedene grupe matrica. Tangentni vektor u $\alpha = 0$ se nalazi po definiciji, i njegove koordinate u apsolutnom bazisu mnogostrukosti $\mathbb{R}^{22}$, tj. bazisu $\{\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \,|\, i, j = 1, 2\}$, su $(0, -1, 1, 0)$, odnosno predstavljen je matricom $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. U unutrašnjim koordinatama ove jednodimenzionalne mnogostrukosti tangentni vektor je $\frac{\partial}{\partial \alpha}$.

C.2 Hilbert-ovi prostori i operatori

Rešenje 2.1. Nije jer nije d_2-potpun (zadatak 1.9.). Nije, jer je $x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nt, & t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ Cauchy-jev niz, a konvergira ka prekidnoj funkciji $x(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, 0) \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t \in (0, 1] \end{cases}$.

Rešenje 2.2. l^2 je vektorski prostor (očigledna zatvorenost linearnih kombinacija) sa skalarnim proizvodom (ograničenost skalarnog proizvoda sledi iz Cauchy-jeve nejednakosti). Neka je $\{x^{(m)}\}$ jedan Cauchy-jev niz:

$$\|x^{(m)} - x^{(n)}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^2 < \epsilon \quad m, n \to \infty. \tag{C.1}$$

Tada je $\forall i \quad |\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(n)}|^2 < \epsilon$, tj. nizovi komponenti niza $\{x^{(n)}\}$ su Cauchy-jevi, te konvergiraju; neka je $x \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi_i = \lim_{n\to\infty} \xi_i^{(n)}\}$. Iz (C.1) sledi da je pri svakom konačnom M (fiksira se n, pa izvede granični prelaz po m) $\sum_{i=1}^{M} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^2 \to 0 \quad n \to \infty$, tj.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^2 < \epsilon \quad n \to \infty. \tag{C.2}$$

No sada je $\|x\|^2 = \|x^{(n)} + (x - x^{(n)})\|^2 \leq \|x^{(n)}\|^2 + \|x - x^{(n)}\|^2 < \infty$, pa je x iz l^2, a relacija (C.2) postaje $\{x^{(n)}\} \to x$.

Rešenje 2.3. Neka je $\{x_n\} \to x$. Tada je $\forall y \in \mathcal{H} \quad |(x - x_m, y)| \leq \|x - x_m\|\|y\| \to 0$, jer je limes prve norme kod konvergentnih nizova 0, a druga je konačna za sve elemente iz $\mathcal{H}$. Niz je slabo konvergentan ka nultom nizu, jer je: $\forall y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) \in l^2 \quad (x^{(n)}, y) = \eta_n \to 0$, a nije Cauchy-jev, pa ni konvergentan, jer je, za $m \neq n$, $\|x^{(m)} - x^{(n)}\| = \sqrt{2}$.

Rešenje 2.4.

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6
Linearnost	+	+	+	−	−	−
Neprekidnost	+	+	−	+	+	−

Rešenje 2.5. Oba uslova su linearna, pa su lineali. $\mathcal{M}_1$ je očigledno potprostor, a $\mathcal{M}_2$ nije (npr. niz nizova $x^{(n)} = \{-1, \underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots\}$ je konvergentan ka nizu $\{-1, 0, 0, ..\}$, koji nije iz $\mathcal{M}_2$).
Jesu, jer su potpuni (zadatak 1.8).

Rešenje 2.6. Isto kao u konačno-dimenzionalnom slučaju. Nizovi sa konačno mnogo nenultih, a racionalnih komponenti su gust prebrojiv skup u l^2. Jedan ortonormirani bazis je apsolutni bazis (zadatak 2.3).

Rešenje 2.7. x nije linearna kombinacija (dozvoljeno samo konačno mnogo sabiraka!) vektora apsolutnog bazisa.

Rešenje 2.8. Očigledno je u pitanju vektorski prostor sa skalarnim proizvodom. Potpunost se svodi na potpunost $\mathcal{H}^n$, pa se dokaz sprovodi analogno dokazu potpunosti l^2. Ako je $\{e_n\}$ ortonormirani bazis u $\mathcal{H}$, onda je $\{1, e_{n^{(1)}}, e_{n_1^{(2)}} \otimes e_{n_2^{(2)}}, \dots\}$ ortonormirani bazis u $\Phi_{\mathcal{H}}$, čime je pokazano i da je separabilnost $\mathcal{H}$ ekvivalentna separabilnosti $\Phi_{\mathcal{H}}$. Za $\mathcal{H} = \mathbb{F}$, i elementi $\mathcal{H}^n$ su iz $\mathbb{F}$, pa je $\Phi_{\mathbb{F}} = l^2$.

Rešenje 2.9. Neka je $\chi_{[a,b]}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Ovo je očigledno jedan linearni funkcional na $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Definicija 2.3 omogućuje primenu teorema o graničnom prelazu pod integralom, za $\mathcal{D}-$konvergentne nizove g_n: $\lim \int_a^b g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \lim g_n(t)\,\mathrm{d}t$, što daje neprekidnost funkcionala $\chi_{[a,b]}$. Ova raspodela se očigledno može napisati pomoću karakteristične funkcije. Niz raspodela $\chi_{[a,a+n]}$ konvergira (definicija 2.4.(ii)) ka raspodeli dualnoj stepenastoj funkciji: $\int_a^\infty g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \theta_a(t) g(t)\,\mathrm{d}t$. Niz $k_n^{[a,b]}(t) = k_n(\frac{a+b-2t}{a+b})$ (zadatak 1.9).

Rešenje 2.10. Obe funkcije, mada same različite, definišu nultu raspodelu $\phi(g) = 0$. Ako se bilo kojoj funkciji doda funkcija različita od nule na prebrojivom skupu tačaka, dualna raspodela se ne menja.

Rešenje 2.11. Ovo je očigledno neprekidni linearni funkcional. Dualna funkcija mora biti jednaka 0 izvan tačke $t = 0$ da bi dualni funkcional bio nezavisan od vrednosti funkcija izvan ove tačke. Osim toga, kako je npr. za funkcije $k_n(t)$ iz zadatka 1.9 ispunjeno $\int_{\mathbb{R}} \delta(t) k_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ mora biti $\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$, što povlači i $\delta(0) = \infty$.

Rešenje 2.12. Za $g(t) = g(0) + h(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, je $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{|t|\leq 1} f_n(t)(g(0) + h(t))\,\mathrm{d}t + \int_{|t|>1} f_n(t) g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{\sqrt{\pi}} g(0) \int_{|t|\leq 1} e^{-n^2 t^2}\,\mathrm{d}t + I_2 + I_3$. Prvi integral je funkcija greške, $g(0)\mathrm{Erf}(n) \to g(0)$. Pošto je $|h(t)| \leq C|t|$, a $|g(t)| \leq M$ (zbog ograničenosti ovih funkcija), važi $|I_2| \leq \frac{2Cn}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 t e^{-n^2 t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{C}{n\sqrt{\pi}}(1 - e^{-n^2}) \to 0$ i $|I_3| \leq \frac{2Mn}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty e^{-n^2 t^2}\,\mathrm{d}t = M(1 - \mathrm{Erf}(n)) \to 0$.

Rešenje 2.13. Neka je $f(t) = 0$ izvan intervala $(-a, a)$. Tada je $\eta(f) = \int_{-a}^a \frac{1}{t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^a \frac{f(t)-f(0)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{-a}^a \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t$. Drugi integral je jednak nuli u smislu glavne vrednosti (tj. za $I_\epsilon = (-a, -\epsilon) \cup (\epsilon, a)$ važi $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{I_\epsilon} \frac{f(0)}{t}\,\mathrm{d}t = 0$), a prva podintegralna funkcija je neprekidna, te je integral dobro definisan.

Rešenje 2.14. Raspodela ϕ je integral raspodele ψ ako je $\phi' = \psi$, tj. za svako $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ važi $\phi(g') = -\psi(g)$.

Rešenje 2.15. Neka je $s = a(t)$ i $g_{a^{-1}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(a^{-1}(t)) \frac{\mathrm{d}|a^{-1}(t)|}{\mathrm{d}t}$, gde je a^{-1} inverzna funkciji a. Tada je ϕ_a raspodela koja se dobija smenom promenljive $t \mapsto s = a(t)$ iz raspodele ϕ ako važi $\forall g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \phi_a(g) = \phi(g_{a^{-1}})$. Naravno, treba ispitati postojanje inverzne funkcije (treba zapaziti da je izvod inverzne funkcije uvek istog znaka, jer nema nula ako inverzna funkcija postoji).

Rešenje 2.16. $\theta_a(t)$. $\int_{\mathbb{R}} \theta'_a(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^\infty g'(t)\,\mathrm{d}t = g(a) = \delta(t-a)$. $\mathrm{sign}(t) = \theta_0(t) - \theta_0(-t)$, pa je izvod ove funkcije $2\delta(t)$. $\chi_{[a,b]}(t) = \theta_a(t) - \theta_b(t)$, te je $\chi'_{[a,b]}(t) = \delta(t-a) - \delta(t-b)$. $[t] = \sum_{k=0}^\infty \theta_k(t) - \sum_{-\infty}^{k=-1} \theta_k(-t)$, i $[t]' = \sum_{k=-\infty}^\infty \delta(t-k)$. $|t| = t\mathrm{sign}(t)$, pa je $|t|' = 2t\delta(t) + \mathrm{sign}(t)$; prvi funkcional je 0, što se lako proverava po definiciji, pa je $|t|' = \mathrm{sign}(t)$. $|t|'' = 2\delta(t)$.

Rešenje 2.17. 0. $\delta(a(t)) = \sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{|a'(t_i)|}$, gde i prebrojava sve nule t_i funkcije a. $\delta(\sin(t)) = \sum_{k=-\infty}^\infty \delta(t-k\pi)$. $\frac{1}{2}(\delta(x-1)+\delta(x+1))$. $\delta^{(m)}(g) = (-)^m g^{(m)}(0)$, pa je $\frac{\mathrm{d}^m\delta(t)}{\mathrm{d}t^m} = (-)^m\delta(t)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}$ (ovaj izraz treba zameniti u (2.5)). Integral je stepenasta funkcija.

Rešenje 2.18. Heaviside-ova i Dirac-ova funkcija nisu iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ jer nemaju konačnu normu. Karakteristična funkcija konačnog intervala se dobija kao limes Cauchy-jevog niza (zadatak 1.9). U zadacima 2.8 i 2.11 su $\theta_a(t)$ i $\delta(t)$ dobijeni kao limesi funkcija iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ u smislu konvergencije raspodela. Međutim konvergencija raspodela koje su iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je u stvari slaba konvergencija, a $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je jako potpun. Lako je proveriti da ni jedan od navedenih nizova nije Cauchy-jev: $\int_{\mathbb{R}}(\chi_{[a,n]}(t) - \chi_{[a,m]}(t))^2\,\mathrm{d}t = |m-n|$; $\int_{\mathbb{R}}(f_n(t) - f_m(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}(m+n) - \frac{2mn}{\sqrt{m^2+n^2}})$.

Rešenje 2.19. Neka je $f(t)$ neprekidna kvadratno integrabilna funkcija. Niz funkcija $f_n(t) = \chi_{[-n,n]}(t)f(t)$ koje su izvan $[-n,n]$ jednake 0 proizvoljno blisko aproksimiraju $f(t)$: $\int_{\mathbb{R}}|f_n(t) - f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{|t|>n}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t \to 0$. Funkcije $f_n(t)$ se mogu proizvoljno blisko aproksimirati funkcijama iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$: npr. funkcije definisane sa $f_n^{(m)}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_n(s)\rho(m(t-s))\,\mathrm{d}t$, gde $\rho(t)$ može biti neka od funkcija niza $\frac{k_l(t)}{\|k_l(t)\|}$ (zadatak 1.9) su iz $C_0^\infty(\mathbb{R})$ i za dovoljno veliko m proizvoljno bliske f_n. [B2, 5.3]

Rešenje 2.20. Neprekidna funkcija iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ne mora da teži nuli za veliko t: npr. $f(t) = e^{-t^4\sin^2 t}$. No, ako je i njen izvod neprekidna funkcija iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ mora: $|\int_a^b f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \int_a^b |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$; leva strana je $\frac{1}{4}|f^2(b) - f^2(a)|^2$, dok desna pri $a, b \to \infty$ (nezavisno) postaje nula, što znači da je $f(t\to\infty) = c$, i za $c \neq 0$ f ne bi bila iz $\mathcal{L}_c^2(\mathbb{R})$.

Rešenje 2.21. Separabilnost sledi na osnovu uslova teorema 2.2. U svim slučajevima se provera vrši korišćenjem jednoznačnosti Gram-Schmidt-vog postupka i indukcije: proveri se za prve članove direktno, zatim se za sve polinome proveri ortonormiranost. Ovo je dovoljno da se tvrdi da se ortonormalizacijom skupa T_s, do na znak dobijaju dati polinomi, jer se za svako $n = 0, 1, \dots$ element ortonormiranog niza nalazi u jednodimenzionalnom potprostoru koji je ortogonalna razlika potprostora nad $\{t^i s(t) \mid i = 1, \dots, n\}$ i $\{t^i s(t) \mid i = 1, \dots, n-1\}$.

Rešenje 2.22. Weierstrass-ov teorem pokazuje potpunost skupa, a ortonormiranost se direktno proverava.

Rešenje 2.23. Po definiciji proveriti da je (f, g) skalarni proizvod u B_0, a po konstrukciji i u B. Međutim, u ovom prostoru su sve funkcije e_λ ortonormirane, a ima ih neprebrojivo mnogo.

Rešenje 2.24. Linearnost očigledna. $D(A) = \{x \in l^2 \mid \sum_{k=1}^\infty k\|\xi_k\|^2 < \infty\}$. Ovaj skup je gust, jer mu pripadaju svi nizovi sa konačno mnogo nenultih elemenata. Jednačina $Ax = y$, tj. $A(\xi_0, \xi_1, \dots) = (\eta_0, \eta_1, \dots)$, je rešiva po x (ξ_0 proizvoljno, $\xi_k = \frac{\eta_{k-1}}{\sqrt{k}}$) iz l^2, kad god je

$y \in l^2$ (nejednoznačno!). $N(A) = \mathrm{span}(e_0)$. Operator je neograničen: npr. za niz normiranih nizova iz $D(A)$ $\{x^{(n)} = (0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots)\}$ (n^2 uzastopnih koordinata $\frac{1}{n}$), važi $\|Ax^{(n)}\|^2 = \frac{n^2+1}{2}$. $D(B) = D(A)$ (jer je $\sum_{k=1}^{\infty} k\|\xi_{k-1}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k\|\xi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \|\xi_{k-1}\|^2 + \|\xi_0\|^2$). $N(B) = \{0\}$, $R(B)$ je potprostor ortogonalan na vektor e_0. $B^{-1}(0, \xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_1, \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2, \dots)$. $Ne_k = ke_k$. $AB = I + N$. Svi su neograničeni.

Rešenje 2.25. $D(K) = \{f \in \mathcal{L}^2_c(a,b) \mid \|Kf\| < \infty\}$. Sve neprekidne funkcije zadovoljavaju gornji uslov i K je ograničeni operator sa gustim domenom. $(x, Ky) = \int_a^b \mathrm{d}t x^*(t) \int_a^b k(t,s)y(s)\,\mathrm{d}s$.

Rešenje 2.26. $D(M) = \{f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \mid \|mf\| < \infty\}$. Ali $\|mf\|^2 \leq \max_{t\in\mathbb{R}}\{|m(t)|^2\}\|f\|^2$, te je uslov uvek zadovoljen, i operator je svuda definisan i ograničen. Ako je $m(t) \geq c > 0$, operator je invertibilan, $R(M) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ i $M^{-1}f = \frac{1}{m}f$ je ograničen. Ako $m(t)$ ima najviše prebrojivo mnogo nula, M je invertibilan, ali je M^{-1} neograničen, dok je $R(M)$ pravi, ali gust podskup u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. U ostalim slučajevima M nije invertibilan, a $N(M)$ čine funkcije koje nenulte vrednosti imaju samo u nulama $m(t)$ i u prebrojivo mnogo drugih tačaka. M se može napisati kao integralni operator sa jezgrom $m(t,s) = \delta(t-s)m(s)$.

Rešenje 2.27. $D(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}) = \{f \in \mathcal{L}^2(a,b) \mid f' \in \mathcal{L}^2(a,b)\}$ je gust jer su tu bar sve beskonačno diferencijabilne funkcije. Domen nije ceo prostor, jer npr. izvodi prekidnih funkcija sadrže delta funkcije, te nemaju konačnu d_2-normu i nisu iz prostora. Stoga operator nije ograničen. Za konačni interval (a,b) operator nije invertibilan jer nulpotprostor sadrži konstantne funkcije. Linearna diferencijalna jednačina ima oblik $Af(t) = g(t)$, gde je $A = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)D^k$ linearni operator. Jednačina ima rešenje ako je $g \in R(A)$. Opšte rešenje je skup koji se dobija kada se svakom vektoru nulpotprostora doda bilo koje rešenje.

Rešenje 2.28. a) Svuda definisani operator, ograničen (norma mu je očigledno 1), invertibilan, $T_a^{-1} = T_{-a}$, $R(A) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Integralni operator sa jezgrom $t_a(t,s) = \delta(t+a-s)$. b) Svuda definisan, može se izraziti kao operator množenja karakterističnom funkcijom, te ima odgovarajuće osobine. Pokazati da je projektor. c) $P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Integralno jezgro je $\delta'(s-t)$.

Rešenje 2.29. $D(A^\dagger)$ je gust; onda je $D((A^\dagger)^\dagger) = \{y \in \mathcal{H} \mid \exists z(y) \in \mathcal{H}\ \forall x \in D(A^\dagger)\ (z,x) = (y, A^\dagger x)\}$. Očigledno je da za $y \in D(A)$ važi $y \in D(A^\dagger)$ i $(y, A^\dagger x) = (A^\dagger x, y)^* = (x, Ay)^* = (Ay, x)$.

Rešenje 2.30. Za proizvoljni niz $\{x_n\} = \{Az_n\} \in R(A)$ i svaki vektor $y \in N(A^\dagger)$ važi $(y, x_n) = (A^\dagger y, z_n) = 0$. Ako $\{x_n\} \to x$, neprekidnost skalarnog proizvoda povlači $(y,x) = 0$.

Rešenje 2.31. $A^\dagger = B$, $B^\dagger = A$, $N^\dagger = N$.

Rešenje 2.32. $K^\dagger f(t) = \int_a^b k^*(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$; za simetrične i autoadjungovane potrebno je da $k(t,s)$ bude realna, a za unitarne modula 1, tj. $k(t,s) = e^{\imath u(s,t)}$, gde je $u(t,s)$ realna funkcija.

Rešenje 2.33. Smenom $t \mapsto t + a$ nalazi se $\int_{\mathbb{R}} f^*(t)g(t+a)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f^*(t-a)g(t)\,\mathrm{d}t$, tj. $T_a^\dagger = T_{-a} = T_a^{-1}$ i operator je unitaran. S je autoadjungovan.

Rešenje 2.34. Svi su simetrični, a autoadjungovani su P_0 i P_θ. $P_1 \subset P_2 \subset P$, $P_1 \subset P_\theta \subset P$. U $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ je $D(P) = \{f \mid f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})\}$, te je (zadatak 2.20) autoadjungovan. U $\mathcal{L}^2(0,\infty)$, P je simetričan, i nema autoadjungovano proširenje.

Rešenje 2.35. Raditi po definiciji.

Rešenje 2.36. Autoadjungovan.

Rešenje 2.37. Neka je U unitarni operator; važi $\forall x \in \mathcal{H}\quad \|Ux\| = \|x\|$. Skalarno množeći jednačinu $(U-\alpha I)x = y$ sa $(U+\alpha I)x$, nalazi se $(1-|\alpha|^2)\|x\|^2 = 2\mathrm{Re}(\alpha x, y)+\|y\|^2$. Prema tome, ako je $\alpha \in P\sigma(U)$, tj. $y = 0$ za $x \neq 0$, mora biti $|\alpha| = 1$. Neka je $|\alpha| \neq 1$; tada postoji $R_\alpha(U)$, pa se zamenom $x = R_\alpha(U)y$ i primenom Cauchy-jeve nejednakosti nalazi $|1-|\alpha|^2|\|R_\alpha(U)y\|^2 - 2|\alpha|\|R_\alpha(U)y\|\|y\| - \|y\|^2 \leq 0$. Odavde je $\frac{|\alpha|-\sqrt{|\alpha|^2-|1-|\alpha|^2|}}{|1-|\alpha|^2|}\|y\| \leq \|R_\alpha(U)y\| \leq \frac{|\alpha|+\sqrt{|\alpha|^2-|1-|\alpha|^2|}}{|1-|\alpha|^2|}\|y\|$. Vidi se da je operator ograničen, te je α iz rezolventnog skupa ili rezidualnog spektra. Konačno, ako $\alpha \notin P\sigma(U)$, iz $\overline{D(R_\alpha(U))} = N(U^\dagger - \alpha^* I)^\perp = \mathcal{H}$, te nema rezidualnog spektra.

Rešenje 2.38. $\overline{R(A^\dagger - \alpha^* I)} = N(A-\alpha I)^\perp \neq \mathcal{H}$.

Rešenje 2.39. a) Rešenje jednačine $(A-\alpha I)x = (\xi_1 - \alpha\xi_0, \sqrt{2}\xi_2 - \alpha\xi_1, \ldots) = 0$ za svako $\alpha \in \mathbb{C}$ je $\xi_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\xi_0$. Normirani svojstveni vektori su *koherentna stanja*: $x_\alpha = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}(1, \ldots, \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \ldots)$. Treba zapaziti da ih ima kontinuum mnogo i da su svi linearno nezavisni, jer odgovaraju različitim svojstvenim vrednostima. Prema tome, cela kompleksna ravan je diskretni spektar (A nije normalan!). Jednačina $(A^\dagger - \alpha I)x = 0$ nema rešenje, te spektar za A i zadatak 2.38 povlače $\sigma(A^\dagger) = R\sigma(A^\dagger) = \mathbb{C}$. $P\sigma(N) = \{0, 1, \ldots\}$, za svojstvene vektore $e_0, e_1, \ldots$ apsolutnog bazisa. Neka je $\alpha \notin \{0, 1, \ldots\}$ realno, i $\beta = \min_{k=0,1,\ldots}\{|k-\alpha|\}$. Tada je $\|R_\alpha(N)x\|^2 = \sum_{k=0}^\infty |\frac{1}{k-\alpha}|^2\|\xi_k\|^2 \leq |\frac{1}{\beta}|^2\|x\|^2$, tj. $R_\alpha(N)$ je ograničen operator, te nema ni neprekidnog spektra (rezidualnog nema zbog leme 2.3).
b) α je svojstvena vrednost operatora M ako postoji interval $[a,b]$ takav da je $\alpha = m(t)$ za $t \in [a,b]$. Svojstveni vektori su funkcije koje su na ovom domenu jednake nuli. Ako je $X = \{f(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, tada je $X \setminus P\sigma(M) = C\sigma(M)$, jer je $D(R_\alpha(M))$ skup funkcija koje se anuliraju na najviše prebrojivom skupu za koji je $M(t) - \alpha = 0$, te je gust ali neograničen. Operator X definisan sa $Xf(t) = tf(t)$ je autoadjungovan, i ima samo neprekidan spektar, celu realnu osu.
c) Najvažniji je operator impulsa P u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Rešenje jednačine $(P-\alpha I)f(t) = -\imath f'(t) - \alpha f(t) = 0$ je $f_\alpha(t) = Ce^{\imath\alpha t}$, koja nije iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ni za jedno $\alpha \in \mathbb{R}$. No, funkcije $f_{\alpha n}(t) = \sqrt[4]{\frac{1}{n}}e^{-\frac{t^2}{n}+\imath\alpha t}$ čine normirani niz koji zadovoljava Weyl-ov kriterijum, te je cela realna osa neprekidni spektar. Od ostalih izvodnih operatora, važan je primer P_0 u prostoru $\mathcal{L}^2(0, 2\pi)$, koji se interpretira kao z-komponenta angularnog momenta. Rešenja svojstvene jednačine su $e^{\imath\alpha t}$, što, uz granične uslove u definiciji domena operatora $e^{2\pi\imath\alpha t} = 1$, daje celobrojne svojstvene vrednosti, i svojstvene vektore $f_k(t) = e^{\imath kt}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$.
d) Operator je unitaran, a periodične funkcije nisu iz $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (nisu integrabilne), te je cela jedinična kružnica neprekidni spektar.
e) Svojstvene vrednosti su 1 (funkcije koje su izvan (a,b) jednake 0), i 0 (funkcije koje su na (a,b) jednake nuli). Za ostale tačke je rezolventa ograničena, te su iz $\rho(S_{(a,b)})$.

Rešenje 2.40. $F\psi_k(t) = C_k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\imath st}(-1)^k e^{\frac{s^2}{2}}\frac{\mathrm{d}^k e^{-s^2}}{\mathrm{d}s^k} =$ (uzastopne parcijalne integracije)$=$ $C_k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}(e^{-\imath st+\frac{s^2}{2}})\,\mathrm{d}s = C_k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}e^{\frac{(s-\imath t)^2}{2}}\,\mathrm{d}s = C_k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} \imath^k e^{-s^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}e^{\frac{(s-\imath t)^2}{2}}\,\mathrm{d}s =$ $C_k\imath^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}-\imath st}\,\mathrm{d}s = \imath^k\psi_k(t)$, tj. Hermite-ove funkcije su svojstveni vektori operatora

F za svojstvene vrednosti $\imath^k$. Zato je diskretni spektar ovog operatora $P\sigma(F) = \{1, -1, \imath, -\imath\}$. Ostatak kompleksne ravni je $\rho(F)$, jer je rezolventa ograničena: za $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \psi_k$ iz $D(R_\alpha(F))$ $(\alpha \neq \imath^s)$, važi $\|R_\alpha(F)x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\frac{\xi_k}{\imath^k - \alpha}|^2 \leq C^2 \|x\|^2$, gde je $\frac{1}{C} = \max\{|\imath^k - \alpha|\}$.

Rešenje 2.41. $Ax(t) = \alpha\rho(t)x(t)$.

Rešenje 2.42. Pošto je $[R_\alpha(A), R_\beta(A)] = 0$, množenjem sa $R_\alpha(A)^{-1} = (A - \alpha I)$ jednačina iz zadatka postaje $\frac{1}{\alpha-\beta}(I - \frac{A-\beta I+\beta I-\alpha I}{A-\beta I})$, te se svodi na identitet.

Rešenje 2.43. Neka je $Ax_i = \alpha_i x_i$. Tada je $P_i x_i = \frac{x_i}{2\pi\imath} \oint_{C_i} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha_i - \alpha} = x_i$. Istim putem, za neki drugi projektor P_j nalazi se da je $P_j x_i = 0$. Idempotentnost: neka su C_i^α i C_i^β dve konture oko α_i, pri čemu je C_i^β unutar C_i^α; tada je $P_i^2 = \frac{1}{(2\pi\imath)^2} \oint_{C_i^\beta} \mathrm{d}\beta \oint_{C_i^\alpha} R_\beta(A) R_\alpha(A)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{(2\pi\imath)^2} \oint_{C_i^\beta} \mathrm{d}\beta \oint_{C_i^\alpha} (\frac{R_\alpha(A)}{\alpha-\beta} - \frac{R_\beta(A)}{\alpha-\beta})\,\mathrm{d}\alpha$, na osnovu zadatka 2.42. Prvi integral prvog člana je nula jer je u celoj oblasti konture nesingularan, te je izraz dalje jednak $\frac{1}{(2\pi\imath)^2} \oint_{C_i^\beta} \mathrm{d}\beta R_\beta(A) \oint_{C_i^\alpha} \frac{1}{\beta-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = P_i$. U slučaju $P_i P_j$ za $i \neq j$ istim postupkom se nalazi da je rezultat 0, jer su sada u pitanju dve konture oko različitih vrednosti, te ni jedan od izraza nakon primene formule iz zadatka 2.42 nije singularan.

Rešenje 2.44. Kako je $t\delta(t-a) = a\delta(t-a)$, sledi da je za svako realno a raspodela $\delta(t-a)$ svojstveni vektor operatora koordinate. Slično, $-\imath\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\imath kt} = ke^{\imath kt}$, te je ravni talas svojstveni vektor za svako $k \in \mathbb{R}$. $F\delta(t-a) = \int_{\mathbb{R}} e^{\imath st}\delta(s-a)\,\mathrm{d}s = e^{\imath at}$, tj. F povezuje svojstvene bazise, što se lako proverava. Smenom $t \mapsto ct$, pogodnim izborom konstante c se H prevodi u zbir kvadrata operatora impulsa i koordinate. Ovaj operator je invarijantan pod delovanjem F (transformacijom sličnosti), tj. komutira, i F mora imati zajednički svojstveni bazis sa H.

Rešenje 2.45. Sigurno je $(x_k, tx_n) = (tx_k, x_n) = 0$ za $k > n+1$ (prvi izvod) i za $k+1 < n$ (drugi proizvod). Sve se relacije dobijaju na osnovu razvoja odgovarajuće generatrise. Za rekurentne relacije potrebno je diferencirati generatrisu po s, a za jednačine diferenciranja se traži izvod generatrise po t. Zatim se uoči da diferencirana generatrisa ima oblik proizvoda racionalne funkcije i generatrise, tj. diferencirani red je jednak početnom redu pomnoženim racionalnom funkcijom. Izjednačavanjem koeficijenata uz s^n nalaze se traženi izrazi.

Rešenje 2.46. Izračunati $(G(t,s)G(t,z))$. Ovaj izraz se razvije u red po $s^k z^l$, a koeficijenti su proporcionalni sa (x_k, x_l) (faktor proporcionalnosti zavisi od definicije razvoja generatrise — ili 1 ili $\frac{1}{(n!)^2}$, i ove dve konvencije su podjednako česte u literaturi).

Rešenje 2.47. Nakon smene promenljive $t = \frac{s}{\sqrt{m\omega}}$, uz oznaku $\epsilon = \frac{E}{\omega}$ svojstvena jednačina $H\psi = E\psi$ postaje jednačina $\psi''(t) + (2\epsilon - s^2)\psi(t) = 0$, koja je oblika (2.10), uz $\sigma(s) = 1$, $\tilde{\tau}(s) = 0$ i $\tilde{\sigma}(s) = 2\epsilon - s^2$. Da bi $\pi(s) = \pm\sqrt{k - 2\epsilon + s^2}$ bio polinom potrebno je da bude $k = 2\epsilon$, tj. $\pi(s) = \pm s$, pri čemu je $\epsilon = \frac{-\lambda\mp 1}{2}$. Znajući π određuje se $\tau(s) = \pm 2s$, pa se rešavanjem Pearson-ove jednačine nalazi $\rho(s) = e^{\pm s^2}$. Očigledno je da je samo donji znak moguć za ρ, pa to isto važi i u dosadašnjim formulama. Konačno, teorem 2.3 daje za rešenja Hermite-ove polinome u prostoru $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, e^{-s^2})$, odnosno Hermite-ove funkcije u $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (zadatak 2.21), uz svojstvene vrednosti $E_n = \omega(n + \frac{1}{2})$.

Rešenje 2.48. Ovo je jednačina oblika (2.10) sa $\sigma(t) = t$, $\tilde{\tau}(t) = 0$ i $\tilde{\sigma}(t) = 2Et^2 + 2Zt - l(l+1)$. Prvo se odredi $k = 2Z \pm (2l+1)\sqrt{-2E}$. Od više rešenja za $\pi(t)$, samo $\pi(t) = l + 1 - \sqrt{-2E}t$

po Pearson-ovoj jednačini daje funkciju $\rho(t) = t^{2l+1}e^{-2\sqrt{-2E}t}$ koja zadovoljava uslove težine (na $(0,\infty)$). Tako su rešenja Laguerre-ovi polinomi $L_n^{(2l+1)}(\frac{2Zt}{n+l+1})$, za $E_{nl} = -\frac{Z^2}{2(n+l+1)^2}$.

C.3 Teorija grupa

Rešenje 3.1. Skup je zatvoren na kompoziciju preslikavanja, kompozicija je asocijativna, inverzna transformacija je inverzni element, a identično preslikavanje je neutralni element.

Rešenje 3.2. $[A,H] = [B,H] = 0$ povlači $[AB,H] = A[B,H] + [A,H]B = 0$ (zatvorenost), i $[A^{-1},H] = 0$ (jedinstveni inverzni element); $e = I$ komutira sa svakim operatorom, a asocijativnost je posledica asocijativnosti množenja operatora.

Rešenje 3.3. Proveriti po definiciji.

Rešenje 3.4. U Descartes-ovom bazisu u ravni, operator rotacije za ϕ oko perpendikularne ose se reprezentuje navedenim matricama. Lako se proverava da je to Abel-ova grupa (SO(2)).

Rešenje 3.5. Proveriti po definiciji.

Rešenje 3.6. $(A \mid a)((B \mid b)x) = (A \mid a)(Bx + b) = ABx + Ab + a = (AB \mid Ab + a)x$, te je ovaj skup zatvoren, sa množenjem $(A \mid a)(B \mid b) = (AB \mid Ab + a)$. Odavde sledi da je $e = (I \mid 0)$, i $(A \mid a)^{-1} = (A^{-1} \mid -A^{-1}a)$, dok se asocijativnost direktno proverava. Da bi se dobila Poincaré-ova grupa, umesto ortogonalnih transformacija treba uzeti Lorentz-ove, tj. nesingularne operatore u $\mathbb{R}^4$ za koje važi $AMA^T = M$, gde je $M = \mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\}$.

Rešenje 3.7. $g(R,v,a,b)(g(Q,u,c,d)(r,t)) = g(R,v,a,b)(Qr+ut+c,t+d) = (RQr+Rut+Rc+v(t+d)+a,t+d+b) = g(RQ,Ru+v,Rc+vd+a,b+d)(r,t)$, tj. $g(R,v,a,b)g(Q,u,c,d) = g(RQ,Ru+v,Rc+vd+a,b+d)$. Sledi $e = g(I,0,0,0)$ i $g^{-1}(R,v,a,b) = g(R^{-1},-R^{-1}v,R^{-1}(vb-a),-b)$.

Rešenje 3.8. Po definiciji je grupa, i njen red je $n!$. Tablica je u tabeli 3.1, pa kako ova nije simetrična, S_3 nije Abel-ova. Ako je $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ i $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, tada se sve ostale permutacije dobijaju kompozicijom ove dve, a generatorske relacije su $\pi^3 = \phi^2 = (\pi\phi)^2 = e$ (identična permutacija, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$). Izbor generatora nije jedinstven, i bilo koja ciklična permutacija sa bilo kojom transpozicijom mogu biti odabrani, uz iste generatorske relacije.

Rešenje 3.9. Kako su molekuli konačne dimenzije (za razliku od idealnih kristala, slojeva ili polimera), od svih elemenata Euklidove grupe E_3, samo ortogonalne transformacije mogu biti njihove simetrije. Rotacije u ravni pravilnog n-tougaonika, koje ga ne pomeraju, oblika su $R(\frac{2\pi}{n}s)$ (zadatak 3.4), i sve su stepeni jednog generatora $C_n = R(\frac{2\pi}{n})$, tj. $R(\frac{2\pi}{n}s) = C_n^s$. Ako se dozvole sve rotacije u prostoru, poligon je dodatno invarijantan i pri rotacijama za ugao π oko n osa koje spajaju centar poligona sa temenima i centrima stranica. Dobija se grupa $\mathbf{D}_n$, reda $2n$, generisana elementom C_n i jednom od novih rotacija, U, uz generatorske relacije $C_n^n = U^2 = (C_nU)^2 = e$. U slučaju pravilne piramide, umesto n horizontalnih rotacionih osa, simetrije su refleksije σ u vertikalnim ravnima koje sadrže te ose; tako dobijene grupe $\mathbf{C}_{nv}$ su ponovo reda $2n$, i ako je σ

Tabela C.1: **Tablice grupa $\mathbf{C}_4$, $\mathbf{D}_4$ $\mathbf{C}_{4v}$ i K_8:** *leva gornja četvrtina obe tabele je tablica grupe $\mathbf{C}_4$. Refleksije su (slika u zadatku 3.21) σ_a i σ_b u vertikalnim ravnima koje sadrže dijagonale kvadrata, a σ_x i σ_y u vertikalnim ravnima koordinatnih osa. Zamenom refleksija rotacijama U_x, U_y, U_a i U_b za π oko navedenih osa, dobija se tablica grupe $\mathbf{D}_4$.*

$\mathbf{C}_{4v}$	e	C_4	C_4^2	C_4^3	σ_x	σ_b	σ_y	σ_a
e	e	C_4	C_4^2	C_4^3	σ_x	σ_b	σ_y	σ_a
C_4	C_4	C_4^2	C_4^3	e	σ_a	σ_x	σ_b	σ_y
C_4^2	C_4^2	C_4^3	e	C_4	σ_y	σ_a	σ_x	σ_b
C_4^3	C_4^3	e	C_4	C_4^2	σ_b	σ_y	σ_a	σ_x
σ_x	σ_x	σ_b	σ_y	σ_a	e	C_4	C_4^2	C_4^3
σ_b	σ_b	σ_y	σ_a	σ_x	C_4^3	e	C_4	C_4^2
σ_y	σ_y	σ_a	σ_x	σ_b	C_4^2	C_4^3	e	C_4
σ_a	σ_a	σ_x	σ_b	σ_y	C_4	C_4^2	C_4^3	e

K_8	1	$\imath$	-1	$-\imath$	$\jmath$	$-k$	$-\jmath$	k
1	1	$\imath$	-1	$-\imath$	$\jmath$	$-k$	$-\jmath$	k
$\imath$	$\imath$	-1	$-\imath$	1	k	$\jmath$	$-k$	$-\jmath$
-1	-1	$-\imath$	1	$\imath$	$-\jmath$	k	$\jmath$	$-k$
$-\imath$	$-\imath$	1	$\imath$	-1	$-k$	$-\jmath$	k	$\jmath$
$\jmath$	$\jmath$	$-k$	$-\jmath$	k	-1	$-\imath$	1	$\imath$
$-k$	$-k$	$-\jmath$	k	$\jmath$	$\imath$	-1	$-\imath$	1
$-\jmath$	$-\jmath$	k	$\jmath$	$-k$	1	$\imath$	-1	$-\imath$
k	k	$\jmath$	$-k$	$-\jmath$	$-\imath$	1	$\imath$	-1

jedna od refleksija, generatori su C_n i σ, a relacije $C_n^n = \sigma^2 = (C_n\sigma)^2 = e$. Tablice grupa $\mathbf{C}_4$, $\mathbf{D}_4$ i $\mathbf{C}_{4v}$ su u tabeli C.1.

Rešenje 3.10. Ako je $k = \imath\jmath$, iz generatorskih relacija se nalazi $k^2 = -1$, $\jmath\imath = -k$, pa su elementi grupe $K_8 = \{1, \imath, -1, -\imath, \jmath, -k, -\jmath, k\}$. Inverzni elementi su $-1^{-1} = -1$, $\imath^{-1} = -\imath$, $\jmath^{-1} = -\jmath$ i $k^{-1} = -k$. Tablica grupe je data u tabeli C.1.

Rešenje 3.11. Proveriti po definiciji ili iskoristiti teorem 3.1, (i-ii).

Rešenje 3.12. Proveriti po definiciji ili iskoristiti teorem 3.1.

Rešenje 3.13. Skup je očigledno zatvoren, sadrži e, i za svaki njegov element h^s, sadrži i njegov inverzni element h^{n-s}. Očigledno je da svaka podgrupa koja sadrži h, zbog svoje zatvorenosti, mora sadržati sve stepene h, tj. ceo ciklus.

Rešenje 3.14. Ako je $z, z' \in Z(S)$, tada je za svako $s \in S$ ispunjeno $(zz')s = z(z's) = zsz' = szz'$, tj. $zz' \in Z(S)$; množenjem uslova $zs = sz$ sleva i zdesna elementom z^{-1}, dobija se $z^{-1}s = sz^{-1}$, pa je i $z^{-1} \in Z(S)$. Analogno za normalizator.

Rešenje 3.15. Invertujući sve elemente koseta aH, dobija se skup $(aH)^{-1} = \{a^{-1}, h_2^{-1}a^{-1}, \dots\}$, koji je, zbog zatvorenosti podgrupe i jedinstvenosti inverznog elementa jednak sa $Ha^{-1} = \{a^{-1}, h_2a^{-1}, \dots\}$. Ako b ne pripada aH, tada ni b^{-1} ne pripada Ha^{-1} (inače, ako je $ha^{-1} = b^{-1}$ sledi $b = ah^{-1} \in aH$), te su inverzi leve upravo desna transverzala. Pri fiksiranoj transverzali, $T = \{t_1, \dots, t_{|T|}\}$, i koset Ht_q^{-1} se množenjem sleva elementima t_p preslikava u skupove koji su disjunktni, i sadrže isti broj elemenata kao i H, te je $\cup_{p=1}^{|T|} t_pHt_q^{-1}$ nova particija grupe.

Rešenje 3.16. Za trivijalnu podgrupu $\{e\}$ svaki element je jedan koset, a cela grupa je transverzala; za trivijalnu podgrupu G, sama grupa je jedini koset, a svaki njen element može biti uzet za transverzalu (jednočlana). Ostale podgrupe su:
$\mathbf{C}_4$: $H_1 = \{e, C_4^2\}$, $T_1 = \{e, C_4\}$.
$\mathbf{C}_{4v}$: $H_1 = \{e, C_4^2\}$, $T_1 = \{e, C_4, \sigma_x, \sigma_a\}$, $H_2 = \{e, \sigma_x\}$, $T_2 = \{e, C_4, C_4^2, C_4^3\}$, $H_3 = \{e, \sigma_a\}$,

$T_3 = T_2$, $H_4 = \{e, \sigma_y\}$, $T_4 = T_2$, $H_5 = \{e, \sigma_b\}$, $T_5 = T_2$, $H_6 = \{e, C_4, C_4^2, C_4^3\}$, $T_6 = \{e, \sigma_x\}$, $H_7 = \{e, C_4^2, \sigma_x, \sigma_y\}$, $T_7 = \{e, C_4\}$, $H_8 = \{e, C_4^2, \sigma_a, \sigma_b\}$, $T_8 = T_7$.

Rešenje 3.17. Preslikavanja definisana na generatorima $\pi \mapsto C_n \mapsto C_n$, $\phi \mapsto U \mapsto \sigma$ su izomorfizmi $S_3 \to \mathbf{D}_3 \to \mathbf{C}_{3v}$ (oznake iz zadataka 3.8 i 3.9). Za svako n u grupama $\mathbf{D}_n$ i $\mathbf{C}_{nv}$ se generatorske relacije dobijaju za $a = C_n$ i $b = U$, odnosno $b = \sigma$.

Rešenje 3.18. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. Samo za Abel-ove grupe je $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, tj. $i(g)$ je morfizam, pa kako je očigledno bijekcija, tada je i automorfizam.

Rešenje 3.19. $f_h(gg') = hgg'h^{-1} = hgh^{-1}hg'h^{-1} = f_h(g)f_h(g')$, pa je f_h homomorfizam. Kako je $f_{hk}(g) = (hk)g(hk)^{-1} = h(kgk^{-1})h^{-1} = f_h(f_k(g))$, $\mathrm{Int}\, G$ je grupa koja je homomorfni lik grupe G. Jezgro je centar grupe G, jer se svakom elementu centra pridružuje identično preslikavanje.

Rešenje 3.20. Jedan izomorfizam je $a \mapsto \imath, b \mapsto \jmath$.

Rešenje 3.21. Kako svaki koset male grupe preslikava x u jednu tačku orbite, i ove tačke su za različite kosete različite, relacija je zapravo Lagrange-ov teorem.

Rešenje 3.22. Postoje dve orbite, jednu čine 4 jona X, a drugu jon Y. Uz oznake zadatka 3.16 je $G_Y = \mathbf{C}_{4v}$, $G_A = G_C = H_3$, $G_B = G_D = H_5$.

Rešenje 3.23. Ako je dejstvo tranzitivno, orbita je ceo skup X, a ako je slobodno, mala grupa svake tačke je $\{e\}$.

Rešenje 3.24. Rotacije u $\mathbb{R}^3$: koordinatni početak je jedna orbita, sa malom grupom jednakoj celoj grupi; svaka sfera pozitivnog radijusa je jedna orbita, a malu grupu tačke na takvoj sferi čine sve rotacije oko radijus vektora te tačke.
$\mathbf{C}_{4v}$: Koordinatni početak je jedna orbita (mala grupa $\mathbf{C}_{4v}$); tačke na vertikalnim ravnima simetrije daju drugi tip četvoročlanih orbita, i njihova mala grupa sadrži pored jediničnog elementa i odgovarajuću refleksiju; ostale tačke pripadaju osmočlanim orbitama, sa malom grupom $\{e\}$.

Rešenje 3.25. Ovo je u stvari alternativna slika Lagrange-ovog teorema. Dejstvo je slobodno, jer iz $hg = g$ sledi $h = e$. Nije tranzitivno (osim ako je $H = G$).

Rešenje 3.26. $\mathbf{C}_4$: Abel-ova grupa, pa je svaki element jedna klasa; pri tome su $\{e\}$ i $\{C_4^2\}$ ambivalentne.
$\mathbf{C}_{4v}$: $C^1 = \{e\}$, $C^2 = \{C_4^2\}$, $C^3 = \{C_4, C_4^3\}$, $C^4 = \{\sigma_x, \sigma_y\}$, $C^5 = \{\sigma_a, \sigma_b\}$; sve su ambivalentne.

Rešenje 3.27. Ako je τ_{ij} transpozicija elemenata i i j, lako je uveriti se da je za svaku drugu transpoziciju τ_{mn} ispunjeno $\tau_{mn} = (\tau_{jn})\tau_{im})\tau_{ij}(\tau_{im}\tau_{jn})$. Pri tome su proizvodi u zagradama na levoj i desnoj strani τ_{ij} međusobno inverzne permutacije. U specijalnim slučajevima, kada parovi $\{m, n\}$ i $\{i, j\}$ nisu disjunktni, lako se dobijaju još jednostavniji izrazi. Uopšteno: klasa konjugacije grupe S_n je tačno skup svih permutacija jednake forme u cikličnom zapisu permutacije.

Rešenje 3.28. Neka je $h \in C^iC^j$ i $C(h) = C^k$, i pri tome se pojavljuje m puta, tj. postoji m parova elemenata iz C^i i C^j čiji je proizvod h: $h = h_1^i h_1^j = \ldots = h_m^i h_m^j$. Tada za svaki element $ghg^{-1} \in C(h)$ važi $ghg^{-1} = gh_s^i g^{-1} gh_s^j g^{-1}$ $(s = 1, \ldots, m)$. Svi elementi $gh_s^i g^{-1}$ medjusobno su različiti, kao i elementi $gh_s^j g^{-1}$ (jer je konjugacija automorfizam), pa se i ghg^{-1} u C^iC^j pojavljuje tačno m puta. Komutativnost množenja klasa se dobija analizom činjenice da je svaki element $h^i h^j \in C^i C^j$ jednak $h^j({h^j}^{-1} h^i h^j) \in C^j C^i$.

Rešenje 3.29. 1. Zbog komutiranja je svaki element klasa, i svaka podgrupa sadrži cele klase;
2. svaki element centra je klasa;
3. pošto pored podgrupe postoji samo jedan koset, on je i levi i desni;
4. sledi iz 3.
5. element 1 je reda 1, element -1 reda 2, a ostali su reda 4; stoga su netrivijalne podgrupe ili $\{1,-1\} = Z(K_8)$ ili ciklične grupe generisane nekim od preostalih elementa; pošto su reda 4, indeks im je 2.

Rešenje 3.30. Među podgrupama grupe $\mathbf{C}_{4v}$ (zadatak 3.16) invarijantne su, pored trivijalnih, H_1, H_6, H_7 i H_8, jer se sastoje iz celih klasa (zadatak 3.26). Faktor grupe trivijalnih podgrupa bilo koje grupe su $F_e = G$, $F_G = \{e\}$. Za ostale je $F_1 = \{H_1, C_4H_1, \sigma_x H_1, \sigma_a H_1\}$,$F_6 = \{H_6, \sigma_x H_6\}$, $F_7 = \{H_7, C_4H_7\}$, $F_8 = \{H_8, C_4H_8\}$; F_1 je izomorfna Klein-ovoj grupi $\mathbf{D}_2$, a ostale grupi $\mathbf{C}_2$. Pošto je F_e izomorfno sa $\mathbf{D}_4$ a $F_{\mathbf{C}_{4v}}$ sa $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_{4v}$ se homomorfno može preslikati u apstraktne grupe $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{D}_2$ i $\mathbf{D}_4$.

Rešenje 3.31. Ako je $m = \frac{|G|}{|H|}$ prost broj, faktor grupa, budući reda m, mora biti $\mathbf{C}_m$. S_n/A_n je izomorfna sa $\mathbf{C}_2$, a elementi su joj koseti parnih i neparnih permutacija.

Rešenje 3.32. Poći od definicije kompleksnih brojeva kao uređenih parova realnih, $z = (x, y) = x + \imath y$, sa sabiranjem $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

Rešenje 3.33. Proveriti direktno, množeći matrice.

Rešenje 3.34. Proveriti ispunjenost uslova iz definicija različitih tipova proizvoda.

Rešenje 3.35. Formalnim linearnim kombinacijama nad elementima iz X, dobija se prostor span (X), u kome deluje $D^P(G)$. Dejstvo grupe na X, proširenjem po linearnosti, postaje operatorska reprezentacija $D^P(G)$ (kako je dejstvo grupe na X homomorfizam, i D^P je homomorfizam), gde za bazisni vektor $\mid x\rangle$, pridružen tački x iz X, važi $D(g) \mid x\rangle =\mid y\rangle$, ako je $gx = y$. Stoga je dimenzija reprezentacije $|D^P(G)| = |X|$. U bazisu $\{\mid x\rangle \mid x \in X\}$ matrice reprezentacije se dobijaju formulom reprezentovanja: $D^P_{yx} = \delta_{y,gx}$.

Rešenje 3.36. $D(h)D(g)f(x) = D(h)f(g^{-1}x) = f(g^{-1}h^{-1}x) = f((hg)^{-1}x) = D(hg)f(x)$. U izrazima g treba shvatiti kao brojnu matricu, tako da je $g^{-1}x$ vektor čije su koordinate linearne kombinacije odabranih koordinata u $\mathbb{R}^n$. Operator $D(g)$ je dualan operatoru $D^P(g)$ iz zadatka 3.35 (G je grupa transformacija na $\mathbb{R}^n$).

Rešenje 3.37. $\mathbf{C}_4$: $D^R(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix} = A$;
$\mathbf{C}_{4v}$: $D^R(C_4) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix}$; $D^R(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & 0 \end{pmatrix}$.

Rešenje 3.38. Operatori preslikavaju bazis u bazis, te su nesingularni, a homomorfizam se lako proverava.

Rešenje 3.39. Operator C je pozitivan jer mu je takav svaki sabirak $D^\dagger(g)D(g)$. Jedinstveni pozitivni koren T ($C = T^2$) daje unitarnu reprezentaciju $D'(G) = TD(G)T^{-1}$: za svako g iz G važi $D'^{\dagger}(g)D'(g) = (T^{-1}D^{\dagger}(g)T)(TD(g)T^{-1}) = T^{-1}(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} D^{\dagger}(g)D^{\dagger}(h)D(h)D(g))T^{-1} = T^{-1}(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} D(hg)^{\dagger}D(hg))T^{-1} = I$ (poslednja jednakost sledi iz leme preuređenja: izraz u zagradi je jednak T^2).

Rešenje 3.40. $\mathbf{C}_{3v}$: $D_e(C_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $D_e(\sigma_a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $D_f(C_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_f(\sigma_a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Za operator prelaska iz jednog u drugi bazis, $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, je $D_f = A^{-1}D_eA$. Unitarna je samo D_e.
$D_e(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_e(\sigma_a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_f(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D_f(\sigma_a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; operator prelaska iz jednog u drugi bazis, $A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ zadovoljava $D_f = A^{-1}D_eA$. Unitarne su obe reprezentacije.

Rešenje 3.41. $D^{pv}(C_4) = D^{av}(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^{pv}(\sigma_x) = -D^{av}(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^{pv}(U_x) = D^{pv}(U_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Jednake su ako grupa sadrži samo rotacije ($\mathbf{C}_4$ i $\mathbf{D}_4$).

Rešenje 3.42. Uslov homomorfizma: $\begin{pmatrix} 1 & r+r' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(r+r')$. Potprostor obrazovan vektorom $(1,0)^T$ je invarijantan. Matrica $D(r)$ ima dvostruku svojstvenu vrednost 1, ali je samo gornji potprostor svojstveni, te nema komplementarnog invarijantnog potprostora, i reprezentacija je mada reducibilna, nerazloživa.

Rešenje 3.43. Svaki vektor $y \in \mathcal{H}_x$ je linearna kombinacija skupa $\{x_g = D(g)x \mid g \in G\}$. Stoga je $D(h)y = D(h)\sum_g c_g x_g = \sum_g c_g x_{hg} \in \mathcal{H}$. Reprezentacija je ireducibilna ako i samo ako je orbita svakog nenultog vektora obrazujući skup (novi *kriterijum ireducibilnosti*).

Rešenje 3.44. Direktnom proverom.

Rešenje 3.45. Kompozicija $G \to G/H \to D(G/H)$ kanoničnog homomorfizma i reprezentacije je homomorfizam grupe G.

Rešenje 3.46. $\mathbf{C}_4$: $A_m(C_4^s) = e^{\imath\frac{2\pi}{4}ms} = \imath^{ms}$, $m = 0, \pm1, 2$; sve su unitarne;
T: $D^{(k)}(I|t) = e^{\imath kt}$, $\mathrm{Re}k \in (-\pi, \pi]$, $\mathrm{Im}k \in \mathbb{R}$; unitarne za realno k.

Rešenje 3.47. Izraz za matrične elemente permutacione reprezentacije daje $D^P_{xx}(g) = \delta_{x,gx}$, pa je karakter $\chi^P(g)$ jednak broju nepokretnih tačaka za element g. U primeru je $\chi^P = (5,1,1,1,1,3,1,3)$, pa je $D^P = 2A_0 \oplus B_2 \oplus E$.

Rešenje 3.48. $\chi^{pv}(\mathbf{C}_4) = \chi^{av}(\mathbf{C}_4) = (3,1,-1,1)$, te je
$D^{pv}(\mathbf{C}_4) = D^{av}(\mathbf{C}_4) = A_0(\mathbf{C}_4) \oplus A_1(\mathbf{C}_4) \oplus A_{-1}(\mathbf{C}_4)$.
$\chi^{pv}(\mathbf{C}_{4v}) = (3,1,-1,1,1,1,1,1)$, $\chi^{av}(\mathbf{C}_{4v}) = (3,1,-1,1,-1,-1,-1,-1)$;

$D^{pv}(\mathbf{C}_{4v}) = A_0(\mathbf{C}_{4v}) \oplus E(\mathbf{C}_{4v})$, $D^{av}(\mathbf{C}_{4v}) = B_0(\mathbf{C}_{4v}) \oplus E(\mathbf{C}_{4v})$.

Rešenje 3.49. $S_n/A_n \cong \mathbf{C}_2$ ima dve ireducibilne reprezentacije, $A_0(C_2) = 1$, $A_1(C_2) = -1$. Dve ireducibilne reprezentacije S_n su pridruživanje brojeva neparnim ± 1, a broja 1 parnim permutacijama. Sa druge strane, za sve transpozicije važi $\tau^2 = e$, pa ako je $D(S_n)$ jednodimenzionalna, mora biti $D(\tau) = \pm 1$. Pri tome, pošto su sve iz iste klase, transpozicije imaju isti karakter, pa je istovremeno za sve njih $D(\tau)$ ili 1 ili -1. Sledi da su parne permutacije u jednodimenzionalnim reprezentacijama reprezentovane sa 1, a neparne na isti način kao i τ.

Rešenje 3.50. Konjugovanjem, uslov homomorfizma početne reprezentacije, daje homomorfizam za konjugovane matrice. Istovremena ireducibilnost zato što se $\frac{1}{|G|}\sum_g \chi^*(g)\chi(g) = 1$ ne menja konjugacijom (kriterijum ireducibilnosti).

Rešenje 3.51. U bazisu $\{|\,Y\rangle, |\,A\rangle, |\,B\rangle, |\,C\rangle, |\,D\rangle\}$, matrice generatora su
$D^P(C_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_3 & 0 \end{pmatrix}$ i $D^P(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$, a standardni bazis $\{|\,A_0,1,1\rangle = (1,0,0,0,0)^T$,
$|\,A_0,2,1\rangle = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T, |\,B_2,1,1\rangle = (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})^T, |\,E,1,1\rangle = (0,\frac{1}{2},-\frac{\imath}{2},-\frac{1}{2},\frac{\imath}{2})^T$,
$|\,E,1,2\rangle = (0,\frac{\imath}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\imath}{2},\frac{1}{2})^T\}$.
U Descartes-ovom bazisu standardni vektori vektorske reprezentacije $\mathbf{C}_4$ su
$\{|\,A_0,1,1\rangle = (0,0,1)^T, |\,A_1,1,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-\imath,0)^T, |\,A_{-1},1,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,\imath,0)^T\}$.
$D^{pv}(\mathbf{C}_{4v})$: $\{|\,A_0,1,1\rangle = (0,0,1)^T, |\,E,1,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-\imath,0)^T, |\,E,1,2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,\imath,0)^T\}$;
$D^{av}(\mathbf{C}_{4v})$: $\{|\,B_0,1,1\rangle = (0,0,1)^T, |\,E,1,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-\imath,0)^T, |\,E,1,2\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,\imath,0)^T\}$.

Rešenje 3.52. Clebsch-Gordan-ove serije su ($m,n = 0,2$, $k = (m+n)\bmod 2$): $A_m \otimes A_n = B_m \otimes B_n = A_k$, $A_m \otimes B_n = B_m \otimes A_n = B_k$, $A_m \otimes E = B_m \otimes E = E \otimes A_m = E \otimes B_m = E$, $E \otimes E = A_0 + B_0 + A_2 + B_2$. Za proizvode jednodimenzionalnih reprezentacija svi nenulti Clebsch-Gordan-ovi koeficijenti, tj. oni koji su dozvoljeni serijama, su 1. Ostali nenulti koeficijenti su:
$\langle A_0,1;E,1\,|\,E,1,1\rangle = \langle A_0,1;E,2\,|\,E,1,2\rangle = 1, \langle B_0,1;E,1\,|\,E,1,1\rangle = -\langle B_0,1;E,2\,|\,E,1,2\rangle = 1$,
$\langle A_2,1;E,1\,|\,E,1,2\rangle = \langle A_2,1;E,2\,|\,E,1,1\rangle = 1, -\langle B_2,1;E,1\,|\,E,1,2\rangle = \langle B_2,1;E,2\,|\,E,1,1\rangle = 1$,
$\langle E,1;E,2\,|\,A_0,1\rangle = \langle E,2;E,1\,|\,A_0,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}, \langle E,1;E,2\,|\,B_0,1\rangle = -\langle E,2;E,1\,|\,B_0,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\langle E,1;E,1\,|\,A_2,1\rangle = \langle E,2;E,2\,|\,A_2,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}, \langle E,1;E,1\,|\,B_2,1\rangle = -\langle E,2;E,2\,|\,B_2,1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rešenje 3.53. $D^P \otimes D^{pv} = 3A_0 + B_0 + A_2 + 2B_2 + 4E$.

Rešenje 3.54. Operatori $D(g)$ komutiraju sa operatorima $\Delta(\pi)$:

$$D^n(g)\Delta(\pi)\,|\,j_1,\ldots,j_n\rangle = D^n(g)\,|\,j_{\pi^{-1}1},\ldots,j_{\pi^{-1}n}\rangle = \sum_{i_1,\ldots,i_n} D_{i_1 j_{\pi^{-1}1}}(g)\cdots D_{i_n j_{\pi^{-1}n}}(g)\,|\,i_1,\ldots,i_n\rangle,$$

$$\Delta(\pi)D^n(g)\,|\,j_1,\ldots,j_n\rangle = \sum_{i_1,\ldots,i_n} D_{i_1 j_1}(g)\cdots D_{i_n j_n}(g)\,|\,j_1,\ldots,j_n\rangle =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n} D_{i_1 j_1}(g)\cdots D_{i_n j_n}(g)\,|\,i_{\pi^{-1}1},\ldots,i_{\pi^{-1}n}\rangle;$$

smenom indeksa $i_{\pi^{-1}s} \mapsto i_s$, i uočavanjem da je $D_{i_{\pi s},j_s}(g) = D_{i_s,j_{\pi^{-1}s}}(g)$, poslednja dve izraza se izjednačavaju. To znači da se operatori $D^n(G)$ redukuju u svim invarijantnim potprostorima za

$\Delta(S_n)$ (komutiraju i sa grupnim projektorima). Za $n=2$, iz definicije sledi

$$[D^2(g)]_{j_1j_2,i_1i_2} = \frac{1}{2}(D_{j_1i_1}(g)D_{j_2i_2}(g) + D_{j_2i_1}(g)D_{j_1i_2}(g)),$$

$$\{D^2(g)\}_{j_1j_2,i_1i_2} = \frac{1}{2}(D_{j_1i_1}(g)D_{j_2i_2}(g) - D_{j_2i_1}(g)D_{j_1i_2}(g)),$$

pa je

$$[\chi^2(g)] = \frac{1}{2}((\mathrm{Tr}\,D(g))^2 + \mathrm{Tr}\,(D^2(g))) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) + \chi(g^2)),$$

$$\{\chi^2(g)\} = \frac{1}{2}((\mathrm{Tr}\,D(g))^2 - \mathrm{Tr}\,(D^2(g))) = \frac{1}{2}(\chi^2(g) - \chi(g^2)).$$

Rešenje 3.55. $\mathbf{C}_4$: $A_0(\mathbf{C}_{4v})\downarrow\mathbf{C}_4 = B_0(\mathbf{C}_{4v})\downarrow\mathbf{C}_4 = A_0(\mathbf{C}_4)$, $A_2(\mathbf{C}_{4v})\downarrow\mathbf{C}_4 = B_2(\mathbf{C}_{4v})\downarrow\mathbf{C}_4 = A_2(\mathbf{C}_4)$, $E(\mathbf{C}_{4v})\downarrow\mathbf{C}_4 = A_1(\mathbf{C}_4)\oplus A_{-1}(\mathbf{C}_4)$.
$\{e,\sigma_x\} = H$: $A_0(\mathbf{C}_{4v})\downarrow H = A_2(\mathbf{C}_{4v})\downarrow H = A_0(H)$, $B_0(\mathbf{C}_{4v})\downarrow H = B_2(\mathbf{C}_{4v})\downarrow H = B_0(H)$, $E(\mathbf{C}_{4v})\downarrow H = A_0(H)\oplus B_0(H)$.

Rešenje 3.56. $D_i(\mathbf{C}_{4v}) = A_i(H)\uparrow\mathbf{C}_{4v}$ $(i=0,1)$: $D_0(C_4) = D_1(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix}$, $D_0(\sigma_x) = -D_1(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_3 \end{pmatrix}$. Reducibilnost se vidi iz dimenzije ($4^2=16$ je veće od reda grupe), ili na osnovu karaktera.

Rešenje 3.57. $\mathbf{C}_2$. Svaka od reprezentacija $A_i(\mathbf{C}_2)$ $(i=0,1)$ je jedna orbita, i mala grupa je u oba slučaja $\mathbf{C}_{4v}$. Odgovarajuće indukovane reprezentacije su ($L_i = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^i \end{pmatrix}$) $D_i(C_4) = D_1(C_4) = \begin{pmatrix} L_i & 0 \\ 0 & L_i \end{pmatrix}$, $D_1(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 0 & K_i \\ K_i & 0 \end{pmatrix}$. Razlaganja su $D_0 = A_0\oplus B_0\oplus A_2\oplus B_2$ i $D_1 = 2E$, pa su asocirani skupovi $A^{(0)} = \{A_0,B_0,A_2,B_2\}$ i $A^{(1)} = \{E\}$. Sužavanjem ireducibilnih reprezentacija grupe $\mathbf{C}_{4v}$ na $\mathbf{C}_2$ dobija se isti rezultat.
$\mathbf{C}_4$: ireducibilne reprezentacije podgrupe su $A_m(\mathbf{C}_4)$ $(m=-1,0,1,2)$. Orbite su $O^{(0)} = \{A_0\}$, $O^{(2)} = \{A_2\}$, $O^{(\pm1)} = \{A_{-1},A_1\}$, a male grupe $L^{(0)} = O^{(2)} = \mathbf{C}_{4v}$, $L^{(\pm1)} = \mathbf{C}_4$. Odgovarajuće indukovane reprezentacije su $D_m(C_4) = \begin{pmatrix} \imath^m & 0 \\ 0 & (-\imath)^m \end{pmatrix}$ i $D_m(\sigma_x) = J_2$. Lako se nalaze razlaganja: za $m=0,2$ $D_m = A_m + B_m$, a za $m=\pm1$ $D_m = E$. Stoga su asocirani skupovi $A^{(0)} = \{A_0,B_0\}$, $A^{(2)} = \{A_2,B_2\}$, $A^{(1)} = \{E\}$, i, sužavanjem na $\mathbf{C}_4$ se proverava Frobenius-ov teorem.

Rešenje 3.58. $\mathbf{C}_{4v}$: Rezultat je u tabeli 3.2, a rešenje neposredno sledi iz rešenja zadatka 3.57.
K_8: Ponavljajući istu proceduru kao za $\mathbf{C}_{4v}$, samo za generatore $\imath$ i $\jmath$ (umesto C_4 i σ_x), nalazi se tabela ireducibilnih reprezentacija u kojoj su A_0, B_0, A_2 i B_2 za generatore iste kao za $\mathbf{C}_{4v}$, dok je $E(\imath) = E(C_4)$, ali $E(\jmath) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Rešenje 3.59. Orbite i male grupe reprezentacija grupe $\mathbf{C}_4$ su određene u zadatku 3.57. Za $m = 0,2$, tj. reprezentacije $A_m(\mathbf{C}_4)$ je $L^{(m)} = \mathbf{C}_{4v} = \mathbf{C}_4\wedge\{e,\sigma_x\}$. Ireducibilne reprezentacije grupe $\mathbf{C}_2 = \{e,\sigma_x\}$ su zadate sa $d^{(\pm)}(\sigma_x) = \pm$, pa se direktnim množenjem dobijaju $A_m(\mathbf{C}_4)\otimes d^{(\pm)}(\mathbf{C}_2)$ i to su $A_m(\mathbf{C}_{4v})$ i $B_m(\mathbf{C}_{4v})$. Prestale dve reprezentacije čine jednu orbitu, $O^{(1)}$, sa malom grupom $L^{(1)} = \mathbf{C}_4 \wedge \{e\}$. Trivijalna grupa ima samo jediničnu reprezentaciju, pa preostaje indukcija $A_1(\mathbf{C}_4) \uparrow \mathbf{C}_{4v}$ čime se dobija reprezentacija $E(\mathbf{C}_{4v})$.

Rešenje 3.60. Rezultat su reprezentacije $A_0^{\pm}$, $B_0^{\pm}$, $A_2^{\pm}$, $B_2^{\pm}$ i $E^{\pm}$, koje su na podgrupi $\mathbf{C}_{4v}$ upravo odgovarajuće reprezentacije podgrupe, dok se σ_h reprezentuje sa ± 1 u reprezentacijama dimenzije 1, a sa $\pm I_2$ u $E^{\pm}$.

C.4 Lie-jeve algebre

Rešenje 4.1. T je vektorski prostor po konstrukciji. Razlaganjem bilo kog vektora $t \in T$ na komponente iz sume, $t = \sum_{rs} t_s^r$, pokazuje se da je direktni proizvod asocijativan i linearan (jer je množenje komponenti takvo), a da je T zatvoren na množenje.

Rešenje 4.2. Neka su $\{x_1, \dots, x_n\}$ i $\{y_1, \dots, y_n\}$ dva bazisa algebre za koje je $Ax_i = y_i$, i odgovarajuće strukturne konstante c_{ij}^k i d_{ij}^k. Zamenom veze bazisa u obe strane jednačine $y_i y_j = \sum d_{ij}^k y_k$, nalazi se izraz $\sum_{pqr} A_{pi} A_{qj} A_{sr}^{-1} c_{pq}^r = d_{ij}^s$.

Rešenje 4.3. Iz $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ sledi $a_{ij,kl}^{st} = \delta_{is}\delta_{lt}\delta_{kj}$.

Rešenje 4.4. a) $c_{ij}^k = a_{ij}^k - a_{ji}^k$; dobija se direktnom zamenom.
b) $c_{ij,kl}^{st} = \delta_{is}\delta_{lt}\delta_{kj} - \delta_{ks}\delta_{jt}\delta_{il}$, tj. $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{li}E_{kj}$.

Rešenje 4.5. a) $\dim L = 1$: po jedna, Abel-ova algebra nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.
b) $\dim L = 2$: Neka je bazis $\{x, y\}$, i $[x, y] = \alpha x + \beta y$ jedina moguća nenulta komutaciona relacija. Postoje 4 mogućnosti:

1. $\alpha = \beta = 0$; Abel-ova algebra dimenzije 2.
2. $\alpha \neq 0, \quad \beta = 0$; promenom bazisa $\{a = x, b = \frac{y}{\alpha}\}$ dobija se nenulta strukturna konstanta 1, $[a, b] = a$.
3. $\alpha = 0, \quad \beta \neq 0$; zamenom mesta vektora x i y svodi se na prethodnu.
4. $\alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0$; promenom bazisa pomoću nesingularne matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\beta}{\alpha} & \frac{\beta+1}{\alpha} \end{pmatrix}$, svodi se na prethodne.

Prema tome, za svako polje postoje 2 algebre dimenzije 2.

Rešenje 4.6. a) Vektorsko množenje je kososimetrično i zadovoljava Jacobi-jev identitet. U apsolutnom bazisu $e_i \times e_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} e_k$.
b), c) Proveriti po definiciji.

Rešenje 4.7. Kod svih podskupova u $\mathrm{gl}(n, \mathbb{F})$ su automatski ispunjene osobine komutatora. Treba samo proveriti zatvorenost svih operacija: $\mathrm{sl}(n, \mathbb{F})$ je potprostor, jer je trag linearna operacija, a trag komutatora bilo koje dve matrice jednak je nuli. Pošto je jedini uslov $\mathrm{Tr}\, a = 0$ linearan, u pitanju je algebra dimenzije $n^2 - 1$.

Rešenje 4.8. Kao u prethodnom zadatku, treba proveriti zatvorenost svih operacija: $\mathrm{so}_M(n,\mathbb{F})$ je očigledno potprostor; iz $A,B\in\mathrm{so}_M(n,\mathbb{F})$ sledi $[A,B]^TM=(B^TA^T-A^TB^T)M=-M[A,B]$, a zbog $A^T=-MAM^{-1}$ je $\mathrm{Tr}\,A=0$.

Rešenje 4.9. a) $\mathrm{so}(p,q,\mathbb{F})$ je vektorski prostor: $\forall A,B\in\mathrm{so}(p,q,\mathbb{F})$, $(\alpha A+\beta B)^TM(p,q)=-M(p,q)(\alpha A+\beta B)$. Dalje, trag komutatora svih matrica, pa i elemenata $\mathrm{so}(p,q,\mathbb{F})$, je nula, a zatvorenost komutatora sledi iz zadatka 4.8. Podmatrična struktura proizvoljnog elementa $\mathrm{so}(p,q,\mathbb{F})$ je $A=\begin{pmatrix} a & b\\ b^T & d\end{pmatrix}$, gde su a i d kososimetrične matrice (njihov trag je uvek nula) reda p i q, a b proizvoljna matrica tipa $p\times q$. Odavde sledi da je dimenzija algebre $\frac{1}{2}p(p-1)+\frac{1}{2}q(q-1)+pq=n(n-1)/2$. $[A_{ij},S_{kl}]=\delta_{jk}S_{il}-\delta_{il}S_{jk}+\delta_{lj}S_{ki}-\delta_{ki}S_{lj}$, $[A_{ij},A_{kl}]=\delta_{jk}A_{il}+\delta_{il}A_{jk}+\delta_{lj}A_{ki}+\delta_{ki}A_{lj}=[S_{ij},S_{kl}]$.
b) $c_{ij}^k=\varepsilon_{ijk}$.
c) Lako se proverava da su iz $\mathrm{so}(1,3,\mathbb{R})$, da su linearno nezavisne i ima ih 6 (kolika je dimenzija algebre). $[r_i,r_j]=\sum_k\varepsilon_{ijk}r_k=-[b_i,b_j]$ i $[r_i,b_j]=\sum_k\varepsilon_{ijk}b_k$.

Rešenje 4.10. a) $[A,B]^\dagger=[B^\dagger,A^\dagger]=-[A,B]$ za kosohermitske matrice, tj. i komutator je kosohermitska matrica. Ostalo se dokazuje kao i ranije (samo su realne linearne kombinacije kosohermitskih matrica kosohermitske, pa je ovo realna algebra, tj. nije podalgebra u $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})$). Jedan bazis su matrice $\{D_k=\imath E_{kk}-\imath E_{nn},A_{ij}=E_{ij}-E_{ji},S_{ij}=\imath E_{ij}+\imath E_{ji}|\quad k<n,\quad i<j\}$. Stoga je dimenzija $2n(n-1)/2+n-1=n^2-1$.
b) $c_{ij}^k=\varepsilon_{ijk}$.
c) Linearno su nezavisne, ima ih 8 i sve su iz $\mathrm{su}(3)$.

Rešenje 4.11. Provera se vrši kao i do sada. Bazis je kao za $\mathrm{su}(n)$, osim što se D_k zamene matricama $\imath E_{ii}$, $\quad i=1,...,n$. Zato je dimenzija n^2.

Rešenje 4.12. Iz zadatka 4.8 sledi da je algebra. Neka je

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{sp}(n,\mathbb{F}),\quad a,b,c,d\in\mathrm{gl}(n,\mathbb{F}).$$

Uslov $A^TM=-MA$ daje relacije $a=-d^T, c=c^t$ i $b=b^T$, odakle se lako nalazi $\dim\mathrm{sp}(n,\mathbb{F})=n(2n+1)$.

Rešenje 4.13. a) Trag komutatora bilo koje dve matrice je 0, tj. iz $\mathrm{sl}(n,\mathbb{F})$, pa je to ideal u $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$. Iz Schur-ove leme sledi da su im centri skupovi skalarnih matrica. Međutim samo nulta skalarna matrica ima trag jednak nuli, pa je $Z(\mathrm{sl}(n,\mathbb{F}))=0$.
b) Skalarne kosohermitske matrice su ($c\in\mathbb{R}$): $\{\imath cI\}=Z(\mathrm{u}(n))=\mathrm{u}(1)$. $Z(\mathrm{su}(n))=0$.
c) $Z(\mathrm{so}(n,\mathbb{F}))=0$.

Rešenje 4.14. t^4 je obrazovana skupom $\{p_\mu\}$. Ostalo po definiciji.

Rešenje 4.15. a) I jedno i drugo su realne algebre, i u bazisima iz zadataka 4.9.b i 4.10.b imaju iste strukturne konstante.
b) Obe su trodimenzionalne kompleksne algebre. Bazis iz zadatka 4.10.b je i bazis za $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, a bazis iz zadatka 4.9.b obrazuje $\mathrm{so}(3,\mathbb{C})$ (sada su dozvoljene kombinacije sa kompleksnim koeficijentima). Prema tome imaju iste strukturne konstante i nad istim su poljem.

Rešenje 4.16. gl$(n,\mathbb{F})$: $\mathrm{ad}(\sum\xi^{ij}E_{ij})E_{kl} = \sum_{ij}\xi^{ij}(\delta_{jk}E_{il}-\delta_{li}E_{kj})$, tj. $\mathrm{ad}(\sum\xi^{ij}E_{ij})_{pq,kl} = \xi^{pk}\delta_{ql}-\xi^{lq}\delta_{kp}$.

so$(3,\mathbb{R})$: $\mathrm{ad}(r_i)=r_i$, $\quad \mathrm{ad}(\sum\xi^i r_i) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$.

Heisenberg-ova: $\mathrm{ad}(\alpha I+\beta q+\gamma p) = \begin{pmatrix} 0 & -\imath\gamma & \imath\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Rešenje 4.17. Linearnost preslikavanja je očigledna pa treba pokazati samo homomorfizam komutatora: $[D(x),D(y)]_\mp = \sum_{ijkl}[a_i^\dagger x_{ij}a_j, a_k^\dagger y_{kl}a_l]_\mp = \sum_{ijkl}x_{ij}y_{kl}(a_i^\dagger a_j a_k^\dagger a_l \mp a_k^\dagger a_l a_i^\dagger a_j) =$
$= \sum_{ijkl}x_{ij}y_{kl}(\delta_{jk}a_i^\dagger a_l \mp a_i^\dagger a_k^\dagger a_j a_l - \delta_{il}a_k^\dagger a_j \pm a_k^\dagger a_i^\dagger a_l a_j) = D([x,y])$.

Rešenje 4.18. Matrica forme je $w=\mathrm{diag}(1,-1)$, pa je nedegenerisana. $\mathrm{span}^\perp(x+y)=\mathrm{span}\,(x+y)$.

Rešenje 4.19. $w(\mathrm{ad}(x)y,z)=w([x,y],z)=-w([y,x],z)=-w(y,[x,z])=-w(y,\mathrm{ad}(x)z)$.

Rešenje 4.20. a) Neka je $\{x_1,\dots,x_n\}$ adaptirani bazis u L, sa prvih m vektora iz ideala A. Uslov da element x bude iz $A^\perp$ je $g(x,x_i)=0,\quad i=1,...,m$. Ovo je linearni sistem od m jednačina sa n nepoznatih (koordinate vektora x u datom bazisu). Matricu sistema čini prvih m vrsta g, pa je maksimalnog ranga, tj. ima $n-m$ nezavisnih rešenja.
b) U adaptiranom bazisu za proizvoljne elemente a i b ideala A važi:

$$\mathrm{ad}(a)=\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{ad}(b)=\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & 0\end{pmatrix}, g(a,b)=\mathrm{Tr}\,(AB).$$

Matrice A i B su matrice pridružene reprezentacije ideala.

Rešenje 4.21. b) Pokazati da za vektore $u_i=\frac{1}{2}(r_i+\imath b_i)$ važe komutacione relacije kao za vektore r_i, i isto to za kombinacije $v_i=\frac{1}{2}(r_i-\imath b_i)$, dok im se unakrsni komutatori anuliraju.
c) Za bazis dekompleksifikacije uzeti onaj iz zadatka 4.10.b, i pokazati da se dobijaju komutacione relacije kao u zadatku 4.9.c.

Rešenje 4.22. a) Iz zadatka 4.16.a se nalazi $g(x,y)=2n\mathrm{Tr}\,(xy)-2\mathrm{Tr}\,x\mathrm{Tr}\,y$. Skalarne matrice su očigledno iz $N(g)$, pa gl$(n,\mathbb{F})$ nije poluprosta.
b) Na osnovu prvog dela je $g(x,y)=2n\mathrm{Tr}\,(xy)$. U standardnom Cartan-Weyl-ovom bazisu $\{D_k,E_{ij},E_{ji}\mid k=1,...,n-1; i<j\}$ je $g=2n\mathrm{diag}(A,B,...,B)$, sa $A=2I_{n-1}$ i $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Algebra je zato poluprosta.
c) $g=-2I_3$. Poluprosta.
d) $g=0$. Razrešiva (u stvari je nilpotentna).

Rešenje 4.23. Ako je $A=B+\imath C$, gde su B i C realne matrice u nekom bazisu, i slično $g=h+\imath k$, osnovnom formulom reprezentovanja u dekompleksifikovanom bazisu se nalaze matrice

$$A_R=\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B\end{pmatrix},\quad g_R=\begin{pmatrix} 2h & -2k \\ -2k & -2h\end{pmatrix}.$$

Ako se u g_R druga vrsta pomnoži sa $\imath$ i doda prvoj, pa u novoj matrici prva kolona pomnoži sa $\imath$ i doda drugoj, nalazi se da je $\det g_R = -4|\det g|^2$, tj. istovremeno su obe determinante jednake nuli ili različite od nule.

Rešenje 4.24. Heisenberg-ova algebra je razrešiva.

Rešenje 4.25. Proveriti da su ovi skalarni proizvodi invarijantni, a pozitivnost je poznata.

Rešenje 4.26. Proveriti da je ovaj skup jednak svom normalizatoru. Rang je $n-1$. Cartan-Weyl-ov bazis je: $\{H_i = E_{ii} - E_{nn}, E_{kl} \mid i = 1...n-1, \quad k \neq l = 1,...,n\}$. Pri tome se koreni lako dobijaju iz relacija: $[H_i, E_{kl}] = \delta_{ik}E_{il} - \delta_{li}E_{ki} - \delta_{nk}E_{nl} + \delta_{ln}E_{kn}$.
$r=1$: $\{H_1, E_{12}, E_{21}\}$.
$r=2$: Na osnovu opštih razmatranja za $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$, sledi da je jedan Cartan-Weyl-ov bazis:

$$\{H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, E_{12}, E_{21}, E_{13}, E_{31}, E_{23}, E_{32}\},$$

sa nenultim komutacionim relacijama: $[H_1, E_{kl}] = \delta_{1k}E_{1l} - \delta_{l1}E_{k1} - \delta_{3k}E_{3l} + \delta_{3k}E_{3l}$, $[H_2, E_{kl}] = \delta_{2k}E_{2l} - \delta_{l2}E_{k2} - \delta_{3k}E_{3l} + \delta_{3k}E_{3l}$, $[E_{12}, E_{21}] = H_1 - H_3$, $[E_{12}, E_{31}] = -E_{32}$, $[E_{12}, E_{23}] = E_{13}$, $[E_{21}, E_{13}] = E_{23}$, $[E_{21}, E_{32}] = -E_{31}$, $[E_{13}, E_{31}] = H_1$, $[E_{13}, E_{32}] = E_{12}$, $[E_{31}, E_{23}] = -E_{21}$, $[E_{23}, E_{32}] = H_2$. Odavde se vidi da su koreni:

$$\mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad -\mathbf{a}^1, \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -\mathbf{a}^2, \quad \mathbf{a}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad -\mathbf{a}^3.$$

Rešenje 4.27. Matrica iz zadatka 4.16.b ima svojstvenu vrednost 0 nedegenerisanu ako i samo ako je $\sum \xi_i^2 \neq 0$ (koeficijenti su kompleksni). Prema tome svi takvi elementi su regularni. Jedan od njih je $H = ir_3$, i sa $\mathrm{ad}(H)$ svojstvene vrednosti su (osim 0) $+1$ i -1 sa svojstvenim vektorima $E_+ = ir_1 - r_2$ i $E_- = ir_1 + r_2$. Ovo je Cartan-Weyl-ov bazis, i standardna forma komutacionih relacija je: $[H,H] = 0, \quad [H, E_\pm] = \pm E_\pm, \quad [E_+, E_-] = 2H$. (Standardna forma iz teorema 4.6 dobija se delenjem korenih vektora sa $\sqrt{2}$. Gornji izbor se uobičajio u fizici.)

Rešenje 4.28. Iz teorema 4.6 nalazi se ($d = \frac{n-r}{2}$):

$$g = 2\mathrm{diag}(I_r, \underbrace{A, ..., A}_{d}), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rešenje 4.29. Iz $|\ \mathrm{ad}, \mathbf{a} + 1\mathbf{a}\rangle \propto \mathrm{ad}(E_\mathbf{a}) \mid \mathrm{ad}, \mathbf{a}\rangle = [E_\mathbf{a}, E_\mathbf{a}] = 0$, sledi da je $q = 0$; za $\mathbf{m} = \mathbf{a}$, (4.9) daje $p - q = 2$. Tako je $p = 2$, i niz je $\{-\mathbf{a}, 0, \mathbf{a}\}$.

Rešenje 4.30. U zadatku 4.26 su za bazis $\{H_1, H_2, E_{ij} \mid i \neq j = 1,2,3\}$ određeni svi vektor-koreni. Pri tome su realni. Među njima su pozitivni $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ i $\mathbf{a}^3$. Pošto je $\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^3 = \mathbf{a}^2$, fundamentalni sistem je $\{\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^3\}$.

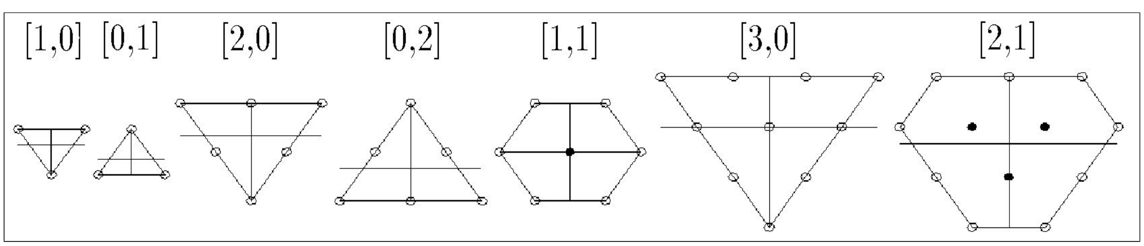
Rešenje 4.31. Kako je $\mathbf{m} = \mathbf{M} - k\mathbf{a}$, skalarnim množenjem sa $\mathbf{a}$ i delenjem $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, nalazi se $k = \frac{(\mathbf{M}-\mathbf{m})\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$. Zamenom u (4.10) za $\mathbf{m}' = \mathbf{M}$, nalazi se $c^-_\mathbf{m} = \sqrt{(\frac{(\mathbf{M}-\mathbf{m})\cdot\mathbf{a}}{2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} + 1)(\mathbf{M}+\mathbf{m})\cdot\mathbf{a}}$.

Rešenje 4.32. Neka je $\mathbf{s} = 1$ (algebra je ranga 1), i $\mathbf{M}$ maksimalna težina. Po teoremu 4.8 mora važiti $2\frac{<\mathbf{M},1>}{<1,1>} = 2\mathbf{M} = 0, 1, \ldots$. Odavde je $\mathbf{M} = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$. $D(E_{-\mathbf{s}} = E_{-})$ delujući na $\mid \mathbf{M}\rangle$ spušta težine za 1, čime se dobijaju težine $\mathbf{M}-1, \mathbf{M}-2, \ldots$. Tražeći $\mathbf{M}$ niz sa $-\mathbf{s}$, nalazi se $p-q = 2M = p$, pošto je $q=0$, za maksimalne težine. Odavde: $\mathbf{m} = \mathbf{M}, \mathbf{M}-1, ..., -\mathbf{M}$. Dalje se primenjuje teorem 4.8.(ii), uz $S = \frac{1}{2}$, jer je 1 jedini pozitivni koren. Neka je $C_\mathbf{m} = (\| \mathbf{M}+S \|^2 - \| \mathbf{m}+S \|^2)^{-1}$. Teorem 4.8.(ii) daje $n_\mathbf{m} = 2\sum_{k=1}^{M-\mathbf{m}} n_{\mathbf{m}+k}(\mathbf{m}+k)$. Ovo je rekurzivna jednačina, i rešava se izdvajanjem prvog člana i ostatka sume: $n_\mathbf{m} = 2C_\mathbf{m}(n_{\mathbf{m}+1}(\mathbf{m}+1) + \frac{1}{2C_{\mathbf{m}+1}} n_{\mathbf{m}+1})$. Zamenjujući vrednost $C_\mathbf{m}$ nalazi se $n_\mathbf{m} = n_{\mathbf{m}+1}$, i pošto je maksimalna težina nedegenerisana, sve su takve. $D(H) = \mathrm{diag}(M, M-1, ..., -M)$. Iz $\langle M, l \mid D^{(M)}(E_\pm) \mid M, m\rangle = c_m^\pm \delta_{l,m\pm1}$, zamenom $m = M - (M-m)$ u (4.10) u kojoj je $m' = M'$, i koristeći izvedenu vezu $c_m^+ = c_{m+1}^{-*}$, nalazi se $D^{(M)}_{l,m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(M \mp m)(M \pm m+1)}\delta_{l,m\pm1}$.

Rešenje 4.33. Uputstvo: uzeti da je fundamentalni sistem $\{\mathbf{s}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{s}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\}$ (zadatak 4.38), pa primeniti teorem 4.8. Nalazi se:

$$M_{[p_1,p_2]} = \begin{pmatrix} \frac{p_1+p_2}{2} \\ \frac{p_1-p_2}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zamenom ovoga u formulu Weyl-a, nalazi se $\dim\,[p_1, p_2] = \frac{1}{2}(p_1+1)(p_2+1)(p_1+p_2+2)$. Traženjem nizova sa fundamentalnim korenima dobijaju se rezultati navedeni u narednim tabelama i slici C.2. Težine sa znakom $\bullet$ su dvostruko degenerisane, a sve ostale su nedegenerisane. U tabelama se $\mathbf{s}^1$-nizovi nalaze u istoj koloni, a $\mathbf{s}^1+\mathbf{s}^2$ u istoj vrsti (tj. oduzimanje korena $\mathbf{s}^1$ spušta težinu, a $\mathbf{s}^2$ spušta i pomera nadesno. Brojeve p i q treba izračunati, a u tabelama se vide iz dužine niza i položaja date težine u nizu.



Slika C.2: **Dijagrami težina za reprezentacije** $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$**.**

Reprezentacija $[1,0]$: $M = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})^T$, $\|M+S\|^2 = \frac{7}{3}$.		
Nivo 0	M	
Nivo 1	$M - \mathbf{s}^1$	
Nivo 2		$M - \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$

Reprezentacija $[0,1]$: $M = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})^T$, $\|M+S\|^2 = \frac{7}{3}$.		
Nivo 0	M	
Nivo 1		$M - \mathbf{s}^2$
Nivo 2		$M - \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$

Reprezentacija $[2,0]$: $M = (1, \frac{2}{2\sqrt{3}})^T$, $\|M+S\|^2 = \frac{13}{3}$.			
Nivo 0	M		
Nivo 1	$M - \mathbf{s}^1$		
Nivo 2	$M - 2\mathbf{s}^1$	$M - \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$	
Nivo 3		$M - 2\mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$	
Nivo 4			$M - 2\mathbf{s}^1 - 2\mathbf{s}^2$

Reprezentacija $[0,2]$: $M = (1, -\frac{2}{2\sqrt{3}})^T$, $\|M+S\|^2 = \frac{13}{3}$.			
Nivo 0	M		
Nivo 1		$M - \mathbf{s}^2$	
Nivo 2		$M - \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$	$M - 2\mathbf{s}^2$
Nivo 3			$M - \mathbf{s}^1 - 2\mathbf{s}^2$
Nivo 4			$M - 2\mathbf{s}^1 - 2\mathbf{s}^2$

Reprezentacija $[1,1]$: $M = (1,0)^T$, $\|M+S\|^2 = 4$.			
Nivo 0	M		
Nivo 1	$M - \mathbf{s}^1$	$M - \mathbf{s}^2$	
Nivo 2		$\bullet\ M - \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$	
Nivo 3		$M - 2\mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$	$M - \mathbf{s}^1 - 2\mathbf{s}^2$
Nivo 4			$M - 2\mathbf{s}^1 - 2\mathbf{s}^2$

Reprezentacija $[3,0]$: $M = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2\sqrt{3}})^T$, $\|M+S\|^2 = 7$.				
Nivo 0	M			
Nivo 1	$M - \mathbf{s}^1$			
Nivo 2	$M - 2\mathbf{s}^1$	$M - \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$		
Nivo 3	$M - 3\mathbf{s}^1$	$M - 2\mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$		
Nivo 4		$M - 3\mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$	$M - 2\mathbf{s}^1 - 2\mathbf{s}^2$	
Nivo 5			$M - 3\mathbf{s}^1 - 2\mathbf{s}^2$	
Nivo 6				$M - 3\mathbf{s}^1 - 3\mathbf{s}^2$

Reprezentacija $[2,1]$: $M = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})^T$, $\|M+S\|^2 = \frac{19}{3}$.				
Nivo 0	M			
Nivo 1	$M - \mathbf{s}^1$	$M - \mathbf{s}^2$		
Nivo 2	$M - 2\mathbf{s}^1$	$\bullet\ M - \mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$		
Nivo 3		$\bullet\ M - 2\mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$	$M - \mathbf{s}^1 - 2\mathbf{s}^2$	
Nivo 4		$M - 3\mathbf{s}^1 - \mathbf{s}^2$	$\bullet\ M - \mathbf{s}^1 - 3\mathbf{s}^2$	
Nivo 5			$M - 3\mathbf{s}^1 - 2\mathbf{s}^2$	$M - 2\mathbf{s}^1 - 3\mathbf{s}^2$
Nivo 6				$M - 3\mathbf{s}^1 - 3\mathbf{s}^2$

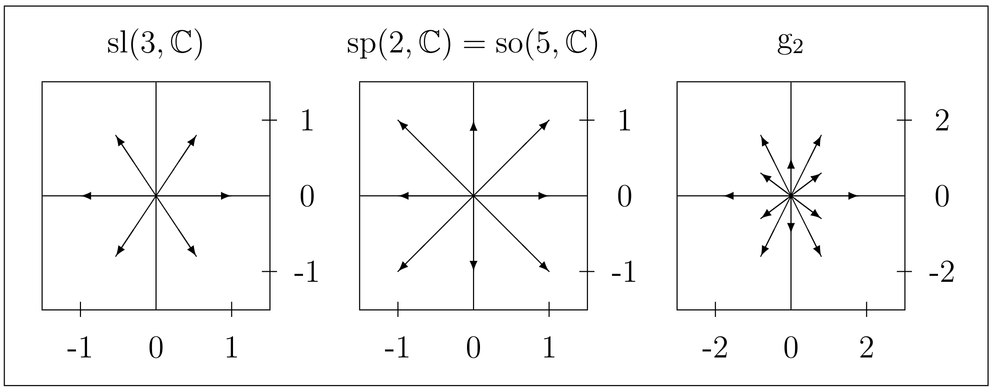
Rešenje 4.34. a) T_+ je operator zamene protona neutronima, a T_- operator zamene neutrona protonima. T_3 je polovina razlike broja protona i neutrona. Lako se proverava da ovi operatori zadovoljavaju komutacione relacije za su(2) u standardnoj formi. Po pretpostavci, H_S komutira sa $T_\pm$, pa na osnovu toga, iz Jacobi-jevog identiteta, komutira i sa T_3, što daje traženu invarijantnost. Operator naelektrisanja je broj protona: $Q = \sum_\alpha P_\alpha^\dagger P_\alpha$, a barionski broj je $B = \sum_\alpha (P_\alpha^\dagger P_\alpha + N_\alpha^\dagger N_\alpha)$. Odavde je $Q = T_3 + \frac{1}{2}B$.
b)$T_- = \sum_\alpha (\pi_{0\alpha}^\dagger \pi_{+\alpha} + \pi_{-\alpha}^\dagger \pi_{0\alpha})$, $T_+ = \sum_\alpha (\pi_{+\alpha}^\dagger \pi_{0\alpha} + \pi_{0\alpha}^\dagger \pi_{-\alpha})$, $T_3 = \frac{1}{2}\sum_\alpha (\pi_{+\alpha}^\dagger \pi_{+\alpha} - \pi_{-\alpha}^\dagger \pi_{-\alpha})$.

Rešenje 4.35. Neka je $\{x_1, \dots, x_n\}$ bazis u L. $[D(x_i), K_2] = \sum_{jk} g^{jk}[D(x_i), D(x_j)D(x_k)] =$
$\sum_{jkl} g^{jk}(c_{ik}^l D(x_j)D(x_l) + c_{ij}^l D(x_l)D(x_k)) = \sum_{jkl} D(x_j)D(x_l)(g^{jk}c_{ik}^l + g^{kl}c_{ik}^j) =$
$\sum_{jklm} D(x_j)D(x_l)g^{ml}g^{jk}(c_{ikm} + c_{imk}) = 0$. Konstante sa donjim indeksima su antisimetrične.

Rešenje 4.36. U standardnom Cartan-Weyl-ovom bazisu Cartan-ov tenzor izračunat je u zadatku 4.28. Jednak je inverznom, te je $K_2 = \sum_{i=1}^{r} D^2(H_i) + \sum_{\mathbf{a}} D(E_{\mathbf{a}})D(E_{-\mathbf{a}})$. Za maksimalnu težinu je (pozitivni koreni je anuliraju): $K_2 \mid M\rangle = \{\sum_{i=1}^{r} D^2(H_i) + \sum_{\mathbf{a}>0} D(E_{\mathbf{a}})D(E_{-\mathbf{a}})\} \mid M\rangle = \{\|M\|^2 + \sum_{\mathbf{a}>0}[D(E_{\mathbf{a}}), D(E_{-\mathbf{a}})]\} \mid M\rangle$. Na osnovu komutacionih relacija iz teorema 4.6.(iii) proverava se jednakost : $K_2 = \{\|M\|^2 + \sum_{\mathbf{a}>0} \mathbf{a}^i D(H_i)\} \mid M\rangle$. Traženi rezultat neposredno sledi. $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$: $M(M+1)$. $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$: $\frac{1}{3}(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2) + p_1 + p_2$.

Rešenje 4.37. Iz oblika Cartan-ovog tenzora se nalazi $K_2 \propto \sum D^2(r_i)$.

Rešenje 4.38. Za $r = 1$ postoji samo jedna algebra, $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, razmatrana u zadatku 4.27. Na osnovu tabele 4.1, postoje tri proste (i jedna koja je zbir dve $\mathrm{so}(3,\mathbb{C})$) algebre ranga 2:



Slika C.3: **Koreni sistemi prostih algebri ranga 2.**

1. $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$ $(\circ\!-\!\!-\!\circ)$: Oba zahteva (za uglove i dužine) zadovoljavaju vektori: $\mathbf{s}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{s}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, i to su korenovi nivoa 1. Za $\mathbf{s}^1$ niz sa $\mathbf{s}^2$ nalazi se (lema 5.(ii)) $p - q = -1$. Pošto je za proste korenove $p = 0$, dobija se da je u nizu još samo $\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2$. Isti koren se dobija i za $\mathbf{s}^2$ niz sa $\mathbf{s}^1$. Prema tome, ovo je jedini koren nivoa 2. Za sledeći nivo treba obrazovati nizove sa $\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2$. Za oba prosta korena i ovaj koren, nizovi imaju $p - q = 1$, pa pošto su prosti korenovi u nizovima, sledi $p = 1$ i $q = 0$. Na višim nivoima stoga nema korenova. Negativni koreni se dobijaju množenjem ovih sa -1. Ukupna dimenzija algebre je 8, i pošto je to (kao što će u nastavku biti pokazano) jedina algebra te dimenzije i ranga 2, ona je u stvari $\mathrm{sl}(3,\mathbb{C})$.

2. $\mathrm{so}(5,\mathbb{C})$ $(\circ = \circ)$: Uslove zadovoljavaju vektori: $\mathbf{s}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{s}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nivo 2: $\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2$. Nivo 3: $2\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2$. Ukupno četiri pozitivna korena, pa je dimenzija algebre 10.

3. g^2 $(\circ \equiv \circ)$: Nivo 1: $\mathbf{s}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{s}^2 = \sqrt{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Nivo 2: $\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2$. Nivo 3: $2\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2$. Nivo 4: $3\mathbf{s}^1 + \mathbf{s}^2$. Nivo 5: $3\mathbf{s}^1 + 2\mathbf{s}^2$. Dimenzija algebre je 14.

Rešenje 4.39. a) $\mathrm{sp}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{so}(5,\mathbb{C})$ i $\mathrm{so}(6,\mathbb{C}) \cong \mathrm{sl}(4,\mathbb{C})$.
b) $\mathrm{so}(2,\mathbb{C})$ je jednodimenzionalna, pa i Abel-ova. $\mathrm{so}(4,\mathbb{R})$ je kompaktna (zadatak 4.25), a centar joj je 0 (zadatak 4.13), pa je poluprosta. To isto mora važiti i za njenu kompleksifikaciju $\mathrm{so}(4,\mathbb{C})$. Kako Dynkin-ovim dijagramima ova algebra nije obuhvaćena, ona mora biti zbir prostih. Prosta algebra najmanje dimenzije je $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, i to je jedina prosta algebra dimenzije 3, pa je jedina mogućnost za dekompoziciju $\mathrm{so}(4,\mathbb{C}) = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

C.5 Lie-jeve grupe

Rešenje 5.1. Zatvorenost: $m(g,h) \in M, \quad \forall g,h \in G$ (M je grupna mnogostrukost). Asocijativnost: $m(m(g,h),k) = m(g,m(h,k)), \quad \forall g,h,k \in G$. Neutralni element: $m(g,e) = m(e,g) = g, \quad \forall g \in G$. Inverzni element: $m(g,i(g)) = m(i(g),g) = e \quad \forall g \in G$.

Rešenje 5.2. Iz definicije se nalazi $(A,a)(B,b) = (AB, Ab + a)$. Lako se proverava da je $K = \{(A,0)\} < G$ i $H = \{(1,a)\} \triangleleft G$. Odavde je $G = H \wedge K$. Grupna mnogostrukost je stoga proizvod pozitivne poluose i cele realne ose, i grupa je povezana, nekompaktna, prosto povezana. Kako je sama grupa jedna svoja karta, zakon množenja odmah daje $m((A,a),(B,b)) = (AB, Ab+a)$, i $i((A,a)) = (\frac{1}{A}, -\frac{a}{A})$, gde se sada uređeni par eksplicitno tretira kao vektor iz $\mathbb{R}^2$.

Rešenje 5.3. Aksiomi grupe se lako proveravaju. Iz $\det M = \det(A^T M A) = \det M \det{}^2 A$ sledi da je $\det A = \pm 1$. Prema tome grupa je nepovezana, jer je det neprekidna funkcija matričnih elemenata, a komponenta jedinice sadrži I pa mora biti u oblasti $\det A = 1$. Analogno b).

Rešenje 5.4. a) Iz uslova $A^T I A = I$ i zadatka 5.3 sledi da je $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ nepovezana grupa. Svaki element grupe $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ se u nekom bazisu može napisati u obliku $A_d = \mathrm{diag}(1,...,1,A_1,...,A_k)$ gde je
$$A_i = \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$$
(eventualne svojstvene vrednosti -1 se u $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ moraju uvek javiti paran broj puta, pa se proizvoljnim grupisanjem u parove mogu svesti na ovakve matrice za $\alpha = \pi$). Neka je
$$A_i(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i t) & -\sin(\alpha_i t) \\ \sin(\alpha_i t) & \cos(\alpha_i t) \end{pmatrix}.$$
Tada je $A_d(t) = \mathrm{diag}(1,...,1,A_1(t),...,A_k(t))$ put koji spaja $A(0) = I$ i $A(1) = A$, a ceo leži u $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$.
b) Pošto je $\det B$ neprekidna funkcija matričnih elemenata, a $\det B \neq 0$, postoje dve komponente povezanosti $\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$ i $\mathrm{GL}_-(n,\mathbb{R})$. Neka je B proizvoljni operator iz $\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$. Njegova polarna forma je $B = PS$, gde je P strogo pozitivan, a S iz $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. U svojstvenom bazisu za P važi $P = P_d = \mathrm{diag}(p_1,...,p_n)$, pa je $B = P_d S$. Tada je $P(t) = \mathrm{diag}(p_1^t,...,p_k^t)$ put koji spaja $P(0) = I$ i $P(1) = P$. Odavde sledi da je $B(t) = P(t)S$ put između $S = B(0)$ i $B = B(1)$. Konačno, kompozicija puteva $B \circ A$ iz prvog dela zadatka je put koji spaja I sa B. Ovaj put je ceo u GL_+ jer su i pozitivni operatori i $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ njegovi podskupovi.
c)$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ je podgrupa u $\mathrm{GL}_+(n,\mathbb{R})$ i sadrži grupu $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. Put iz dela b) je stoga ceo iz $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, jer je faktor P sada iz $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, a svi elementi $P(t)$ imaju determinantu 1.
d) Zatvorenost sledi iz zadatka 4.3 i neprekidnosti funkcija koje predstavljaju definicione uslove

grupe: det je neprekidno preslikavanje u $\mathbb{R}$, kao i uslovi ortonormiranosti kolona i vrsta matrica, ekvivalentni definiciji ortogonalne grupe.

Rešenje 5.5. Kao u prethodnom zadatku: U ima dijagonalnu formu $U_d = \mathrm{diag}(e^{\imath\phi_1}, ..., e^{\imath\phi_n})$, koja se može neprekidno spojiti sa I putem $U(t) = U^t$ iz $\mathrm{U}(n)$. Dalje je sve isto kao u zadatku 5.4. Zašto anuliranje determinante ne povlači nepovezanost grupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$?

Rešenje 5.6. Iz uslova $A^T M(1,3)A = M(1,3)$ se nalazi $a_{00}^2 - \sum_i a_{0i}^2 = 1$, pa je $| a_{00} |^2 \geq 1$. Prema tome, pored uslova za determinantu, postoji još jedan razlog nepovezanosti. Komponenta jedinice je podgrupa matrica jedinične determinante sa pozitivnim elementom a_{00}. Njena povezanost sledi iz činjenice da je prostor koseta $L/\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ hiperboloid u $\mathbb{R}^4$ (biće pokazano u poslednjem odeljku). Pošto je ovo povezan skup kao i $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$, na osnovu teorema 5.1.(ii) sledi povezanost L. Iz nekompaktnosti hiperboloida i kompaktnosti $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ sledi nekompaktnost L.

Rešenje 5.7. Π': strukturu semidirektnog proizvoda proveriti po definiciji. Nepovezana i nekompaktna. Π: Kao topološki proizvod povezanih i nekompaktnih grupa je i sama nekompaktna i povezana.

Rešenje 5.8. Preslikavanje $f(gH) = gx$, gde je H mala grupa elementa x je analitičko zbog takvog delovanja grupe na M i analitičnosti množenja, a zbog tranzitivnosti dejstva ono je bijekcija.

Rešenje 5.9. Preslikavanje je očigledno analitičko i homomorfizam. $\mathbb{R}$ je prosto povezana, pa je univerzalno natkrivajuća za $\mathrm{U}(1)$. $\ker f = \mathbb{Z}$, pa je $\mathbb{Z}$ fundamentalna grupa za $\mathrm{U}(1)$. Npr.

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi x) & -\sin(2\pi x) \\ \sin(2\pi x) & \cos(2\pi x) \end{pmatrix}.$$

Rešenje 5.10. $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$: Razmatra se delovanje ove grupe na sferi S^{n-1} u $\mathbb{R}^n$. Deluje tranzitivno, a mala grupa tačke $(0, ..., 0, 1)$ je skup matrica oblika $A = \mathrm{diag}(B, 1)$, gde je B iz $\mathrm{SO}(n-1, \mathbb{R})$. Zato je $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n-1, \mathbb{R})$ difeomorfno sferi S^{n-1}. Prema tome je ispunjeno $\pi_1(\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})) = \pi_1(\mathrm{SO}(n-1, \mathbb{R}))$. Grupa $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ je C_2-povezana, (biće dokazano kasnije), pa su za $n > 2$ sve $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ C_2-povezane. $\mathrm{SO}(1, \mathbb{R}) = \{1\}$ je očigledno prosto povezana, a u zadatku 5.9 je pokazano da je $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ $\mathbb{Z}-$povezana.
$\mathrm{SU}(n)$: Neka je x normirani vektor u $\mathbb{C}^n$. Pišući uslov normiranja u koordinatnoj formi, i izražavajući koordinate preko realnih i imaginarnih delova, zaključuje se da je skup svih normiranih vektora sfera S^{2n-1}. Ova sfera je orbita delovanja grupe $\mathrm{SU}(n)$ u $\mathbb{C}^n$, a kao u prvom delu se pokazuje da je mala grupa $\mathrm{SU}(n-1)$. Pošto je $\mathrm{SU}(1) = \{1\}$, sledi da su sve grupe $\mathrm{SU}(n)$ prosto povezane.

Rešenje 5.11. Orbita delovanja $\mathrm{SL}(n, \mathbb{F})$ u $\mathbb{F}^n$ je ceo $\mathbb{F}^n$, a mala grupa je skup matrica iz zadatka 3.33, gde je A iz $\mathrm{SL}(n-1, \mathbb{F})$. Prostor $\mathbb{F}^n$ je prosto povezan. Rekurzijom do $\mathrm{SL}(1, \mathbb{F}) = \{1\}$ nalazi se da su sve grupe prosto povezane (jer je svaka direktni topološki — grupno semidirektni — proizvod prethodne i celog prostora).

Rešenje 5.12. Iz Schur-ove leme je $Z(\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})) = \mathbb{F}I$ (skup skalarnih matrica), $Z(\mathrm{U}(n)) = \mathrm{U}(1)$ (skup skalarnih unitarnih matrica, tj. I pomnožena faznim faktorom), $Z(\mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})) =$

$\{I, -I\}$, $Z(\mathrm{SL}(2n+1,\mathbb{R})) = \{I\}$, $Z(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})) = Z(\mathrm{SU}(n)) = C_n$ (ciklična grupa čiji su elementi I pomnožena n-tim korenima broja 1).

Rešenje 5.13. Videti kakve uslove postavljaju uslov unitarnosti i jednakost za determinantu.

Rešenje 5.14. Veza je linearna, i jednoznačna. Y ima istu determinantu kao i X i hermitska je, pa određuje vektor iste dužine u prostoru Minkowskog. Preslikavanje je neprekidno ($\mathrm{O}(A)$ je kvadratna funkcija elemenata matrice A). Prema tome O preslikava $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ u L, jer se I_2 preslikava u I_4. Generatori t_i i $\imath t_i$ se preslikavaju u r_i i b_i, tj. generatore rotacija i boost-ova, pa se iz odgovarajućih jednoparametarskih podgrupa dobija cela komponenta jedinice L. Direktnom proverom u bazisu hermitskih matrica se nalazi $\ker O = \{I_2, -I_2\}$, tj. preslikavanje je dvostruko univerzalno natkrivanje.

Rešenje 5.15. Razvoj multiplikativne funkcije u okolini e je: $\hat{m}^i(g,h) = \hat{m}^i(g^1,\dots g^n, h^1,\dots h^n) = (gh)^i = g^i + h^i + \sum_{jk} a^i_{jk} g^j h^k + \dots$. Na osnovu ovoga se nalazi $\hat{m}^l(\hat{m}(g,h),f) = \sum_{istk} a^l_{ik} a^i_{st} g^s h^t f^k + \dots$ i $\hat{m}^l(g,\hat{m}(h,f)) = \sum_{istk} a^l_{si} a^i_{tk} g^s h^t f^k + \dots$. Izjednačavanjem ovih razvoja, nalazi se $\sum_i a^l_{ik} a^i_{st} = \sum_i a^l_{si} a^i_{tk}$. Odavde, za $c^i_{jk} = a^i_{jk} - a^i_{kj}$, direktno sledi Jacobi-jev identitet (viši članovi u redu se poništavaju). Još je jednostavnije uočiti da su a^k_{ij} strukturne konstante asocijativne algebre ($(x_s x_t)x_k = x_s(x_t x_k)$ povlači $\sum_{il} a^i_{st} a^l_{ik} x_l = \sum_{il} a^l_{si} a^i_{tk} x_l$), pa iskoristiti zadatak 4.4.a.

Rešenje 5.16. Svaka matrica $I + tE_{ij}$ je iz $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$, i time se dobijaju krive kroz jedinicu. Njihovim diferenciranjem se nalazi algebra $\mathrm{gl}(n,\mathbb{F})$.

Rešenje 5.17. Za svaki operator A u n-dimenzionalnom prostoru postoji bazis u kome se on i sve njegove funkcije $f(A)$ reprezentuju gornje trougaonom matricom, sa svojstvenim vrednostima a_i na dijagonali. Trag i determinanta su nezavisni od bazisa, pa se mogu računati i u ovom: $\mathrm{Tr}\, A = \sum a_i$, $\det A = \Pi a_i$, $\mathrm{Tr}\,(\ln A) = \sum \ln a_i = \ln(\Pi a_i) = \ln(\det A)$.

Rešenje 5.18. a) Neka je $A = e^{at}$. Uslov za trag sledi iz prethodnog zadatka i zadatka 5.3.a. Diferenciranjem uslova $A^T M A = M$ po t u $t = 0$ nalazi se drugi zahtev.
b) Isto kao pod a).

Rešenje 5.19. Neposrednom primenom prethodnih rezultata.

Rešenje 5.20. Elementi matrica su $0, 1, \sin t, \cos t, \mathrm{sh}\, t$ i $\mathrm{ch}\, t$. Pri diferenciranju u tački $t = 0$ svi elementi nestaju, osim što se pojavljuje broj 1 na mestima gde su $\sin t$ i $\mathrm{sh}\, t$.

Rešenje 5.21. Prvi deo kao u zadatku 5.2. Koristeći zadatak 3.33 svaki element ove grupe se piše u obliku $(A|b)$, gde je

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad b = (x, y).$$

Diferenciranjem u tački 0 po parametrima t, x i y, nalaze se matrice generatora i nenulte komutacione relacije $[r_3, q_1] = q_2, [r_3, q_2] = -q_1$.

Rešenje 5.22. Ovako definisan generator grupe $\mathrm{U}(1)$ je $T_8 = \mathrm{diag}(-\imath, -\imath, 2\imath)$, a za grupu $\mathrm{SU}(2)$ generatori su $T_i = \mathrm{diag}(t_i, 0)$ (oznake iz zadatka 4.10). Lako je proveriti da T_8 komutira sa $T_i, i = 1, 2, 3$, pa je dobijena algebra $\mathrm{u}(2) \cong \mathrm{u}(1) \oplus \mathrm{su}(2)$.

Rešenje 5.23. Eksponenciranjem generatora.

Rešenje 5.24. Pogledati rezultat u odeljku §4.3.7.

Rešenje 5.25. Neka je $A \in L$ i $Ae_0 = w$ ($w \neq ce_0$, jer nije u pitanju rotacija; u slučaju rotacije, problem je rešen: $B = I, R = A$). Neka su u i v međusobno orogonalni vektori (standardni skalarni proizvod), ortogonalni na ravan span (e_0, w). Tada je B jednoznačno definisan uslovima $Be_0 = w, Bu = u, Bv = v$; odavde za $R = B^{-1}A$ važi $Re_0 = e_0$, tj. R je rotacija, i $A = BR$. Treba zapaziti da je ovo u stvari polarna forma matrice A, jer je $AA^T = BRR^TB^T = B^2$, zbog simetričnosti boost-ova i ortogonalnosti rotacija. Time je pokazana i jednoznačnost faktorizacije, jer je A nesingularna transformacija.

Rešenje 5.26. U bazisu $s = \{e_0, n, u, v\}$, matrica boost-a je

$$B_s(\theta) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \operatorname{sh}\theta = \beta\Gamma, \operatorname{ch}\theta = \Gamma.$$

Operator prelaska R, iz apsolutnog bazisa u s, definisan sa $Re_0 = e_0$, $Re_1 = n$, $Re_2 = u$ i $Re_3 = v$ je rotacija koja u oba bazisa ima matricu

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & u_x & v_x \\ 0 & n_y & u_y & v_y \\ 0 & n_z & u_z & v_z \end{pmatrix}.$$

Poznato je da je matrica boost-a u apsolutnom bazisu $B = RB_sR^{-1}$, pa kako je $R^{-1} = R^T$, nalazi se

$$B = \begin{pmatrix} \Gamma & \beta_x\Gamma & \beta_y\Gamma & \beta_z\Gamma \\ \beta_x\Gamma & n_x^2(\Gamma-1)+1 & n_xn_y(\Gamma-1) & n_xn_z(\Gamma-1) \\ \beta_y\Gamma & n_xn_y(\Gamma-1) & n_y^2(\Gamma-1)+1 & n_yn_z(\Gamma-1) \\ \beta_z\Gamma & n_xn_z(\Gamma-1) & n_yn_z(\Gamma-1) & n_z^2(\Gamma-1)+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\beta\to 0} \begin{pmatrix} 1 & \beta_x & \beta_y & \beta_z \\ \beta_x & 1 & 0 & 0 \\ \beta_y & 0 & 1 & 0 \\ \beta_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rešenje 5.27. a) $D(S|a)D(T|b)f(x) = D(S|a)f((T|b)^{-1}x) = f((T|b)^{-1}(S|a)^{-1}x) = D((S|a)(T|b))f(x)$.
b) Translacije u pravcu e_0 čine jednoparametarsku grupu $\{(I|a)\}$, gde je $a = (t, 0, 0, 0)$. Zato je $D(I|a)f(x) = f(x^0 - t, x^1, x^2, x^3)$. Za generator se nalazi $D(p_0)f(x) = \frac{\partial D(I|a)}{\partial t} |_{t=0} f(x) = -\frac{\partial}{\partial x^0}f(x)$, tj. $D(p_0) = -\frac{\partial}{\partial x^0}$. Slično, $D(p_\mu) = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Jednoparametarska podgrupa rotacija oko z-ose je skup matrica oblika

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stoga je $D(R(\varphi))f(x) = f(x^0, \cos\varphi x^1 + \sin\varphi x^2, -\sin\varphi x^1 + \cos\varphi x^2, x^3)$, odakle se traženjem parcijalnog izvoda za $\varphi = 0$, i primenom relacije za izvod složene funkcije, nalazi $D(r_3)$; konačni izraz je $D(r_i) = -\sum \varepsilon_{ijk}x^j\frac{\partial}{\partial x^k}$. Slično, za boost-ove važi $D(b_i) = -(x^0\frac{\partial}{\partial x^i} + x^i\frac{\partial}{\partial x^0})$.

C.6 Ireducibilne reprezentacije grupa SU(n)

Rešenje A.1. a) n, C_n^k, C_{n+k-1}^k.
b) 3, 15.

Rešenje A.2. SU(2): $\ydiagram{2} \otimes \ydiagram{1} = \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{1}, \ \ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1} = 1 \oplus \ydiagram{2}$

$$\mathrm{SU}(3):\ \ydiagram{2} \otimes \ydiagram{2,1} = \ydiagram{4,1} \oplus \ydiagram{3,2} \oplus \ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1}\,,$$

$$\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,1} = \ydiagram{4,2} \oplus \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{3,3} \oplus 2\,\ydiagram{2,1} \oplus 1.$$

C.7 Reprezentacije Poincaré-ove grupe

Rešenje B.1. Pokazati homomorfizam, korišćenjem definicije delovanja na bazisne vektore.

Rešenje B.2. Ponovo iskoristiti način na koji operatori deluju na bazis $|\,p, n\rangle$.

LITERATURA

Naveden je samo mali deo knjiga relevantnih za oblasti. Spisak je podeljen u tri dela. U prvom su osnovne knjige u kojima su razmatrani matematički aspekti. Po pravilu su obimne i znatno detaljnije od izloženog teksta. Njihovo navođenje ne treba shvatiti kao preporuku za čitanje, osim u slučaju posebne zainteresovanosti za oblast. Izuzetak su prve dve knjige: osnovne postavke analize, [A1], pretpostavka su za razumevanje Hilbert-ovih prostora i Lie-jevih grupa, a linearna algebra je, praktično na svakoj strani, slobodno korišćena na nivou reference [A2]. U drugom delu su knjige koje se preporučuju (pre svega [B2] za prve dve glave, [B3] za ostale, [B4] za treću i [B5] za poslednje dve) kao alternativna literatura. Tretiraju odgovarajuće teme na sličan način, ali sa više objašnjenja, primera i primena simetrije i teorije Hilbert-ovih prostora u fizici, a matematička preciznost ostaje svedena na zaista nužni okvir. U trećem delu su navedeni knjige i članci koji u izvesnom smislu izlaze izvan okvira kursa i, obrađujući susedne oblasti, upućuju na moguće pravce daljeg usmeravanja ili produbljivanja. Konačno, poslednju grupu referenci čine tablice formula vezanih za integrale, specijalne funkcije, diferencijalne jednačine i grupe; pri radu zadataka neku od njih treba držati na stolu. Slovima E i R je naznačeno da odgovarajuća knjiga postoji na engleskom, odnosno ruskom jeziku.

A. Osnovna literatura

[A1] Nikolsky S. M., *A course of Mathematical Analysis* (Mir, Moscow, 1981). Moderna knjiga iz matematičke analize, namenjena fizičarima. [E,R]

[A2] Vujičić M., Milošević I., *Vektorski Prostori u Fizici* (Fizički Fakultet, Beograd 1997). Autor je učio od prvog autora ove knjige, pa je razumljivo što tekst pred čitaocem podrazumeva znanje njenog sadržaja, i nadovezuje se na nju i pojmovno i oznakama.

[A3] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы Теории Функций и Функционального Анализа* (Наука, Москва 1981). Knjiga slavnih autora, pokriva veliki deo funkcionalne analize na vrlo pregledan način [R,E].

[A4] Бирман М. Щ., Соломяк М. З., *Спектральная Теория Самосопряженых Операторов в Гильбертовом Пространстве* (ЛГУ, Ленинград, 1980). Vrlo potpuna i koncizno pisana knjiga. [R]

[A5] Stanković B, Pilipović S., *Teorija distribucija* (PMF, Novi Sad, 1983). Iscrpan pregled teorije raspodela na našem jeziku.

[A6] Barut A., Raczka R., *Theory of Group Representations and Applications* (PWN, Warszawa 1977). Kompletan udžbenik, sa mnogim matematičkim detaljima koji opravdavaju primene teorije grupa u fizici elementarnih čestica [E,R].

[A7] Samelson H., *Notes on Lie Algebra* (Van Nostrand, New York 1969). Detaljno, a prihvatljivo kratko izlaganje o Lie-jevim algebrama i njihovim reprezentacijama [E].

[A8] Наймарк М., *Теория Представлений Групп* (Наука, Москва 1976). Enciklopedijski pisana knjiga, možda jedina na spisku u kojoj su izvedeni skoro svi potrebni detalji. Zahteva nekoliko meseci pažljivog čitanja [E,R].

[A9] Chevalley C., *Theory of Lie Groups*, vol. 1. (Princeton University Press, Princeton 1948). Klasična knjiga za oblast, lepo i precizno napisana [E,R].

[A10] Понтрягин Л., *Непрерывные Группы* (Наука, Москва 1984). Verovatno najlepše i najpotpunije (za ono što pokriva) napisana, već klasična knjiga. Zahteva čitanje od početka [E,R].

[A11] Ляховскй В., Болохов А., *Группы Симметрии и Елементарные Частицы* (ЛГУ, Ленинград 1983). Zanimljiva knjiga sa mnogo primera i stavova. Mestimično nejasna koncepcija sa "nestandardnim" dokazima [R].

1.1.1, C.7 C.7 2.1.3

B. Alternativni udžbenici

[B1] von Neumann J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1955.). Klasična, i u svom domenu izvanredna izvorna knjiga o kvantnoj mehanici, sa mnogo funkcionalne analize [E,R].

[B2] Richtmyer R., *Principles of Advanced Mathematical Physics*, (Springer, Berlin 1978). Jedan od uzora za izbor materijala, posebno za funkcionalnu analizu [E,R].

[B3] Elliot J., Dawber P., *Symmetry in Physics* (Macmillan, London 1979). Izvanredno napisan, sasvim moderan prikaz primena teorije grupa u mnogim oblastima fizike; glavni uzor pri pisanju glave o Poincare-ovoj grupi. Kad-tad pročitati! (Da ima dovoljno vremena, autor bi sa najvećim zadovoljstvom predavao po ovoj knjizi, uštedevši sebi pisanje, a studentima čitanje prethodnih strana) [E,R].

[B4] Vujičić M., Damnjanović M. *Teorija Konačnih Grupa i Njihovih Reprezentacija* (Fizički Fakultet, Beograd, 1986). Treća glava je nastala skraćivanjem ovog udžbenika, uz izmene uslovljene koncepcijom ostatka i stilskim jedinstvom, te ga ne može zameniti.

[B5] Georgi H., *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin/Cummings, Reading 1982). Veoma lepo napisana kniga, nezaobilazna za svakog ko se interesuje za elementarne čestice [E].

[B6] E. P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (New York, Academic Press, 1959). Istorijska knjiga, inspirativnošću nobelovca izvršila izuzetan uticaj na razumevanje uloge simetrija u fizici [E,R].

[B7] Г. Я. Любарский, *Теория Групп и ее Применение в Физике*, (Москва, Физматгиз, 1958). Pored pregleda teorije grupa sadrži i niz aplikacija u različitim oblastima fizike; jedna od prvih, a i još uvek među najboljima sa takvim sadržajem [R].

[B8] S. L. Altman, *Induced Representations in Crystals and Molecules*, (Academic Press, London, 1977). Iscrpan pregled diskretnih grupa važnih za fiziku, sa detaljnom razradom indukcije. Specifičan stil i sofisticirane oznake su doprinele da postane kultna knjiga [E].

[B9] Lichtenberg D., *Unitary Symmetry and Elementary Particles* (Academic, New York 1970). Često preporučivana knjiga za prvo upoznavanje sa materijom [E].

[B10] Румер Ю. Б., Фет А. И., *Теория Групп и Квантованные Польа* (Наука, Москва 1977). Verovatno najjednostavnije prepričan Wigner-ov metod indukcije reprezentacija Poincare-ove grupe, sa posebnim naglaskom na primenu u kvantnoj teoriji polja [R].

[B11] Wigner E., *Annals of Mathematics* **40** (1939) 40
Weinberg S., *Physical Review* **133B** (1964) 1318; Ibid. 134B (1964) 882.
Izvorni radovi o reprezentacijama Poincare-ove grupe.

C.2, C.7 4.3.7, A.1, C.7 C.7 C.7 2 3.3.3

C. Dopunska literatura

[C1] Маљъцев А., *Основы Линейной Алгебры* (Наука, Москва 1975). Sadrži analizu korišćenih svojstava rešenja svojstvenog problema u kompleksnim euklidskim prostorima. Inače, u ovoj knjizi postoji niz dopunskih poglavlja linearne algebre koja se koriste u fizici, a obično se ne razmatraju u standardnim udžbenicima [E,R].

[C2] Halmos P., *A Hilbert Space Problem Book* (van Nostrand, Princeton 1967). Sasvim originalna knjiga, u kojoj se iscrpnim komentarima zadataka izlaže teorija Hilbert-ovih prostora na relativno lak način [E,R].

[C3] Colleman S., Mandula J., *Physical Review* **159** (1967) 1251-9;
Haag R., Lopuszanski J., Sohnius M., *Nuclear Physics* **B88** (1975) 257-74;
Sohnius M., *Introducing Supersymmetry*, *Physics Reports* **128** (1985) 39-204.
Ovi radovi razmatraju moguću strukturu totalne grupe simetrija elementarnih čestica [E].

[C4] Kelley J., *General Topology* (Van Nostrand, New York 1957). Fundamentalna knjiga iz opšte topologija, matematičke discipline na kojoj baziraju mnoge za fiziku relevantne matematičke tehnike, a koja se u izvornom obliku u fizici ne koristi [E,R].

[C5] Warner F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Springer, Berlin 1983). Moderno, razumljivo i kratko izlaganje diferencijalne geometrije, sve potrebnijeg matematičkog aparata u više oblasti fizike [E,R].

[C6] Дубровин Б., Новиков С., Фоменко А., *Современная Геометрия* (Наука, Москва 1984). Enciklopedijski pregled primena diferencijalne geometrije u fizici [E,R].

[C7] Fischler M., *Journal of Mathematical Physics* **22** (1981) 637. Razmatrano uopštavanje tehnike Young-ovih šema za sve proste algebre [E].

[C8] Менски М., *Метод Индуцированных Представлений. Пространство-время и Концепция Частиц* (Наука, Москва 1976). Veoma zanimljiva knjiga, koja na rigorozan, ali pomalo nestandardan način interpretira unitarne i neunitarne reprezentacija Poincare-ove grupe [R].

8 2.1.1 A

D. Priručnici

[D1] M. Abramovitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Pub., New York 1972). Najpoznatija zbirka formula vezanih za različite funkcije (specijalne funkcije, ortogonalni polinomi, diferencijalne jednačine, integrali,. . .) [E].

[D2] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды* (Москва, Наука, 1981). Najnovija, najobimnija trotomna zbirka integrala, redova i relavantnih formula [R].

[D3] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, раядов и произведений* (Москва, Физматгиз 1962). Veoma potpuna zbirka integrala [R].

[D4] S. Wolfram, *Mathematica* (Addison-Wesley, New York 1993). Kompjuterski program *Mathematica* ima ugrađen niz komandi vezanih za specijalne funkcije i diferencijalne jednačine. Autor u potrazi za nekim rezultatom uvek polazi odavde [E].

[D5] E. Janke, F. Emde, F. Lösch, *Tafeln Höherer Funktionen* (Teubner Verlag, Stuttgart, 1960). Klasiqna, razumljiva, mada ne obimna, zbirka formula o specijalnim funkcijama [E,R].

[D6] E. Kamke, *Differentialgleichungen* (Leipzig 1959). Zbirka rešenja diferencijalnih jednačina [E,R].

[D7] Желобенко Д., Штерн А., *Представления Групп Ли* (Наука, Москва 1983). Priručnik sa mnogo rezultata i tablica vezanih za razne grupe [R].

2.2.5

IMENA

Zbog korišćena izvorne transkripcije, pobrojana su imena pomenuta u tekstu, sa našim izgovorom i osnovnim podacima (ukoliko ih je bilo moguće naći).

Abel Niles Henric (Abel Nils Henrik) 1802-1829, Norveška.

Auerbach (Auerbah).

Baker Alan (Bejker Alan) 1939-, Engleska (Fields-ova medalja 1970).

Burnside (Brnsajd).

Cartan Élie Joseph (Kartan Eli Žozef) 1869-1951, Francuska (Nagrada Lobačevskog 1937).

Cauchy Augustin Louis (Koši Augustin Luis) 1789-1857, Francuska.

Cayley Arthur (Kejli Artur) 1821-1895, Engleska.

Clebsch (Klebš).

Colleman (Kolman).

Paul Adrien Maurice Dirac (Pol Adrien Moris Dirak) 1902-1984, Engleska (Nobel-ova nagrada za fiziku 1933.).

Descartes René (Dekart René) 1596-1650, Francuska.

Dynkin (Dinkin).

Euklid ($E\upsilon\kappa\lambda\epsilon\iota\delta\eta\varsigma$), autor prvog matematičkog traktata koji je sačuvan.

Euler Leonhard (Ojler Leonard) 1707-1783, Švajcarska.

Fourier Jean Baptiste Joseph (Furije Žan Batist Žozef) 1768-1830, Francuska.

Fréchet Maurice Rene (Freše Moris Rene) 1878-1965, Francuska.

Freudenthal (Frojdental).

Frobenius Ferdinand Georg 1849-1917, Nemačka.

Galilei Galileo (Galilej Galileo) 1564-1642, Italija.

Galois Évariste (Galoa Evarist) 1811-1832, Francuska (zbog političkih razloga izbačen 1831. sa studija u Parizu, a zatim isprovociran na dvoboj, u kome je poginuo).

Gell-Mann (Gel-Man), SAD, (Nobelova nagrada za fiziku, 1969).

Gordan (Gordan).

Gram Jorgen Pedersen 1850-1916, Danska.

Haar (Har).

Hausdorff Felix (Hausdrof Feliks) 1868-1942, Nemačka.

Heaviside Oliver (Hevisajd Oliver) 1850-1925, Engleska.

Heisenberg Werner (Hajzenberg Verner) 1901-1976, Nemačka.

Hermite Charles (Ermit Šarl) 1822-1901, Francuska.

Hilbert David 1862-1943, Nemačka.

Jacobi Carl Gustav Jacob (Jakobi Karl Gustav Jakob) 1804-1851, Nemačka.

Kazimir.

Kempbell (Kempel).

Killing (Kiling).

Klein Christian Felix (Klajn Kristijan Feliks) 1849-1952, Nemačka.

Kronecker Leopold (Kroneker Leopold) 1823-1891, Nemačka.

Lagrange Joseph Louis (Lagranž Žosef Lui) 1736-1813, Francuska.

Laguerre Edmond Nicolas (Lager Edmon Nikola) 1834-1886.

Lav Landau.

Lebesgue Henri Leon (Lebeg Anri Leon) 1875-1941, Francuska.

Legendre Adrien Mari (Ležandr Adrien Mari) 1752-1833, Francuska.

Leibniz Gottfried Wilhelm (Lajbnic Gotfrid Vilhelm) 1646-1716, Nemačka.

Levi–Civita Tullio (Levi-Čivita Tulio) 1873-1941, Italija.

Lie Marius Sophus (Li Marius Sofus) 1842-1899, Norveška.

Liouville Joseph (Liuvil Žosef) 1809-1882, Francuska.

Lorentz Hendrik Anton (Lorenc Hendrik Anton) 1853-1928, Holandija.

Mandula.

Masche (Maške).

Minkowski Hermann (Minkovski Herman) 1864-1909, Nemačka.

von Neumann John (fon Nojman Džon) 1903-1957, Mađarska,SAD.

Newton Isaac (Njutn Isak) 1642-1727, Engleska, osnovač analize i moderne mehanike; po mnogima najznačajnije ime moderne nauke.

Pauli Wolfgang (Pauli Vofgang) 1900-1958, Austria, SAD.

Pearson Egon Sharpe (Pirson Egon Šarp) 1895-1980, Engleska.

Poincaré Jules Henri (Poenkare Žil Anri) 1854-1912, Francuska.

Poisson Simeon Denis (Puason Simeon Deni) 1781-1840, Francuska.

Riesz Frigyes (Ris Friđeš) 1880-1956, Mađarska.

Rodrigues Benjamin Olinde (Rodrigez Benžamin Olend), Francuska.

Schmidt Erhard (Šmit Erhard) 1876-1959, Nemačka.

Sturm Jacques Charles Francois (Šturm Žak Šarl Fransoa) 1803-1855, Francuska.

Schur Friedrich (Šur Fridrih) 1856-1932, Nemačka (Nagrada Lobačevskog).

Laurent Schwartz (Loren Švarc) 1915-, Francuska (Fields-ova medalja 1950.).

Weinberg Steven (Vajnberg Stivn) 1933-, (Nobel-ova nagrada za fiziku 1979.).

Weyl Hermann (Vejl Herman) 1885-1955, Nemačka (Nagrada Lobačevskog 1927).

Wigner Eugen (Vigner Eugen) 1902-1995, Mađarska (Nobel-ova nagrada za fiziku 1963.).

Young (Jang).

Zassenhaus (Casenhaus).

Indeks