

Fizika kontinuuma kroz primere

Sunčica Elezović–Hadžić

Jun 21, 2001

Sadržaj

1	Kinematika kontinuuma	5
1.1	Lagranževa i Ojlerova metoda	5
1.2	Supstancijalni izvod	8
1.3	Tenzori brzine deformacije i vrtložnosti	12
1.4	Strujne linije	17
1.5	Potencijal brzine	21
1.6	Funkcija toka	25
1.7	Kompleksni potencijal	28
1.8	Vektor vrtložnosti i vrtložne linije	29
2	Dinamika kontinuuma	33
2.1	Jednačina kontinuiteta	33
2.2	Vektor i tenzor napona	36
2.3	Osnovna jednačina dinamike	40
2.4	Termodinamika fluida	42
3	Statika fluida	45
4	Idealan fluid	53
4.1	Ojlerova jednačina, Bernulijev i Koši–Lagranžev integral	53
4.2	Potencijalno proticanje idealnog fluida	57
4.3	Vrtložno kretanje idealnog fluida	65
4.4	Talasi u idealnom fluidu	68
5	Viskozan fluid	73
5.1	Navije–Stoksov tenzor napona	73
5.2	Stacionarno laminarno proticanje viskoznog fluida	75
5.3	Nestacionarno laminarno proticanje viskoznog fluida	85
5.4	Vrtložno i potencijalno kretanje u viskoznom fluidu	88
5.5	Disipacija energije u viskoznom fluidu	90
6	Razni zadaci	91

A	Matematički dodatak	95
A.1	Cilindrične koordinate	95
A.2	Sferne koordinate	95

Poglavlje 1

Kinematika kontinuuma

1.1 Lagranževa i Ojlerova metoda

Zadatak 1.1 *Delić, koji se u trenutku $t = 0$ nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) , u proizvoljnom trenutku t nalazi se u tački (x_1, x_2, x_3) , određenoj jednačinama*

$$x_1(t) = X_1, \quad x_2(t) = X_2 + \sin \pi t \sin \pi X_1, \quad x_3(t) = X_3.$$

Uočimo deo posmatrane sredine, koji se u trenutku $t = 0$ poklapa sa duži čije su granične tačke $(0, 0, 0)$ i $(1, 0, 0)$. Skicirati oblik tog dela u trenucima $t = 1/2$, $t = 1$ i $t = 3/2$.

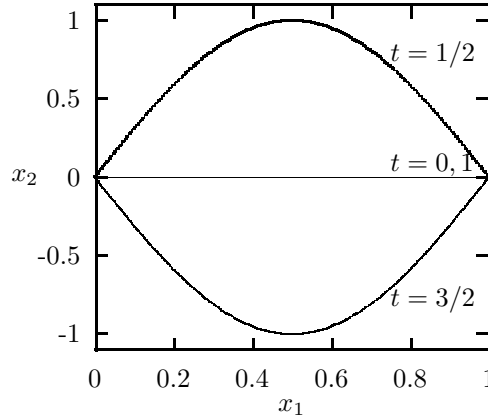
Rešenje 1.1 Proizvoljna tačka A uočene duži u početnom trenutku ima koordinate $(\lambda, 0, 0)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, a u proizvoljnom trenutku t :

$$x_1^A(t) = \lambda, \quad x_2^A(t) = \sin \pi t \sin \pi \lambda, \quad x_3^A(t) = 0. \quad (1.1)$$

Onda su za $t = 1/2$ odgovarajuće koordinate

$$x_1^A(1/2) = \lambda, \quad x_2^A(1/2) = \sin \pi \lambda, \quad x_3^A(1/2) = 0, \quad (1.2)$$

odakle, kada pustimo da λ uzima vrednosti od 0 do 1, dobijamo deo sinusoide koji leži u ravni Ox_1x_2 , kao što je prikazano na slici.



Slično, za $t = 1$ i $t = 3/2$ dobija se

$$x_1^A(1) = \lambda, \quad x_2^A(1) = 0, \quad x_3^A(1) = 0, \quad (1.3)$$

odnosno

$$x_1^A(3/2) = \lambda, \quad x_2^A(3/2) = -\sin \pi \lambda, \quad x_3^A(3/2) = 0, \quad (1.4)$$

što je takođe prikazano na slici.

Zadatak 1.2 *Delić, koji se u trenutku $t = 0$ nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) , u proizvoljnom trenutku t nalazi se u tački (x_1, x_2, x_3) , određenoj jednačinama*

$$x_1(t) = X_1 e^t + X_3(e^t - 1), \quad x_2(t) = X_3(e^t - e^{-t}) + X_2, \quad x_3(t) = X_3.$$

Ovako opisano kretanje u kontinualnoj sredini odgovara Lagranževoj metodi. Opisati ovo kretanje Ojlerovom metodom, tj. odrediti gde se u početnom trenutku nalazio delić, koji se u trenutku t nalazi u tački (x_1, x_2, x_3) .

Rešenje 1.2 Iz zadatih jednačina lako se nalazi da je

$$X_3 = x_3, \quad X_2 = x_2 - x_3(e^t - e^{-t}), \quad X_1 = x_1 e^{-t} - x_3(1 - e^{-t}).$$

Zadatak 1.3 *Kretanje u kontinuumu opisano je jednačinama*

$$x_1 = X_1, \quad x_2 = e^t \frac{X_2 + X_3}{2} + e^{-t} \frac{X_2 - X_3}{2}, \quad x_3 = e^t \frac{X_2 + X_3}{2} - e^{-t} \frac{X_2 - X_3}{2}.$$

Naći komponente brzine Lagranževom i Ojlerovom metodom.

Rešenje 1.3 U Lagranževoj metodi $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$ predstavljaju konačne jednačine kretanja, tj. zavisnost koordinata uočenog delića (koji se u početnom trenutku nalazio u tački (X_1, X_2, X_3)) od vremena. Komponente brzine v_i se onda jednostavno nalaze diferenciranjem odgovarajućih izraza za

$x_i(t)$ po vremenu (pri čemu se X_i smatraju konstantama). Na taj način dobijamo

$$v_1^L = 0, \quad v_2^L = e^t \frac{X_2 + X_3}{2} - e^{-t} \frac{X_2 - X_3}{2}, \quad v_3^L = e^t \frac{X_2 + X_3}{2} + e^{-t} \frac{X_2 - X_3}{2}. \quad (1.5)$$

Da bismo dobili komponente brzine Ojlerovom metodom potrebno je još u izraze nađene za komponente brzine Lagranževom metodom, Lagranževe koordinate X_i izraziti preko Ojlerovih x_i . Lako se vidi da je

$$v_1^E = 0, \quad v_2^E = x_3, \quad v_3^E = x_2. \quad (1.6)$$

Zadatak 1.4 Kretanje u kontinuumu opisano je jednačinama

$$x_1 = A + \frac{e^{-B\lambda}}{\lambda} \sin \lambda(A + \omega t), \quad x_2 = -B - \frac{e^{-B\lambda}}{\lambda} \cos \lambda(A + \omega t), \quad x_3 = X_3.$$

Pokazati da su trajektorije delića kružnice. Takođe, naći vezu između X_1 i X_2 i konstanta A i B .

Rešenje 1.4 Iz zadatih jednačina lako se nalazi da je

$$\sin \lambda(A + \omega t) = (x_1 - A)\lambda e^{B\lambda}, \quad \cos \lambda(A + \omega t) = -(x_2 + B)\lambda e^{B\lambda}.$$

Pošto je $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, iz prethodnih izraza sledi

$$(x_1 - A)^2 + (x_2 + B)^2 = \lambda^{-2} e^{-2B\lambda},$$

što je jednačina kružnice u ravni Ox_1x_2 sa centrom u tački $(A, -B, 0)$, poluprečnika $e^{-B\lambda}/\lambda$.

Kako je $X_1 = x_1(0)$ i $X_2 = x_2(0)$, veza između X_1 i X_2 , s jedne strane, i konstanta A i B sa druge strane ima oblik

$$X_1 = A + \frac{e^{-B\lambda}}{\lambda} \sin \lambda A, \quad X_2 = -B - \frac{e^{-B\lambda}}{\lambda} \cos \lambda A.$$

Zadatak 1.5 Dato je polje brzine

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = \frac{2x_2}{1+t}, \quad v_3 = \frac{3x_3}{1+t}.$$

a) Na osnovu datog polja brzine opisati kretanje Lagranževom metodom, tj. naći jednačine $x_i = x_i(\vec{X}, t)$, pa na osnovu toga komponente ubrzanja u Lagranževim promenljivim.

b) Naći polje ubrzanja.

Rešenje 1.5 a) Pošto je $v_i = dx_i/dt$, iz datog polja brzine nalazimo

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{1+t} \implies \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dt}{1+t} \implies$$

$$\ln x_1 = \ln(1+t) + \ln K_1 \implies x_1 = K_1(1+t),$$

a, kako je $x_1(0) = X_1$, zamenom u gornji izraz nalazimo da je $K_1 = X_1$, pa je

$$x_1 = X_1(1+t). \quad (1.7)$$

Na sličan način dobijamo

$$x_2 = X_2(1+t)^2, \quad x_3 = X_3(1+t)^3. \quad (1.8)$$

Zamenom nađenih izraza za x_i (1.7) i (1.8) u polje brzine dato u zadatku, nalazimo komponente brzine u Lagranževim promenljivim:

$$v_1^L = X_1, \quad v_2^L = 2X_2(1+t), \quad v_3^L = 3X_3(1+t)^2, \quad (1.9)$$

odakle diferenciranjem po vremenu dobijamo komponente ubrzanja u Lagranževim promenljivim:

$$a_1^L = 0, \quad a_2^L = 2X_2, \quad a_3^L = 6X_3(1+t). \quad (1.10)$$

b) Lagranževe promenljive X_i se iz jednačina (1.7) i (1.8) mogu izraziti u funkciji Ojlerovih promenljivih x_i kao

$$X_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad X_2 = \frac{x_2}{(1+t)^2}, \quad X_3 = \frac{x_3}{(1+t)^3}, \quad (1.11)$$

zamenom čega u (1.10) dobijamo polje ubrzanja:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{2x_2}{(1+t)^2}, \quad a_3 = \frac{6x_3}{(1+t)^2}. \quad (1.12)$$

1.2 Supstancijalni izvod

Zadatak 1.6 Naći polje ubrzanja u prethodnom zadatku pomoću supstancijalnog izvoda.

Rešenje 1.6 Ubrzanje je supstancijalni izvod brzine i može se napisati kao

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (1.13)$$

odakle se direktno dobijaju komponente ubrzanja kao u (1.12).

Zadatak 1.7 Polje brzine zadato je vektorom

$$\vec{v} = x_1^2 t \vec{e}_1 + x_2 t^2 \vec{e}_2 + x_1 x_3 t \vec{e}_3.$$

Naći brzinu i ubrzanje delića koji se u trenutku $t = 1$ nalazi u tački $P(1, 3, 2)$.

Rešenje 1.7 Iz datog izraza za brzinu za $t = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ i $x_3 = 2$ dobijamo da je tražena vrednost brzine $\vec{v}(P, t = 1) = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. Pomoću supstancijalnog izvoda (1.13) dobijamo da su komponente ubrzanja

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = x_1^2 + 2x_1^3 t^2 = 3,$$

$$a_2 = 2x_2 + x_2 t^4 = 9, \quad a_3 = x_1 x_3 + x_1^2 x_3 t^2 + x_1^2 x_3 t^2 = 6.$$

Zadatak 1.8 Polje brzine zadato je jednačinama

$$v_1 = 4x_3 - 3x_2, \quad v_2 = 3x_1, \quad v_3 = -4x_1.$$

Naći komponente ubrzanja u tačkama $P(b, 0, 0)$ i $Q(0, 4b, 3b)$ i pokazati da zadato polje brzine odgovara rotaciji krutog tela ugaone brzine 5 oko ose u pravcu $\vec{n} = (4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3)/5$.

Rešenje 1.8 U bilo kojoj tački komponente ubrzanja su jednake

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = -3v_2 + 4v_3 = -25x_1,$$

$$a_2 = 3(4x_3 - 3x_2), \quad a_3 = -4(4x_3 - 3x_2),$$

pa je

$$\vec{a}(P) = -25b\vec{e}_1, \quad \vec{a}(Q) = 0.$$

Brzina \vec{v} delića krutog tela pri rotaciji oko ose u pravcu orta \vec{n} ugaonom brzinom ω jednaka je $\vec{v} = \omega \vec{n} \times \vec{r}$. Za $\vec{n} = (4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3)/5$ i $\omega = 5$ brzina će biti jednaka

$$\vec{v} = (4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3) \times (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = (4x_3 - 3x_2)\vec{e}_1 + 3x_1\vec{e}_2 - 4x_1\vec{e}_3,$$

što se zaista poklapa sa zadatim poljem brzine.

Zadatak 1.9 Tržišna cena P u dolarima neke vrste polovnih kola može se izraziti formulom $P = 1000 + 0.02x - 2.00t$, gde je x -rastojanje uočenog mesta na zapad od Detroita u kilometrima, a t -vreme u danima. Ako u trenutku $t = 0$, kola ove vrste krenu iz Detroita na zapad prelazeći dnevno 400km, korišćenjem supstancijalnog izvoda odrediti da li njihova vrednost raste ili opada u toku kretanja.

Rešenje 1.9 Pošto je $\vec{v} = v\vec{e}_1$, gde je $v = 400\text{km/dan}$, supstancijalni izvod cene kola je

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + v \frac{\partial P}{\partial x} = -2 + 400 \cdot 0.02 = 6 > 0,$$

što znači da cena kola raste u toku kretanja.

Zadatak 1.10 Pokazati da se ubrzanje \vec{a} može napisati u obliku

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

Rešenje 1.10 Pođimo od izraza $\vec{a} \times (\nabla \times \vec{b})$. Transformisaćemo taj izraz imajući u vidu da je

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3$$

istovremeno vektorski i diferencijalni operator. Tako dobijamo

$$\vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) = \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b},$$

gde smo \vec{b} u prvom sabirku sa desne strane podvukli da bismo naglasili da ∇ deluje kao diferencijalni operator samo na njega, a ne i na \vec{a} . Slično je

$$\vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a}.$$

Sabiranjem poslednjih dveju jednačina dobijamo

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) &= \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} \\ &= \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} = \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a}, \end{aligned}$$

odakle specijalno za $\vec{a} = \vec{b} = \vec{v}$ sledi

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v},$$

odnosno

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(v^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}). \quad (1.14)$$

Zamenom poslednjeg izraza u supstancijalni izvod brzine (1.13) dobijamo ubrzanje u zadanom obliku.

Zadatak 1.11 Polje temperature T zadato je u cilindričnim koordinatama kao $T(r, \varphi, z, t)$. Pokazati da se supstancijalni izvod temperature može napisati u obliku

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z},$$

gde su v_r, v_φ i v_z odgovarajuće komponente brzine u cilindričnim koordinatama.

Rešenje 1.11 Supstancijalni izvod temperature računamo kao totalni izvod funkcije $T(r, \varphi, z, t)$ po vremenu t , imajući u vidu da su r, φ i z funkcije vremena:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial T}{\partial z} \dot{z}.$$

Kako se, međutim, brzina u cilindričnim koordinatama može napisati kao

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z,$$

direktno sledi formula data u zadatku.

Zadatak 1.12 Polje brzine \vec{v} zadato je u obliku

$$\vec{v} = v_r(r, \varphi) \vec{e}_r + v_\varphi(r, \varphi) \vec{e}_\varphi,$$

gde su r i φ polarne koordinate. Naći polje ubrzanja u polarnim koordinatama.

Rešenje 1.12 Pošto ovako zadato polje brzine ne zavisi eksplicitno od vremena t , ubrzanje je jednako

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = v_r \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \varphi}, \quad (1.15)$$

pri čemu smo iskoristili izraze za komponente brzine u polarnim koordinatama:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}. \quad (1.16)$$

Dalje je

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{e}_r + v_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi + v_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r}, \quad (1.17)$$

a kako je $\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$ i $\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$, parcijalni izvodi ortova u prethodnoj jednačini su

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = 0, \quad (1.18)$$

pa je

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \vec{e}_\varphi. \quad (1.19)$$

S druge strane, parcijalni izvodi ortova po koordinati φ su

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r, \quad (1.20)$$

pa je

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - v_\varphi \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \right) \vec{e}_\varphi. \quad (1.21)$$

Vraćanjem izraza (1.19) i (1.21) u izraz (1.15) za ubrzanje konačno dobijamo

$$\vec{a} = \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \vec{e}_r + \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} \right) \vec{e}_\varphi. \quad (1.22)$$

Zadatak 1.13 Polje brzine \vec{v} zadato je u obliku

$$\vec{v} = v_r(r, \varphi, z) \vec{e}_r + v_\varphi(r, \varphi, z) \vec{e}_\varphi + v_z(r, \varphi, z) \vec{e}_z,$$

gde su r , φ i z cilindrične koordinate. Naći polje ubrzanja u tim koordinatama.

Rešenje 1.13 Na sličan način kao u prethodnom zadatku, ali posle nešto dužeg računa, za ubrzanje se dobija sledeći izraz

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\varphi + \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Zadatak 1.14 Polje brzine \vec{v} zadato je u obliku

$$\vec{v} = v_r(r, \theta) \vec{e}_r + v_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta,$$

gde su r, θ i φ sferne koordinate. Naći polje ubrzanja u tim koordinatama.

Rešenje 1.14 I u ovom slučaju ubrzanje može da se nađe slično kao u prethodnim zadacima. Ovde ćemo, međutim, primeniti formulu datu u zadatku 1.10 i izraze za gradijent i rotor u sfernim koordinatama (vidi A). Pošto je

$$\begin{aligned} \nabla v^2 &= \frac{\partial(v^2)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(v^2)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \\ \nabla \times \vec{v} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi, \\ \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) (-v_r \vec{e}_\theta + v_\theta \vec{e}_r), \end{aligned}$$

posle očiglednih transformacija dobijamo sferne komponente ubrzanja:

$$\begin{aligned} a_r(r, \theta) &= v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \\ a_\theta(r, \theta) &= \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}. \end{aligned}$$

1.3 Tenzori brzine deformacije i vrtložnosti

Zadatak 1.15 Za polje brzine $\vec{v} = v_0 \frac{x_2}{d} \vec{e}_1$ naći

- tenzor brzine deformacije;
- brzinu relativnog izduženja supstancijalnih elemenata $dx^1 \vec{e}_1$ i $dx^2 \vec{e}_2$, koji se nalaze u koordinatnom početku;
- ugao za koji se u jedinici vremena promeni orijentacija simetrale ugla Ox_1x_2 .

Rešenje 1.15 a) Komponente tenzora brzine deformacije \tilde{S} su, po definiciji, jednake

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.24)$$

a pošto je $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{v_0}{d}$, dok su svi ostali parcijalni izvodi $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ jednaki nuli, \tilde{S} je jednak

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{v_0}{d} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{v_0}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

b) Brzina relativnog izduženja supstancijalnog elementa $ds \vec{n}$ jednaka je $\vec{n} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{n}$, pa za zadate elemente redom nalazimo

$$\vec{e}_1 \cdot \tilde{S} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{v_0}{d} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{v_0}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \frac{v_0}{d} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{e}_2 \cdot \tilde{S} \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{v_0}{d} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{v_0}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{v_0}{d} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

c) Ugao za koji se u jedinici vremena promeni orijentacija simetrane ugla Ox_1x_2 jednak je ω_3 , gde je $\vec{\omega} = \text{rot} \vec{v}/2$ [1], tj.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{v_0}{d}.$$

Zadatak 1.16 Za polje brzine $\vec{v} = kx_2^2 \vec{e}_1$ naći

a) tenzor brzine deformacije;

b) brzinu relativnog izduženja supstancijalnog elementa $d\vec{x} = ds\vec{n}$, gde je

$$\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2),$$

koji se nalazi u tački $\vec{x} = 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$.

Rešenje 1.16 a) Tenzor brzine deformacije je

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & kx_2 & 0 \\ kx_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Brzina relativnog izduženja elementa $d\vec{x}$ je

$$\vec{n} \cdot \tilde{S} \cdot \vec{n} \Big|_{(5,3,0)} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3k.$$

Zadatak 1.17 Za polje brzine

$$\vec{v} = \left(\frac{t+k}{1+x_1} \right) \vec{e}_1,$$

naći brzinu promene relativne dužine supstancijalnih elemenata

$$d\vec{x}^1 = ds_1 \vec{e}_1 \quad \text{ i } \quad d\vec{x}^2 = \frac{ds_2}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2),$$

koji se u trenutku $t = 1$ nalaze u koordinatnom početku.

Rezultat 1.17 $-(1+k), -(2+k)/2$

Zadatak 1.18 Za polje brzine $\vec{v} = (\cos t)(\sin \pi x_1) \vec{e}_2$ naći

- tenzor brzine deformacije;
- brzinu promene relativne dužine supstancijalnih elemenata

$$d\vec{x}^1 = ds_1 \vec{e}_1, d\vec{x}^2 = ds_2 \vec{e}_2, d\vec{x}^3 = \frac{ds_3}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + \vec{e}_2),$$

u koordinatnom početku u trenutku $t = 0$.

Rezultat 1.18 a)

$$\tilde{S} = \frac{\pi}{2} \cos t \cos \pi x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $0, 0, \pi/2$

Zadatak 1.19 Posmatrajmo polja brzine i temperature u nekoj sredini:

$$\vec{v} = \frac{x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad T = k(x_1^2 + x_2^2).$$

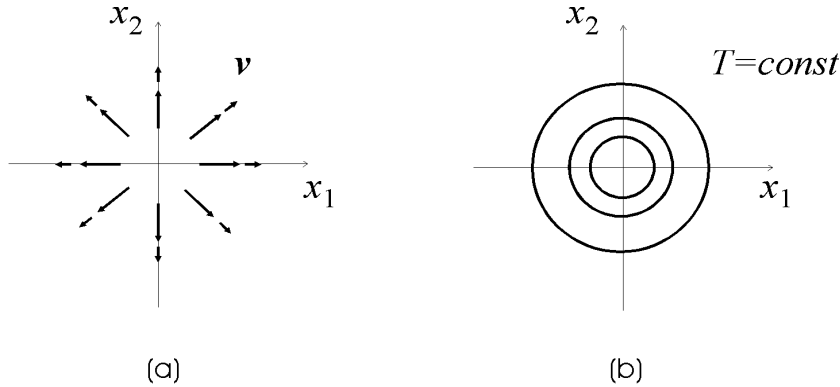
- Nacrtati vektor brzine u nekoliko tačaka i kvalitativno opisati opšte osobine polja brzine. Kako izgledaju izoterme (linije duž kojih se temperatura ne menja)?
- U tački $A(1,1)$ naći polje ubrzanja i supstancijalni izvod temperature.
- Naći tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti.

d) Naći brzinu relativne promene dužine supstancijalnih duži koje imaju radijalni pravac.

Rešenje 1.19 a) Ako sa \vec{r} označimo vektor $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, onda se polje brzine može napisati kao

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\vec{e}_r}{r}, \quad (1.26)$$

odakle se jasno vidi da brzina u svakoj tački ima radijalan pravac, a da po intenzitetu opada sa udaljavanjem od koordinatnog početka kao $1/r$. Na slici



(a) je prikazan vektor brzine u nekoliko tačaka u ravni Ox_1x_2 .

Jednačina linija duž kojih se temperatura ne menja je $x_1^2 + x_2^2 = \text{const}$, tj. izoterme su kružnice, što je prikazano na slici (b).

b) Pošto u polarnim koordinatama zadato polje brzine ima jednostavan oblik (1.26), za nalaženje ubrzanja iskoristićemo zadatak 1.12, odnosno izraz (1.22), koji se u ovom slučaju svodi na

$$\vec{a} = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \vec{e}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial(1/r)}{\partial r} \vec{e}_r = -\frac{1}{r^3} \vec{e}_r = -\frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{4}.$$

Slično, temperatura u polarnim koordinatama ima oblik $T = kr^2$, pa je prema zadatku 1.11

$$\frac{dT}{dt} = v_r \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} 2kr = 2k.$$

c) Tenzori brzine deformacije \tilde{S} i vrtložnosti \tilde{R} su redom simetrični i anti-simetrični deo tenzora \tilde{T} [1], čiji su elementi $T_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Lako se nalazi da tenzor \tilde{T} u Dekartovim koordinatama u ovom slučaju ima oblik

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & 0 \\ -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

pa je

$$\tilde{S} = \frac{\tilde{T} + \tilde{T}^+}{2} = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & 0 \\ -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{T},$$

pošto je tenzor (1.27) simetričan, što znači da mu je i antisimetrični deo jednak nuli, tj. $\tilde{R} = 0$.

d) Ort radijalnog pravca \vec{e}_r se u Dekartovim koordinatama izražava kao

$$\vec{e}_r = \frac{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

pa je brzina relativne promene dužine supstancijskih elemenata u tom pravcu jednaka

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \cdot \tilde{S} \cdot \vec{e}_r &= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & 0 \\ -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Zadatak 1.20 Posmatrajmo polja brzine i temperature u nekoj sredini:

$$\vec{v} = \frac{-x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad T = k(x_1^2 + x_2^2).$$

- Nacrtati vektor brzine u nekoliko tačaka i kvalitativno opisati opšte osobine polja brzine. Kako izgledaju izoterme?
- U tački $A(1, 1)$ naći polje ubrzanja i supstancijski izvod temperature.
- Pokazati da zadato polje brzine opisuje bezvrtložno kretanje, tj. da je tenzor vrtložnosti jednak nuli.

Uputstvo 1.20 I ovde je, kao i u prethodnom zadatku, polja brzine i temperature zgodno izraziti u polarnim koordinatama.

Zadatak 1.21 Polje brzine u nestišljivom fluidu ima oblik

$$v_1 = k(x_2 - 2)^2 x_3, \quad v_2 = -x_1 x_2, \quad v_3 = k x_1 x_3.$$

Čemu je jednako k ?

Rešenje 1.21 Pošto je fluid nestišljiv važi da je $\text{Tr} \tilde{S} = \text{div} \vec{v} = 0$, odnosno

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -x_1 + k x_1 = 0,$$

odakle direktno sledi da je $k = 1$.

1.4 Strujne linije

Zadatak 1.22 Za polje brzine

$$v_x = 2kx, \quad v_y = 2ky, \quad v_z = -4kz,$$

naći jednačinu strujne linije koja prolazi kroz tačku $(1, 0, 1)$.

Rešenje 1.22 Jednačina strujne linije u Dekartovim koordinatama može se naći rešavanjem sistema jednačina [1]

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

što se u slučaju zadanog polja može prepisati u obliku

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{2z}, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dz}{2z}.$$

Iz gornjih jednačina se integraljenjem dobija

$$x = \frac{C_1}{\sqrt{z}}, \quad y = \frac{C_2}{\sqrt{z}},$$

gde se integracione konstante C_1 i C_2 dobijaju iz uslova da strujna linija treba da prolazi kroz tačku $x = 1, y = 0$ i $z = 1$, tako da je konačno jednačina tražene strujne linije

$$x = \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad y = 0.$$

Zadatak 1.23 Pokazati da polje brzine definisano u prethodnom zadatku u cilindričnim koordinatama ima oblik

$$v_r = 2kr, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = -4kz.$$

Naći jednačinu strujne linije koja prolazi kroz tačku $r = 1, \varphi = 0$ i $z = 1$.

Rešenje 1.23 Polje brzine iz prethodnog zadatka se može napisati kao

$$\vec{v} = 2k(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - 2z\vec{e}_z) = 2k(r\vec{e}_r - 2z\vec{e}_z), \quad (1.28)$$

odakle se vidi da su komponente u cilindričnim koordinatama zaista oblika datog u zadatku. Ako sa $d\vec{l}$ označimo element strujne linije, onda se jednačina strujne linije u vektorskom obliku može izraziti kao $d\vec{l} \times \vec{v} = 0$ [1]. Kako je u cilindričnim koordinatama

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z,$$

vektorskim množenjem sa (1.28) dobija se jednačina

$$-4kzr d\varphi \vec{e}_r + 2k(r dz + 2z dr)\vec{e}_\varphi - 2kr^2 d\varphi \vec{e}_z = 0,$$

koja je uvek zadovoljena jedino ako su komponente uz ortove jednake nuli. Odatle je $\varphi = \text{const}$ i

$$2z dr + r dz = 0.$$

U poslednjoj diferencijalnoj jednačini lako se razdvajaju promenljive, tako da sledi

$$\frac{dr}{r} = -\frac{dz}{2z},$$

a odatle se integracijom dobija $r = C/\sqrt{z}$. Pošto tražena strujna linija treba da prolazi kroz tačku $r = 1$, $\varphi = 0$ i $z = 1$, konačno dobijamo jednačinu strujne linije kao

$$r = \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad \varphi = 0.$$

Zadatak 1.24 Fluid protiče kroz cilindričnu cev poluprečnika R . Ako se osa cevi poklapa sa z -osom cilindričnog koordinatnog sistema, onda su komponente polja brzine date sa

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_z = U \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right).$$

Naći jednačine strujnih linija.

Rezultat 1.24 $r = C_1$, $\varphi = C_2$

Zadatak 1.25 Dato je polje brzine

$$v_1 = ax_2, \quad v_2 = -a(x_1 - bt), \quad v_3 = 0,$$

gde su a i b konstante.

- Naći jednačinu trajektorije delića koji se u početnom trenutku $t = 0$ nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) .
- Odrediti jednačinu strujne linije koja je u početnom trenutku prolazila kroz tačku (A, B, C) .

Rešenje 1.25 a) Pošto je brzina \vec{v} delića po definiciji jednaka $d\vec{r}/dt$, zamenjujući komponente brzine zadate u zadatku dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_2, \tag{1.29}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -a(x_1 - bt), \tag{1.30}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0, \tag{1.31}$$

Iz jednačine (1.31) lako se dobija $x_3 = \text{const}$, tj. $x_3 = X_3$, za delić koji se u početnom trenutku $t = 0$ nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) . Izvod jednačine (1.29) po vremenu, uz jednačinu (1.30) daje

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = a \frac{dx_2}{dt} = -a^2(x_1 - bt),$$

odakle sledi sledeća diferencijalna jednačina po x_1 :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + a^2 x_1 = a^2 bt. \quad (1.32)$$

Opšte rešenje homogenog dela ove jednačine $\frac{d^2 x_1}{dt^2} + a^2 x_1 = 0$ je $x_1^h(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at$, gde su C_1 i C_2 konstante koje treba odrediti, a partikularno rešenje cele jednačine je bt (što se lako proverava), pa je opšte rešenje jednačine (1.32) jednako zbiru ova dva, tj.

$$x_1(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at + bt.$$

Pošto je $x_1(0) = X_1$, iz prethodne jednačine zaključujemo da je $C_1 = X_1$, tj.

$$x_1(t) = X_1 \cos at + C_2 \sin at + bt. \quad (1.33)$$

Iz (1.29) onda imamo

$$x_2 = \frac{1}{a} \frac{dx_1}{dt} = -X_1 \sin at + C_2 \cos at + \frac{b}{a},$$

odakle, zbog $x_2(0) = X_2$, lako dobijamo $C_2 = X_2 - b/a$, tako da je jednačina trajektorije delića konačno

$$x_1(t) = X_1 \cos at + \left(X_2 - \frac{b}{a}\right) \sin at + bt,$$

$$x_2(t) = -X_1 \sin at + \left(X_2 - \frac{b}{a}\right) \cos at + \frac{b}{a},$$

$$x_3 = X_3.$$

b) Pošto je $v_3 = 0$, strujne linije leže u ravnima $x_3 = \text{const}$, a jednačina linije u toj ravni dalje se određuje iz diferencijalne jednačine

$$\frac{dx_1}{ax_2} = \frac{dx_2}{-a(x_1 - bt)},$$

u kojoj vreme t treba tretirati kao parametar. U prethodnoj jednačini se lako razdvajaju promenljive, tako da je

$$-dx_1(x_1 - bt) = x_2 dx_2,$$

odnosno

$$bt x_1 = x_1^2 + x_2^2 + C_3,$$

gde je C_3 konstanta koja se određuje iz uslova da strujna linija u početnom trenutku $t = 0$ treba da prolazi kroz tačku (A, B, C) , tj. $0 = A^2 + B^2 + C_3$. Konačno, jednačina tražene strujne linije je

$$A^2 + B^2 = x_1^2 + x_2^2 - bt x_1, \quad x_3 = C.$$

Zadatak 1.26 Komponente brzine u slučaju dvodimenzionog nestacionarnog proticanja imaju oblik

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = \frac{2x_2}{2+t}.$$

Naći trajektorije delića i strujne linije.

Rezultat 1.26 Trajektorije delića određene su jednačinama $x_1 = C_1(1+t)$, $x_2 = C_2(2+t)^2$, a jednačina strujnih linija je $|x_1|^{1+t} = K|x_2|^{(2+t)/2}$.

Zadatak 1.27 Naći jednačine strujnih linija za polje brzine

$$v_r = \left(A - \frac{B}{r^2}\right) \cos \varphi, \quad v_\varphi = -\left(A + \frac{B}{r^2}\right) \sin \varphi, \quad v_z = 0$$

gde su r, φ i z cilindrične koordinate, a A i B konstante.

Rešenje 1.27 Pošto za element strujne linije $d\vec{l}$ važi da je kolinearan sa brzinom \vec{v} u svakoj tački, sistem jednačina za nalaženje strujnih linija u cilindričnim koordinatama može se napisati i kao

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\varphi}{v_\varphi} = \frac{dz}{v_z}.$$

Pošto je $v_z = 0$, ovaj sistem se svodi na $z = \text{const}$ i jednačinu

$$\frac{dr}{\left(A - \frac{B}{r^2}\right) \cos \varphi} = -\frac{r d\varphi}{\left(A + \frac{B}{r^2}\right) \sin \varphi},$$

koja se može prepisati kao

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = -\frac{A + \frac{B}{r^2}}{r \left(A - \frac{B}{r^2}\right)} dr,$$

odakle se integraljenjem dobija

$$-\ln \sin \varphi = \int \frac{A + \frac{B}{r^2}}{r \left(A - \frac{B}{r^2}\right)} dr = \int \frac{1}{r} dr + \int \frac{2B}{r^3 \left(A - \frac{B}{r^2}\right)} dr$$

$$= \ln r + \int \frac{d\left(A - \frac{B}{r^2}\right)}{\left(A - \frac{B}{r^2}\right)} = \ln r \left(A - \frac{B}{r^2}\right) + \ln K,$$

odnosno

$$\sin \varphi \left(Ar - \frac{B}{r}\right) = K,$$

gde je K konstanta.

1.5 Potencijal brzine

Zadatak 1.28 Za sledeća polja brzine ispitati da li se može uvesti potencijal brzine i, ako može, naći ga:

- a) homogeno polje brzine $\vec{v} = U\vec{e}_x$;
- b) homogeno proticanje fluida paralelno xy ravni brzinom U u pravcu koji zaklapa ugao α sa x -osom;
- c) $v_x = -2x$, $v_y = 2y$, $v_z = 0$.

Rešenje 1.28 Potencijal brzine Φ se može uvesti ako je

$$\text{rot} \vec{v} = 0, \quad (1.34)$$

pri čemu je onda

$$\vec{v} = \nabla \Phi. \quad (1.35)$$

a) Pošto je \vec{v} u ovom slučaju konstantan vektor trivijalno je zadovoljen uslov (1.34), pa projektovanjem jednačine (1.35) na koordinatne ose dobijamo jednačine

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = U, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Iz poslednje dve jednačine sledi da potencijal Φ ne zavisi od promenljivih y i z , tj. $\Phi = \Phi(x)$, pa onda prva jednačina dobija oblik

$$\frac{d\Phi}{dx} = U \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y, z) = Ux + C,$$

gde je C konstanta koju bez nekog dodatnog uslova nije moguće odrediti.

b) Komponente zadate brzine su $v_x = U \cos \alpha$ i $v_y = U \sin \alpha$ i $v_z = 0$, pa se ovde, slično kao pod a) zaključuje da Φ ne zavisi od z . Projektovanjem jednačine (1.35) na x -osu dobijamo jednačinu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = U \cos \alpha,$$

odakle je

$$\Phi(x, y) = U \cos \alpha x + f(y), \quad (1.36)$$

gde je $f(y)$ funkcija koju određujemo pomoću projekcije jednačine (1.35) na y -osu. Naime,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{df}{dy} = U \sin \alpha,$$

pa je $f(y) = U \sin \alpha y + C$, gde je C konstanta. Vraćanjem $f(y)$ u (1.36) dobijamo potencijal:

$$\Phi(x, y, z) = x U \cos \alpha + y U \sin \alpha + C = \vec{U} \cdot \vec{r} + C.$$

c) Direktnom proverom dobijamo

$$\text{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

tj. i u ovom slučaju se radi o potencijalnom kretanju. Takođe, ni ovde potencijal ne zavisi od z -koordinate, a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2x,$$

odakle je

$$\Phi = -x^2 + f(y).$$

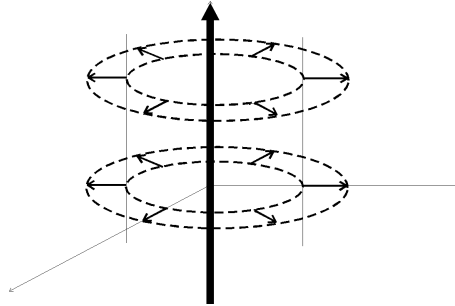
Dalje je

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{df}{dy} = 2y \Rightarrow f(y) = y^2 + C,$$

pa je

$$\Phi(x, y, z) = -x^2 + y^2 + C.$$

Zadatak 1.29 (Linijski izvor) *Linijski izvor fluida je zamišljena beskonačno dugačka prava iz koje kontinualno radijalno izvire nestišljivi fluid.*



Jačina ovakvog izvora se definiše kao zapremina fluida koju u jedinici vremena izbací jedinična dužina izvora. Naći potencijal brzine ako je jačina izvora jednaka $Q = \text{const}$.

Rešenje 1.29 Polje brzine u cilindričnim koordinatama ima oblik $\vec{v} = f(r, \varphi, z)\vec{e}_r$, gde smo cilindrične koordinate uveli tako da se izvor poklapa sa z -osom. Da bi uopšte mogao da se uvede potencijal brzine potrebno je da je zadovoljen uslov (1.34), pa pošto je

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_z,$$

gde smo iskoristili izraz za rotor u cilindričnim koordinatama (A.3), zaključujemo da je

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0,$$

što znači da f zavisi samo od koordinate r . Kako je fluid nestišljiv, treba da bude zadovoljen i uslov $\text{div} \vec{v} = 0$, tj.

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rf)}{\partial r} = 0,$$

gde smo iskoristili izraz (A.2) za divergenciju vektora u cilindričnim koordinatama. Pošto je f funkcija samo od r prethodni uslov se svodi na

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rf(r)) = 0 \quad \Rightarrow \quad rf(r) = C,$$

gde je C konstanta, tako da zaključujemo da polje brzine linijskog izvora ima oblik

$$\vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_r.$$

S druge strane, zapremina fluida koju u jedinici vremena izbaci jedinična dužina linijskog izvora jednaka je $Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$ [1], gde je S površina cilindra jedinične visine, čija se osa poklapa sa izvorom. Fluid ne protiče kroz osnove cilindra, a element površine $d\vec{S}$ omotača ima oblik $r d\varphi dz \vec{e}_r$, gde je r poluprečnik uočenog cilindra. Jačina izvora je onda

$$Q = \int_z^{z+1} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{C}{r} \vec{e}_r \right) \cdot (r \vec{e}_r) = 2\pi C,$$

odakle je $C = Q/2\pi$, pa je brzina

$$\vec{v} = \frac{Q}{2\pi r} \vec{e}_r.$$

Pomoću izraza za gradijent u cilindričnim koordinatama (A.1) dalje nalazimo vezu između brzine i potencijala u obliku

$$\frac{Q}{2\pi r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

odakle je konačno potencijal

$$\Phi(r, \varphi, z) = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \text{const}.$$

Zadatak 1.30 (Tačkasti izvor) Tačkasti izvor fluida je zamišljena tačka iz koje kontinualno, sferno simetrično izvire nestišljivi fluid. Naći potencijal brzine za takvo proticanje fluida, pretpostavljajući da je zapremina fluida koju u jedinici vremena izbacuje izvor konstantna i iznosi Q .

Rešenje 1.30 Brzina u ovom slučaju ima oblik $\vec{v} = f(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$, gde su sada (r, θ, φ) sferne koordinate. Slično kao u prethodnom zadatku, samo sada uz pomoć izraza za rotor (A.7) i divergenciju (A.6) u sfernim koordinatama, prvo iz uslova bezvrtložnosti (1.34) zaključujemo da f zavisi samo od r koordinate, pa onda iz uslova nestišljivosti $\text{div} \vec{v} = 0$ i konkretan oblik te funkcije: $f = \text{const}/r^2$. Konstanta u izrazu za f se može izraziti preko zapreminskog protoka Q , imajući u vidu da sav fluid koji u jedinici vremena izađe iz izvora, mora da prođe kroz sferu poluprečnika r , pa je $Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$, gde je S sada površina te sfere, a $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$. Integracija je trivijalna, a konačni izraz za brzinu je

$$\vec{v} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r,$$

odakle se, pomoću veze između brzine i gradijenta (A.5) u sfernim koordinatama nalazi potencijal

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{Q}{4\pi r} + \text{const}.$$

Zadatak 1.31 (Slobodni vorteks) Naći potencijal brzine za stacionarno potencijalno proticanje nestišljivog fluida pri kome se deliči kreću po kružnicama oko fiksirane ose, ako je poznato da je cirkulacija brzine po proizvoljnoj konturi koja obuhvata tu osu jednaka $\Gamma = \text{const}$.

Rešenje 1.31 U cilindričnim koordinatama ovakvo polje brzine ima oblik $\vec{v} = f(r, \varphi, z) \vec{e}_\varphi$. Iz uslova nestišljivosti se dobija da f ne zavisi od φ , a iz uslova bezvrtložnosti da ne zavisi ni od z , kao i da je proporcionalna sa $1/r$. Konstanta proporcionalnosti se nalazi pomoću cirkulacije $\Gamma = \int \vec{v} \cdot d\vec{l}$, koju je najzgodnije računati po kružnici koja leži u ravni normalnoj na osu vorteksa (tj. z -osu), sa centrom na toj osi. Na taj način se nalazi da je

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi,$$

dok se potencijal traži slično kao u prethodnim zadacima, tako da se konačno dobija

$$\Phi(r, \varphi, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi.$$

Zadatak 1.32 Posmatrajmo potencijalno proticanje kome odgovara potencijal brzine

$$\Phi(r, \varphi) = V_\infty \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi - K \varphi,$$

gde su V_∞ i K zadate pozitivne konstante, a r i φ polarne koordinate. Naći tačke stagnacije.

Rešenje 1.32 Komponente brzine jednake su

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \varphi, \\ v_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \varphi - \frac{K}{r}, \\ v_z &= 0, \end{aligned}$$

a pošto su tačke stagnacije tačke u kojima je brzina jednaka nuli, treba rešiti sistem jednačina

$$V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \varphi = 0, \quad (1.37)$$

$$V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \varphi + \frac{K}{r} = 0. \quad (1.38)$$

Jednačina (1.37) je zadovoljena ako je (i) $a = r$ ili (ii) $\cos \varphi = 0$.

(i) Ako je $a = r$, onda iz jednačine (1.38) sledi da je $\sin \varphi = -K/(2aV_\infty)$, što ima realno rešenje za φ samo ako je $K \leq 2aV_\infty$.

(ii) Ako je $\cos \varphi = 0$ sledi da je $\sin \varphi = \pm 1$, pa se iz jednačine (1.38) dobija

$$r = \frac{K}{2V_\infty} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a^2V_\infty^2}{K^2}} \right),$$

što ima realnu vrednost samo za $K \geq 2aV_\infty$.

1.6 Funkcija toka

Zadatak 1.33 Pokazati da se brzina u slučaju dvodimenzionog nestišljivog toka $\vec{v} = v_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2)\vec{e}_2$ može prikazati kao $\vec{v} = \vec{e}_3 \times \nabla \psi$, gde je $\psi(x_1, x_2)$ funkcija toka.

Rešenje 1.33 Veza između Dekartovih komponenta brzine i funkcije toka [1] ima oblik

$$v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

pa se direktnim množenjem \vec{e}_3 sa $\nabla \psi$ lako proverava da je zaista

$$\vec{v} = \vec{e}_3 \times \nabla \psi.$$

Zadatak 1.34 Pokazati da se strujne linije u slučaju dvodimenzionog nestišljivog kretanja poklapaju sa linijama duž kojih je $\psi = \text{const}$.

Rešenje 1.34 Poznato je da je

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = v_2 dx_1 - v_1 dx_2.$$

Međutim, duž strujne linije je $dx_1 = \lambda v_1$ i $dx_2 = \lambda v_2$, pa se direktnom zamenom u poslednji izraz za $d\psi$ dobija

$$d\psi = \lambda v_2 v_1 - \lambda v_1 v_2 = 0,$$

tj. zaista sledi da se ψ ne menja duž strujnih linija.

Zadatak 1.35 Za polje brzine $\vec{v} = (Ux_2/d) \vec{e}_1$ naći funkciju toka.

Rešenje 1.35 Pošto je

$$v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = U \frac{x_2}{d},$$

sledi

$$\psi(x_1, x_2) = -\frac{U}{2d} x_2^2 + f(x_1).$$

Zamenom ovog izraza u

$$v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

dobijamo

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = \text{const},$$

pa je

$$\psi(x_1, x_2) = -\frac{U}{2d} x_2^2 + \text{const}.$$

Zadatak 1.36 Naći funkciju toka za linijski izvor (vidi zadatak 1.29).

Rešenje 1.36 Ovde je zgodno iskoristiti zadatak 1.33. Naime, pošto je u cilindričnim koordinatama

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z,$$

množenjem sa \vec{e}_3 dobijamo vezu između komponenta brzine i funkcije toka u cilindričnim koordinatama:

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (1.39)$$

Kako je za linijski izvor $v_\varphi = 0$ sledi da funkcija toka ne zavisi od r , a iz prve jednačine se onda dobija

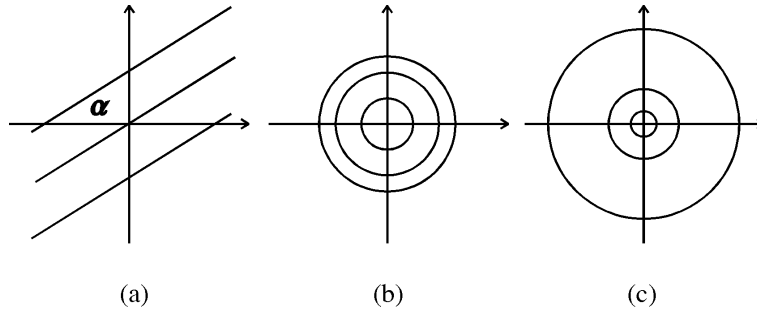
$$\frac{Q}{2\pi r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad \Rightarrow \quad \psi = -\frac{Q}{2\pi} \varphi + \text{const}.$$

Zadatak 1.37 Naći funkciju toka ψ i nacrtati tri ili više strujnih linija sa istim prirastajem ψ u sledećim slučajevima:

- a) homogeno proticanje u xy -ravni brzinom U pod uglom α u odnosu na x -osu;

- b) proticanje pri kome fluid rotira kao kruto telo oko fiksirane ose;
 c) slobodni vorteks.

Rezultat 1.37 a) $\psi = U(x \sin \alpha - y \cos \alpha)$; b) $\psi = \omega r^2/2 + \text{const}$; c) $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + \text{const}$



Zadatak 1.38 Dat je potencijal brzine $\Phi = x^2 - y^2$ za dvodimenziono proticanje nestišljivog fluida.

- a) Naći funkciju toka ψ .
 b) Naći jednačinu strujne linije koja prolazi kroz $x = 1, y = 1$.
 c) Može li se na osnovu funkcije toka reći da se ovde radi o proticanju u blizini ugla između dva zida duž x i y -ose?

Rezultat 1.38 a) $\psi = -2xy + \text{const}$; b) $xy = 1$; c) Da.

Zadatak 1.39 Uveriti se da se za polje

$$v_r = \left(A - \frac{B}{r^2}\right) \cos \varphi, \quad v_\varphi = -\left(A + \frac{B}{r^2}\right) \sin \varphi, \quad v_z = 0$$

gde su r, φ i z cilindrične koordinate, a A i B konstante, može uvesti funkcija toka i pomoću nje naći strujne linije. Uporediti sa rezultatom dobijenim u zadatku 1.27.

Rešenje 1.39 Pošto je kretanje dvodimenziono i nestišljivo, što se lako proverava, funkciju toka ψ je moguće uvesti. Na osnovu (1.39) je

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \left(A - \frac{B}{r^2}\right) \cos \varphi \Rightarrow \psi = \left(-Ar + \frac{B}{r}\right) \sin \varphi + f(r),$$

pa je

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(-\frac{B}{r^2} - A\right) \sin \varphi + \frac{df}{dr} = v_\varphi = -\left(A + \frac{B}{r^2}\right) \sin \varphi,$$

odakle je $f(r) = \text{const}$, tj. funkcija toka je

$$\psi = \left(-Ar + \frac{B}{r}\right) \sin \varphi + \text{const}.$$

Jednačina strujnih linija je onda

$$\sin \varphi \left(Ar - \frac{B}{r}\right) = \text{const},$$

što se poklapa sa izrazom dobijenim u zadatku 1.27.

1.7 Kompleksni potencijal

Zadatak 1.40 (Kompleksni potencijal) *Naći vezu između potencijala brzine Φ i funkcije toka ψ u slučaju potencijalnog dvodimenzionog nestišljivog kretanja i pokazati da je kompleksna funkcija*

$$W(z) = -\Phi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2), \quad (z = x_1 + ix_2),$$

tzv. kompleksni potencijal, analitička. Povezati zatim Dekartove komponente brzine sa realnim i imaginarnim delom izvoda ove funkcije.

Rešenje 1.40 Pošto je

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

vidimo da važe jednačine

$$\frac{\partial(-\Phi)}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial(-\Phi)}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

što su upravo Cauchy–Riemann-ovi uslovi za analitičnost funkcije $W(z)$. Izvod ove funkcije je

$$\frac{dW(z)}{dz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -v_1 + iv_2.$$

Zadatak 1.41 *Naći polje brzine ako je kompleksni potencijal $W(z) = A/z$.*

Rešenje 1.41 Pošto je

$$\frac{dW(z)}{dz} = -\frac{A}{z^2} = -\frac{A}{x_1^2 - x_2^2 + 2ix_1x_2} = -A \frac{x_1^2 - x_2^2 - 2ix_1x_2}{(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2x_2^2},$$

na osnovu prethodnog zadatka imamo da je

$$v_1 = A \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad v_2 = 2A \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Zadatak 1.42 Naći kompleksni potencijal za

- a) homogeno proticanje u pravcu x -ose brzinom U_0 ;
 b) linijski izvor (vidi zadatak 1.29).

Rezultat 1.42 a) $W(z) = -U_0 z$; b) $W(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln z$.

Zadatak 1.43 Naći funkciju toka ψ za potencijalno nestišljivo proticanje, ako je potencijal brzine Φ dat kao

$$\Phi = \frac{a^2 V_\infty}{r} \cos \varphi,$$

gde su r i φ polarne koordinate, a i V_∞ pozitivne konstante, pa na osnovu toga i kompleksni potencijal.

Rezultat 1.43 $W(z) = -\frac{a^2 V_\infty}{z}$

1.8 Vektor vrtložnosti i vrtložne linije

Zadatak 1.44 Za polje brzine $\vec{v} = (Ax_3 - Bx_2)\vec{e}_1 + (Bx_1 - Cx_3)\vec{e}_2 + (Cx_2 - Ax_1)\vec{e}_3$ pokazati da su vrtložne linije prave i naći njihove jednačine.

Rešenje 1.44 Jednačina vrtložnih linija nalazi se iz sistema [1]:

$$\frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3},$$

a pošto je $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = C\vec{e}_1 + A\vec{e}_2 + B\vec{e}_3$ taj sistem se svodi na

$$\frac{dx_1}{C} = \frac{dx_2}{A} = \frac{dx_3}{B}.$$

Odatle je

$$Ax_1 - Cx_2 = \text{const}, \quad Bx_2 - Ax_3 = \text{const},$$

što predstavlja jednačinu prave linije.

Zadatak 1.45 Komponente polja brzine u cilindričnim koordinatama imaju oblik

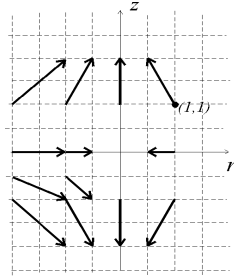
$$v_r = 0, \quad v_\varphi = arz, \quad v_z = 0.$$

- a) Izračunati vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$.
 b) U rz -ravni u nekoliko tačaka nacrtati $\vec{\omega}$.
 c) Pogodno izabrati neku zatvorenu površinu i eksplicitnim računom pokazati da je fluks $\int \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ po njoj jednak nuli.

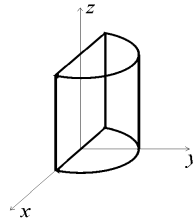
d) Pokazati da jednačine vrtložnih linija imaju oblik $r^2 = \text{const}/z$. Skicirati nekoliko ovakvih linija u rz -ravni.

Rešenje 1.45 a) $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = -\frac{1}{2} ar \vec{e}_r + az \vec{e}_z$

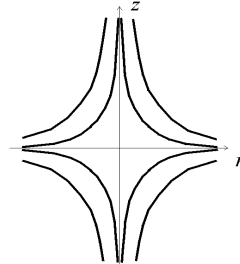
b) Na slici (a) je prikazan je vektor $\vec{\omega}$ u nekoliko tačaka u rz ravni.



(a)



(b)



(c)

c) Traženi fluks računamo po površini polucilindra prikazanog na slici (b), pri čemu osnove polucilindra leže u ravninama $z = 0$ i $z = 1$, a poluprečnik osnove je $r = 1$. Fluks $\int \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ se onda raspada na četiri površinska integrala, od kojih je onaj po bočnoj ravnoj strani trivijalno jednak nuli pošto je $d\vec{S}$ u pravcu orta \vec{e}_φ , a $\vec{\omega} \cdot \vec{e}_\varphi = 0$. Integral po donjoj osnovi cilindra je takođe jednak nuli pošto je $d\vec{S} = -rd\varphi dr \vec{e}_z$, pa je $\vec{\omega} \cdot d\vec{S} = -azrd\varphi dr = 0$, jer je $z = 0$. Integral po gornjoj osnovi je, slično, jednak

$$\int \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = a \int_0^\pi \int_0^1 z r d\varphi dr = az\pi \frac{1}{2} = \frac{a\pi}{2},$$

dok je integral po omotaču

$$\int \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{2}a \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 dz = -\frac{a\pi}{2},$$

pošto je $d\vec{S} = rd\varphi dz \vec{e}_r = d\varphi dz \vec{e}_r$. Konačno je onda traženi fluks po ovako izabranoj površini $\int \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0$.

d) Vrtložne linije u cilindričnim koordinatama nalaze se iz sistema

$$\frac{dr}{\omega_r} = \frac{rd\varphi}{\omega_\varphi} = \frac{dz}{\omega_z},$$

odakle je $\varphi = \text{const}$ i

$$\frac{dr}{-\frac{1}{2}ar} = \frac{dz}{az} \Rightarrow r^2 = \frac{\text{const}}{z},$$

što je prikazano na slici (c).

Zadatak 1.46 Pokazati da iako je za polje brzine slobodnog vorteksa

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

vrtložnost $\vec{\omega} = 0$, cirkulacija brzine po proizvoljnoj zatvorenoj konturi koja obuhvata z -osu nije jednaka nuli i izračunati je. Objasniti zašto Stokes-ova teorema ovde ne može da se primeni.

Rešenje 1.46 Element $d\vec{l}$ proizvoljne linije u cilindričnim koordinatama ima oblik

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z,$$

pa je tražena cirkulacija

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi} d\varphi = \Gamma.$$

Stokes-ova teorema

$$\int \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int \int (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S}$$

ovde ne može da se primeni zato što proizvoljna zatvorena kontura koja obuhvata z -osu obuhvata i tačke u kojima vektor \vec{v} nije definisan ($r = 0$). Zato bismo primenom ove teoreme pogrešno zaključili da je tražena cirkulacija jednaka nuli. Slobodni vorteks predstavlja tipičan primer polja brzine čije su strujne linije zatvorene (kružnice sa centrom na z -osi, dakle postoje "vrtlozi" u kolokvijalnom smislu te reči), a ipak se radi o bezvrtložnom kretanju, tj. $\vec{\omega} = 0$ u svim tačkama u kojima je brzina definisana.

Poglavlje 2

Dinamika kontinuuma

2.1 Jednačina kontinuiteta

Zadatak 2.1 Polazeći od toga da je masa Δm infinitezimalno male zapremine ΔV , koja uvek sadrži iste deliće (molekule) konstantna (zakon održanja mase), izvesti jednačinu kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.1)$$

Rešenje 2.1 Pošto je $\Delta m = \rho \Delta V = \text{const}$ supstancijalni izvod veličine Δm jednak je nuli, odakle je

$$\rho \frac{d(\Delta V)}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \Delta V = 0.$$

Deljenjem poslednje jednačine sa ΔV dobijamo

$$\rho \frac{d(\Delta V)}{\Delta V dt} + \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

a kako je

$$\frac{d(\Delta V)}{\Delta V dt} = \text{Tr} \tilde{S} = \nabla \cdot \vec{v},$$

što je pokazano u [1], sledi jednačina

$$\rho \nabla \cdot \vec{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (2.2)$$

Ako zatim supstancijalni izvod gustine napišemo u razvijenom obliku

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho$$

i vratimo u jednačinu (2.2) dobijamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

što je ekvivalentno sa (2.1).

Zadatak 2.2 Dato je polje brzine

$$\vec{v} = \left(\frac{x_1}{1+t} \right) \vec{e}_1 \quad .$$

- a) Naći polje gustine ako je poznato da ono ne zavisi eksplicitno od položaja, već samo od vremena.
- b) Naći polje gustine ako ono zavisi samo od x_1 .

Rešenje 2.2 a) Pošto gustina $\rho(t)$ treba da zadovoljava jednačinu kontinuiteta (2.1) direktnom zamenom brzine date u zadatku dobijamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\rho x_1}{1+t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{1+t} = 0,$$

odakle je

$$\rho = \frac{K}{1+t},$$

gde je K konstanta.

b) Slično kao pod a) iz jednačine kontinuiteta se dobija

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\rho(x_1)x_1}{1+t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho(x_1)x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{K}{x_1}.$$

Zadatak 2.3 Ako polje brzine ima oblik

$$\vec{v} = x_1 t \vec{e}_1 + x_2 t \vec{e}_2,$$

odrediti polje gustine ρ , ako je poznato da ono zavisi samo od vremena.

Rezultat 2.3 $\rho = K e^{-t^2}$

Zadatak 2.4 Ako je proticanje fluida opisano poljima

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = v_3 = 0, \quad \rho = \frac{\rho_0}{1+t},$$

gde je ρ_0 konstanta

- a) uveriti se da je zadovoljena jednačina kontinuiteta;
- b) izračunati ukupnu masu i brzinu njene promene unutar cilindrične zapremine poprečnog preseka A čije osnove leže u ravnima $x_1 = 1$ i $x_1 = 3$, a osa se poklapa sa x_1 -osom;
- c) izračunati ukupni fluks mase kroz površinu koja ograničava kontrolnu zapreminu opisanu pod b).

Rešenje 2.4 b) Ukupna masa m unutar uočene zapremine V je

$$m = \int \int_V \rho dV = \frac{\rho_0}{1+t} \int \int_V dV = \frac{2A\rho_0}{1+t},$$

a brzina njene promene dm/dt je onda

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{2A\rho_0}{(1+t)^2}.$$

c) Ukupni fluks mase Q kroz neku površinu S , odnosno masa koja u jedinici vremena prođe kroz tu površinu [1], jednak je

$$Q = \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

što se u ovom slučaju svodi na

$$Q = - \int_{S_1} \rho v_1 dS + \int_{S_2} \rho v_1 dS$$

gde su S_1 i S_2 osnove uočenog cilindra u ravnima $x_1 = 1$ i $x_1 = 3$, redom (integral po omotaču cilindra otpada, jer je $\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ na njemu, tj. delići kontinuuma ne prolaze kroz omotač, a minus ispred prvog integrala se javlja zato što brzina i element površine imaju suprotne znakove). Pošto je u ovim integralima koordinata x_1 konstantna, ne menjaju se ni podintegralne funkcije, pa je integracija trivijalna:

$$Q = -\frac{\rho_0}{(1+t)^2} \int_{S_1} dS + \frac{3\rho_0}{(1+t)^2} \int_{S_2} dS = \frac{2\rho_0 A}{(1+t)^2}.$$

Naravno, rezultat se do na znak poklapa sa vrednošću dobijenom za dm/dt pod b), pošto se masa u kontrolnoj zapremini smanjuje.

Zadatak 2.5 a) Uveriti se da kretanje

$$x_1 = \frac{1+t}{1+t_0} X_1, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3,$$

odgovara polju brzine definisanom u prethodnom zadatku.

b) Ako je i polje gustine isto kao u prethodnom zadatku, eksplicitnim računom naći ukupnu masu u trenutku t materijala koji se u trenutku t_0 nalazio u kontrolnoj zapremini definisanoj u prethodnom zadatku.

c) Izračunati takođe ukupni impuls materijala razmatranog pod b).

Rešenje 2.5 a) Pošto je

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{X_1}{1+t_0} = \frac{x_1}{1+t}, \quad v_2 = v_3 = 0,$$

zaista se radi o istom polju brzine kao u prethodnom zadatku.

b) Deliće koji se u trenutku t_0 nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) , u trenutku t će se nalaziti u tački $(X_1(1+t)/(1+t_0), X_2, X_3)$, tj. pomeraće se duž x_1 -ose brzinom v_1 , koja je ista za sve deliće koji su u početnom trenutku imali istu vrednost x_1 koordinate, dok mu se koordinate x_2 i x_3 neće menjati. To znači da će se supstancijalna zapremina, koja se u početnom trenutku poklapala sa kontrolnom zapreminom definisanom u prethodnom zadatku, u trenutku t nalaziti unutar cilindra čije osnove leže u ravnima $x_1 = (1+t)/(1+t_0)$ i $x_1 = 3(1+t)/(1+t_0)$. Ukupna tražena masa je onda

$$\begin{aligned} m(t) &= \int \int_{V(t)} \int \rho dV = \frac{\rho_0}{1+t} \int \int_{V(t)} \int dV \\ &= \frac{A\rho_0}{1+t} \int_{(1+t)/(1+t_0)}^{3(1+t)/(1+t_0)} dx_1 = \frac{2A\rho_0}{1+t_0} \end{aligned}$$

i ona je, naravno, zbog održanja mase jednaka masi koja se u početnom trenutku nalazila u kontrolnoj zapremini.

c) Impuls $d\vec{p}$ materijala sadržanog u zapremini dV jednak je

$$d\vec{p} = \rho dV \vec{v} = \frac{x_1 \rho_0}{(1+t)^2} \vec{e}_1 dV,$$

pa je ukupni impuls $\vec{p}(t)$ materijala sadržanog u zapremini cilindra čije osnove leže u ravnima $x_1 = (1+t)/(1+t_0)$ i $x_1 = 3(1+t)/(1+t_0)$ jednak

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= \int \int_{V(t)} \int \frac{x_1 \rho_0}{(1+t)^2} \vec{e}_1 dV = \frac{A\rho_0}{(1+t)^2} \vec{e}_1 \int_{(1+t)/(1+t_0)}^{3(1+t)/(1+t_0)} x_1 dx_1 \\ &= \frac{4A\rho_0}{(1+t_0)^2} \vec{e}_1. \end{aligned}$$

Zadatak 2.6 *Kako izgleda jednačina kontinuiteta u cilindričnim koordinatama?*

Rezultat 2.6

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad (2.3)$$

2.2 Vektor i tenzor napona

Zadatak 2.7 *U $Ox_1x_2x_3$ koordinatnom sistemu tenzor napona $\tilde{\mathcal{P}}$ u nekoj tački reprezentovan je matricom*

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad .$$

a) Naći vektor napona koji u toj tački deluje na elementarnu površinu paralelnu ravni $x + 2y + 2z - 6 = 0$, kao i intenzitet njegove normalne komponente.

b) Ako je $\vec{e}_1' = (2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)/3$ i $\vec{e}_2' = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)/\sqrt{2}$, naći \mathcal{P}'_{12} .

Rešenje 2.7 a) Traženi vektor napona $\vec{P}_{\vec{n}}$ jednak je

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \tilde{\mathcal{P}} \cdot \vec{n},$$

gde je $\vec{n} = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)/3$ ort normale uočene površine, tj.

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ MPa} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ MPa}.$$

Normalna komponenta $(\vec{P}_{\vec{n}})_{\text{N}}$ ovog vektora je

$$(\vec{P}_{\vec{n}})_{\text{N}} = \vec{P}_{\vec{n}} \cdot \vec{n} = \frac{25}{9} \text{ MPa}.$$

b)

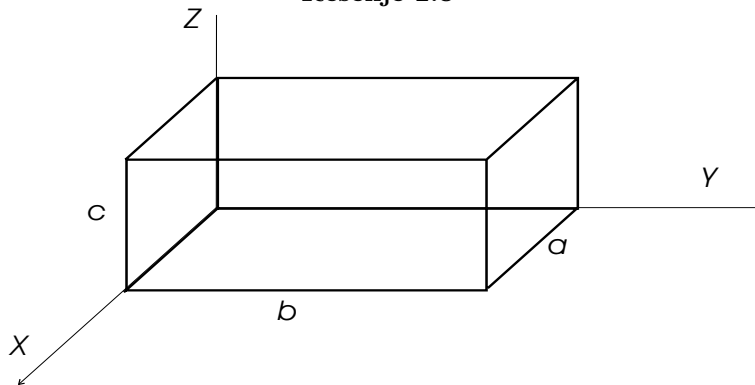
$$\mathcal{P}'_{12} = \vec{e}_1' \cdot \tilde{\mathcal{P}} \cdot \vec{e}_2' = \frac{7\sqrt{2}}{6} \text{ MPa}$$

Zadatak 2.8 Tenzor napona neprekidne sredine dat je matricom, koja u koordinatnom sistemu $Oxyz$ (z -osa kolinearna sa \vec{g}) ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} -p + \rho gz & 0 & 0 \\ 0 & -p + \rho gz & 0 \\ 0 & 0 & -p + \rho gz \end{pmatrix},$$

gde su ρ , p i g konstante. Odrediti vektore napona koji deluju na graničnu površinu zapremine oblika kvadra, čije se jedno teme nalazi u koordinatnom početku, a tri ivice, dužina a , b i c , poklapaju sa koordinatnim osama x , y i z , respektivno. Naći rezultatnu silu koja deluje na strane $z = 0$ i $y = 0$ kvadra.

Rešenje 2.8



Vektori napona koji deluju na strane $y = 0$, $y = b$, $x = 0$, $x = a$, $z = 0$ i $z = c$ kvadra su redom jednaki

$$\begin{aligned}\vec{P}(y = 0) &= \tilde{\mathcal{P}}(-\vec{e}_2) = (p - \rho g z)\vec{e}_2, & \vec{P}(y = b) &= \tilde{\mathcal{P}}\vec{e}_2 = (-p + \rho g z)\vec{e}_2, \\ \vec{P}(x = 0) &= \tilde{\mathcal{P}}(-\vec{e}_1) = (p - \rho g z)\vec{e}_1, & \vec{P}(x = a) &= \tilde{\mathcal{P}}\vec{e}_1 = (-p + \rho g z)\vec{e}_1, \\ \vec{P}(z = 0) &= \tilde{\mathcal{P}}\Big|_{z=0}(-\vec{e}_3) = -p\vec{e}_3, & \vec{P}(z = c) &= \tilde{\mathcal{P}}\Big|_{z=c}\vec{e}_3 = (p - \rho g c)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Sila koja deluje na stranu $z = 0$ je onda jednaka

$$\vec{F}_{z=0} = \int_0^a \int_0^b \vec{P}(z = 0) dx dy = -pab\vec{e}_3,$$

dok je sila koja deluje na stranu $y = 0$

$$\vec{F}_{y=0} = \vec{e}_2 \int_0^a \int_0^c (p - \rho g z) dx dz = a\vec{e}_2 \int_0^c (p - \rho g z) dz = ac\vec{e}_2 \left(p - \frac{1}{2}\rho g c \right).$$

Zadatak 2.9 Tenzor napona reprezentovan je matricom

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naći vektor napona koji deluje na ravan koja prolazi kroz tačku $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$, a tangenta je na cilindričnu površinu $x_1^2 + x_2^2 = 1$ u toj tački.

Rešenje 2.9 Ako sa $f(x_1, x_2)$ označimo funkciju $x_1^2 + x_2^2$, onda je ort normale na površinu $x_1^2 + x_2^2 = 1$ u proizvoljnoj njenoj tački

$$\vec{n} = \frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|} = \frac{2(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)}{\sqrt{4(x_1^2 + x_2^2)}} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2,$$

što znači da je vektor napona koji deluje na ravan tangentnu na uočenu površinu jednak

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100x_1x_2 \\ 100x_1^2 \\ -100x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

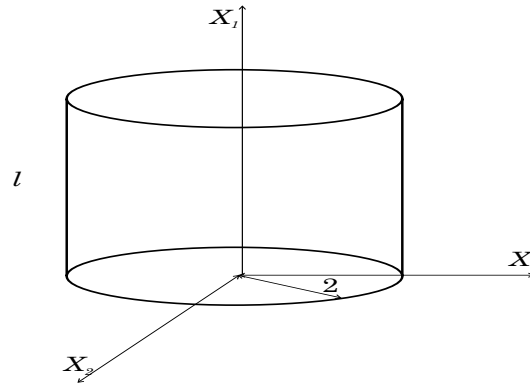
U tački $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$ je traženi vektor napona onda jednak

$$\vec{P} = 25(\sqrt{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \sqrt{3}\vec{e}_3).$$

Zadatak 2.10 Tenzor napona reprezentovan je matricom

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \\ -\alpha x_3 & 0 & 0 \\ \alpha x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Naći vektore napona koji deluju na površine cilindra $x_2^2 + x_3^2 = 4$, $x_1 = 0$ i $x_1 = l$.
- b) Naći ukupnu silu i moment sile koji deluju na osnovu $x_1 = l$ cilindra definisanog pod a).

**Rešenje 2.10**

- a) Vektor napona \vec{P}_1 koji deluje na omotač cilindra $x_2^2 + x_3^2 = 4$ jednak je

$$\vec{P}_1 = \tilde{P}\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \\ -\alpha x_3 & 0 & 0 \\ \alpha x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dok su vektori napona koji deluju na osnove $x_1 = 0$ i $x_1 = l$ redom jednaki

$$\vec{P}_2 = \tilde{P}(-\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x_3 \\ -\alpha x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_3 = \tilde{P}(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha x_3 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

- b) Ukupna površinska sila \vec{F} koja deluje na gornju osnovu cilindra jednaka je

$$\vec{F} = \int_{S(x_1=l)} \vec{P}_3 dS = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3,$$

gde je \vec{P}_3 izračunato pod a), tako da je $F_1 = 0$, a

$$F_2 = -\alpha \int_S x_3 dS, \quad F_3 = \alpha \int_S x_2 dS.$$

Integrale u izrazima za F_2 i F_3 najlakše je izračunati u polarnim koordinatama (r, φ) , koje se uvode u ravni Ox_2x_3 . Veza između Dekartovih i ovako uvedenih polarnih koordinata ima oblik $x_2 = r \cos \varphi$, $x_3 = r \sin \varphi$, a pošto je element površine $dS = r dr d\varphi$, za komponentu F_2 površinske sile dobijamo

$$F_2 = -\alpha \int_0^2 \int_0^{2\pi} dr d\varphi r^2 \sin \varphi = -\alpha \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Slično, za F_3 dobijamo da je proporcionalno integralu $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi$, koji je jednak nuli, pa je stoga i $F_3 = 0$. Dakle, ukupna površinska sila koja deluje na gornju osnovu cilindra jednaka je nuli.

Ukupni momenat \vec{L} površinskih sila koje deluju na uočenu osnovu po definiciji je jednak

$$\vec{L} = \int_S \vec{r} \times d\vec{F},$$

gde je $d\vec{F} = \vec{P}_3 dS$ površinska sila koja deluje na element površine dS . Kako je $\vec{r} = x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, nalazimo da je

$$\vec{r} \times \vec{P}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & -\alpha x_3 & \alpha x_2 \end{vmatrix} = \alpha(x_2^2 + x_3^2) \vec{e}_1 = \alpha r^2 \vec{e}_1,$$

gde smo ponovo iskoristili polarne koordinate, pa je

$$\vec{L} = \alpha \vec{e}_1 \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi = 8\pi \alpha \vec{e}_1.$$

2.3 Osnovna jednačina dinamike

Zadatak 2.11 Ispitati da li matrica čiji su elementi

$$\begin{aligned} P_{11} &= x_2^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2) & , & & P_{12} &= -2\nu x_1 x_2 & , \\ P_{22} &= x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2) & , & & P_{23} &= P_{13} = 0 & , \end{aligned}$$

$$P_{33} = \nu(x_1^2 + x_2^2)$$

može da reprezentuje tenzor napona u sredini čiji se delići nalaze u ravnoteži, a zapreminskih sila nema.

Rešenje 2.11 Ovde treba ispitati da li sa matricom čiji su elementi P_{ij} može da bude zadovoljena osnovna jednačina dinamike, koja za kontinuum ima oblik [1]

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}}. \quad (2.4)$$

Pošto se delići nalaze u ravnoteži, njihovo ubrzanje je jednako nuli, tj. $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, a zapreminskih sila nema, pa je i $\vec{f} = 0$, tako da prethodna jednačina dobija jednostavan oblik: $\operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}} = 0$. Kako je $\operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div} (\sum_{j=1}^3 P_{ji} \vec{e}_j)$, direktnom zamenom elemenata zadate matrice u ovaj izraz lako zaključujemo da ona može da reprezentuje tenzor napona.

Zadatak 2.12 Ako je poznato da je gustina zapreminskih sila koje deluju u kontinualnoj sredini jednaka $\vec{f} = -g\vec{e}_3$, gde je g -konstanta, a tenzor napona ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} x_2 & -x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & P_{33} \end{pmatrix},$$

naći kakav oblik treba da ima P_{33} tako da jednačina ravnoteže delića kontinuuma bude zadovoljena. Pretpostaviti da gustina delića ρ ne zavisi od koordinate x_3 .

Rešenje 2.12 Projektovanjem osnovne jednačine dinamike na osu x_3 dobijamo jednačinu

$$\rho g = -1 + \frac{\partial P_{33}}{\partial x_3},$$

odakle je

$$P_{33} = x_3(1 + \rho g) + F(x_1, x_2),$$

gde je $F(x_1, x_2)$ proizvoljna funkcija koordinata x_1 i x_2 .

Zadatak 2.13 (Ojlerova jednačina) Za sredinu u kojoj tenzor napona ima oblik $\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}}$, gde je p skalarna funkcija koordinata i vremena, a $\tilde{\mathcal{I}}$ jedinični tenzor, naći eksplicitni oblik osnovne jednačine dinamike.

Rešenje 2.13 Stavljajući zadati oblik tenzora napona u izraz za divergenciju tenzora dobijamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}} &= \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i \operatorname{div}(\tilde{\mathcal{P}} \tilde{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i \operatorname{div}(-p\tilde{\mathcal{I}} \tilde{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i \operatorname{div}(-p\tilde{e}_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -\operatorname{grad} p, \end{aligned}$$

pa osnovna jednačina dinamike (2.4) za ovakvu sredinu (tzv. idealan fluid) ima oblik

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (2.5)$$

Zadatak 2.14 (Navije–Stoksova jednačina) Za sredinu u kojoj tenzor napona ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}} + 2\eta\tilde{\mathcal{K}} + \xi\tilde{\mathcal{S}}_1,$$

gde su η i ξ zadate konstante, p skalarna funkcija koordinata i vremena, a

$$\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{S}}_1, \quad \tilde{\mathcal{S}}_1 = \frac{1}{3}(\nabla\vec{v})\tilde{\mathcal{I}}. \quad (2.6)$$

naći eksplicitni oblik osnovne jednačine dinamike, ako je $\tilde{\mathcal{S}}$ tenzor brzine deformacije.

Rešenje 2.14 Pošto je

$$\operatorname{div}(-p\tilde{\mathcal{I}} + 2\eta\tilde{\mathcal{K}} + \xi\tilde{\mathcal{S}}_1) = \operatorname{div}(-p\tilde{\mathcal{I}}) + 2\eta\operatorname{div}\tilde{\mathcal{K}} + \xi\operatorname{div}\tilde{\mathcal{S}}_1,$$

izračunajmo prvo divergenciju tenzora $\tilde{\mathcal{S}}_1$:

$$\nabla\tilde{\mathcal{S}}_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i \operatorname{div}((\operatorname{div}\vec{v})\tilde{e}_i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \tilde{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div}\vec{v}) = \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div}\vec{v}. \quad (2.7)$$

Kako je $\tilde{\mathcal{K}} = \tilde{\mathcal{S}} - \tilde{\mathcal{S}}_1$, divergencija tenzora $\tilde{\mathcal{K}}$ jednaka je:

$$\nabla \tilde{\mathcal{K}} = \nabla \tilde{\mathcal{S}} - \nabla \tilde{\mathcal{S}}_1 = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div}(\tilde{\mathcal{S}} \vec{e}_i) - \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (2.8)$$

Pošto je

$$\tilde{\mathcal{S}} \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \mathcal{S}_{ji} \vec{e}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \vec{e}_j, \quad (2.9)$$

sledi da je

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\tilde{\mathcal{S}} \vec{e}_i) &= \frac{1}{2} \operatorname{div} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \vec{e}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \Delta v_i \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

pa je

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{S}} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \Delta \vec{v} \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \Delta \vec{v}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

odnosno

$$\operatorname{div} \tilde{\mathcal{K}} = \frac{1}{6} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \frac{1}{2} \Delta \vec{v}. \quad (2.12)$$

Onda je

$$2\eta \operatorname{div} \tilde{\mathcal{K}} + \xi \operatorname{div} \tilde{\mathcal{S}}_1 = \frac{\eta + \xi}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \eta \Delta \vec{v} \quad (2.13)$$

i, ako još iskoristimo rezultat

$$\operatorname{div}(-p\vec{\mathcal{I}}) = -\operatorname{grad} p,$$

dobijen u rešenju prethodnog zadatka, osnovni dinamički zakon (2.4) dobija oblik jednačine

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta + \xi}{3\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (2.14)$$

2.4 Termodinamika fluida

Zadatak 2.15 *Naći jednačinu koju zadovoljava temperatura T , ako je poznato da je pri kretanju fluida zadovoljen Furijeov zakon $\vec{q} = -\kappa \nabla T$, gde je κ konstanta nezavisna od T , \vec{q} -vektor gustine fluksa toplote, a ukupna količina toplote koja prođe kroz bilo koji deo fluida je nula.*

Rešenje 2.15 Ukupna količina toplote Q koja prođe kroz bilo koji deo fluida, koji zauzima zapreminu V , ograničenu površinom S jednaka je

$$Q = \oint_S \vec{q} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{q} dV, \quad (2.15)$$

gde smo iskoristili teoremu Gausa–Ostrogradskog. Pošto je $Q = 0$, a V proizvoljno, zaključujemo da $\operatorname{div} \vec{q} = 0$, odnosno

$$\operatorname{div}(-\kappa \nabla T) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta T = 0, \quad (2.16)$$

tj. temperatura T pod ovim uslovima zadovoljava Laplasovu jednačinu.

Zadatak 2.16 *Fluid miruje između dve beskonačno velike paralelne ravne ploče $y = 0$ i $y = d$. Ako se donja ploča održava na temperaturi T_1 , a gornja na T_2 – naći stacionarnu raspodelu temperature u fluidu, pod uslovima prethodnog zadatka. Zbog simetrije pretpostaviti da je temperatura funkcija samo koordinate y .*

Rešenje 2.16 Pošto je $T = T(y)$, Laplasova jednačina, koju temperatura treba da zadovoljava, se ovde svodi na običnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0, \quad (2.17)$$

čije je opšte rešenje

$$T = C_1 y + C_2. \quad (2.18)$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz graničnih uslova $T(0) = T_1$ i $T(d) = T_2$, odakle je konačno

$$T = (T_2 - T_1) \frac{y}{d} + T_1. \quad (2.19)$$

Zadatak 2.17 *Polazeći od I zakona termodinamike primenjenog na malu supstancijalnu zapreminu kontinualne sredine, pokazati da masena gustina unutrašnje energije u te sredine zadovoljava jednačinu*

$$\rho \frac{du}{dt} = \operatorname{Tr} \tilde{S} \tilde{P} - \operatorname{div} \vec{q}, \quad (2.20)$$

gde su \tilde{S} i \tilde{P} redom tenzori brzine deformacije i napona, a \vec{q} vektor gustine fluksa toplote.

Rešenje 2.17 I zakon termodinamike

Poglavlje 3

Statika fluida

Zadatak 3.1 *Pretpostavljajući da je vazduh termodinamički idealan gas, čiji se deliћи ne kreću,*

a) *izvesti tzv. barometarsku formulu:*

$$p(x_3) = p_0 e^{-\int_0^{x_3} \frac{g dx_3}{RT(x_3)}}, \quad (3.1)$$

gde je $p(x_3)$ vrednost hidrostatičkog pritiska na visini x_3 , p_0 pritisak na nultoj visini $x_3 = 0$, g gravitaciono ubrzanje, R univerzalna gasna konstanta, a $T(x_3)$ temperatura vazduha na visini x_3 ;

b) *ako temperatura T opada linearno sa visinom x_3 kao $T = T_0 - \alpha x_3$ naći zavisnost hidrostatičkog pritiska od visine x_3 .*

Rešenje 3.1 a) Pošto se deliћи vazduha ne kreću, osnovna jednačina dinamike ima oblik

$$0 = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p, \quad (3.2)$$

gde je $\vec{f} = -g\vec{e}_3$, pa projektovanjem (3.2) na ose koordinatnog sistema dobijamo sledeće skalarne jednačine:

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g. \quad (3.5)$$

Iz jednačine (3.3) zaključujemo da pritisak p ne zavisi od koordinate x_1 , a iz (3.4) da ne zavisi ni od x_2 , što znači da pritisak može da zavisi samo od x_3 . Onda iz jednačine (3.5) sledi

$$dp = -\rho g dx_3. \quad (3.6)$$

S druge strane jednačina stanja idealnog gasa ima oblik

$$p = \rho RT, \quad (3.7)$$

pa deleći poslednje dve jednačine dobijamo jednačinu

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gdx_3}{RT(x_3)}, \quad (3.8)$$

čijim integraljenjem dobijamo *barometarsku formulu* (3.1).

b) Zamenom eksplicitne zavisnosti temperature od visine u integral sa leve strane jednačine (3.1) i njegovim izračunavanjem dobijamo

$$p(x_3) = p_0 \left(1 - \frac{\alpha}{T_0} x_3\right)^{g/\alpha R}.$$

Zadatak 3.2 Barotropan fluid čija jednačina stanja ima oblik $p = \lambda \rho^k$, gde su λ i k konstante miruje u gravitacionom polju ($\vec{g} = -g\vec{e}_3$).

- a) Naći pritisak u fluidu u zavisnosti od x_3 i p_0 -pritiska na $x_3 = 0$.
 b) Naći eksplicitan izraz za tzv. funkciju pritiska, koja se za barotropne fluide definiše relacijom

$$I(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}. \quad (3.9)$$

Rešenje 3.2 a) Isto kao u prethodnom zadatku i ovde iz osnovne jednačine dinamike za statički slučaj (3.2) sledi jednačina (3.6)

$$dp = -\rho g dx_3,$$

odakle, zamenom gustine

$$\rho = \left(\frac{p}{\lambda}\right)^{1/k}$$

iz zadate jednačine stanja, dobijamo

$$\left(\frac{p}{\lambda}\right)^{-1/k} dp = -g dx_3,$$

odnosno

$$p(x_3) = \lambda \left(p_0^{\frac{k-1}{k}} + \frac{1-k}{k} g x_3 \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (3.10)$$

b) Funkcija pritiska je po definiciji (3.9) jednaka

$$I(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\left(\frac{p}{\lambda}\right)^{1/k}} = \frac{k}{1-k} \lambda^{1/k} \left(p^{-1/k} - p_0^{-1/k} \right).$$

Zadatak 3.3 *Pretpostavimo da se materijal od kojeg se neka zvezda sastoji može tretirati kao fluid u ravnoteži, pri čemu je jedina zapreminska sila gravitaciona sila koja potiče od same supstance zvezde. Zvezda je sferno simetrična, ali nije homogena, pri čemu je poznata veza između pritiska $p(r)$ i njene gustine $\rho(r)$:*

$$p = \frac{1}{2}k\rho^2,$$

gde je k konstanta.

a) Pokazati da gustina zvezde zadovoljava jednačinu

$$\frac{d^2(r\rho(r))}{dr^2} = -\frac{4\pi\gamma}{k}r\rho(r),$$

gde je γ univerzalna gravitaciona konstanta.

b) Rešiti prethodnu jednačinu i pokazati da poluprečnik ovakve zvezde ne zavisi od njene ukupne mase, uzimajući u obzir granične uslove da je ρ konačno za $r = 0$ i iznosi $\rho(0) = \rho_0$, a jednako nuli na površini zvezde.

Rešenje 3.3 a) Iz osnovne jednačine dinamike za slučaj ravnoteže dobijamo

$$\vec{f} = \frac{1}{\rho}\text{grad}p, \quad (3.11)$$

gde je

$$\vec{f} = -\gamma\frac{m(r)}{r^2}\vec{e}_r, \quad (3.12)$$

a $m(r)$ masa sadržana u sferi poluprečnika r . Pošto je

$$\text{grad}p = \frac{dp}{d\rho}\text{grad}\rho = k\rho\text{grad}\rho = k\rho\frac{d\rho}{dr}\vec{e}_r, \quad (3.13)$$

iz jednačine (3.11) sledi

$$-\frac{\gamma}{k}m(r) = r^2\frac{d\rho}{dr}, \quad (3.14)$$

odakle, uzimajući u obzir da je

$$m(r) = 4\pi\int_0^r \rho(r)r^2 dr, \quad (3.15)$$

i diferenciranjem po r , dobijamo

$$-\frac{4\pi\gamma}{k}r^2\rho(r) = \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\rho}{dr}\right). \quad (3.16)$$

Lako se pokazuje da je ova jednačina ekvivalentna jednačini zadatoj u tekstu zadatka.

b) Ako se jednačina navedena u delu a) prepiše kao

$$\frac{d^2(r\rho(r))}{dr^2} + \frac{4\pi\gamma}{k}r\rho(r) = 0, \quad (3.17)$$

vidi se da ona ima oblik diferencijalne jednačine linearnog harmonijskog oscilatora, čije je opšte rešenje u ovom slučaju

$$r\rho(r) = A \cos \omega r + B \sin \omega r, \quad (3.18)$$

gde su A i B konstante koje treba odrediti iz početnih uslova, a ω određeno sa

$$\omega^2 = \frac{4\pi\gamma}{k}. \quad (3.19)$$

Sama gustina onda ima oblik

$$\rho(r) = A \frac{\cos \omega r}{r} + B \frac{\sin \omega r}{r}, \quad (3.20)$$

iz kog sledi da ona teži ∞ za $r \rightarrow 0$, ako je $A \neq 0$. Odavde jasno sledi zaključak da je $A = 0$, pošto je $\lim_{r \rightarrow 0} \rho(r) = \rho_0$, što je konačan broj, kao i da je $B = \rho_0/\omega$, pošto je $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$, tako da se konačno dobija

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{\sin \omega r}{\omega r}. \quad (3.21)$$

Iz uslova da je gustina zvezde na njenoj površini $r = R$ jednaka nuli sledi da je $\sin \omega R = 0$, odakle je

$$\omega R = n\pi, \quad (3.22)$$

gde je n ceo broj, pa je poluprečnik ovakve zvezde jednak

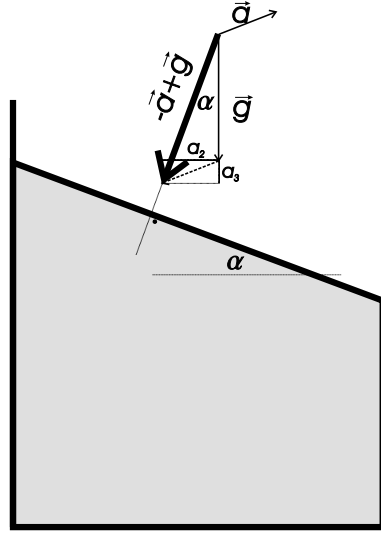
$$R = n\pi \sqrt{\frac{k}{4\pi\gamma}} \quad (3.23)$$

što očigledno ne zavisi od ukupne mase zvezde.

Zadatak 3.4 Velika posuda napunjena nestišljivom tečnošću ubrzava se u homogenom gravitacionom polju konstantnim ubrzanjem $\vec{a} = a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, gde je $\vec{g} = -g\vec{e}_3$. Odrediti nagib slobodne površine tečnosti, pretpostavljajući da je uspostavljeno stacionarno stanje, tj. da se tečnost kreće kao kruto telo, pa stoga u njoj postoje samo normalni naponi. Takođe, uzeti da je na slobodnoj površini tečnosti pritisak konstantan i jednak atmosferskom pritisku.

Rešenje 3.4 Iz osnovne jednačine dinamike (2.4) se u ovom slučaju svodi na jednačinu

$$\vec{a} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p, \quad (3.24)$$



čijim projektovanjem na koordinatne ose dobijamo skalarne jednačine:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \quad (3.25)$$

$$a_2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \quad (3.26)$$

$$a_3 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \quad (3.27)$$

Iz jednačine (3.25) sledi da pritisak ne zavisi od koordinate x_1 , a iz (3.26) dobijamo

$$p(x_1, x_2, x_3) = -\rho a_2 x_2 + F(x_3). \quad (3.28)$$

Zamenom dobijenog izraza za pritisak u jednačinu (3.27) dobijamo diferencijalnu jednačinu za funkciju $F(x_3)$:

$$\frac{dF}{dx_3} = -(a_3 + g)\rho \Rightarrow F(x_3) = -(a_3 + g)\rho x_3 + \text{const},$$

pa vraćanjem F u izraz za pritisak (3.28) sledi da pritisak u tečnosti ima oblik:

$$p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) \cdot \vec{r} + \text{const}. \quad (3.29)$$

Pošto je na slobodnoj površini tečnosti pritisak jednak atmosferskom iz (3.29) sledi da je slobodna površina tečnosti ravan normalna na vektor $\vec{g} - \vec{a}$. Sa slike se onda vidi da je ugao α pod kojim je slobodna površina tečnosti nagnuta u odnosu na horizontalnu ravan određen sa

$$\text{tg}\alpha = \frac{a_2}{a_3 + g}. \quad (3.30)$$

Zadatak 3.5 Kolica napunjena vodom spuštaju se niz strmu ravan nagibnog ugla θ , usled delovanja gravitacije. Naći ugao pod kojim je nagnuta slobodna površina vode (koja je u kontaktu sa atmosferom), zanemarujući silu trenja i efekte otpora vazduha.

Uputstvo 3.5 Zadatak se rešava slično kao i prethodni, uzimajući u obzir da se kolica kreću ubrzanjem intenziteta $g \sin \theta$ niz strmu ravan.

Zadatak 3.6 Tečnost konstantne gustine ρ rotira kao kruto telo konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne x_3 ose. Ako je gravitacija jedina zapreminska sila ($\vec{g} = -g\vec{e}_3$) pokazati da je $p/\rho - \omega^2 r^2/2 + gx_3 = \text{const}$.

Rešenje 3.6 Ubrzanje delića tečnosti koji se nalazi na rastojanju r od ose rotacije jednako je centripetalnom ubrzanju

$$\vec{a} = -\omega^2 r \vec{e}_r,$$

pa iz osnovne jednačine dinamike u cilindričnim koordinatama ($z \equiv x_3$) dobijamo sledeće skalarne jednačine

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.33)$$

Iz (3.32) sledi da pritisak ne zavisi od ugla φ , iz (3.33) sledi da je

$$p = -\rho g z + F(r),$$

a onda iz (3.31): $F(r) = \rho \omega^2 r^2/2 + \text{konst}$, pa je

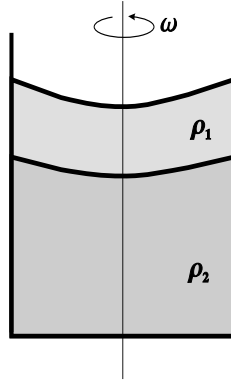
$$p(r, \varphi, z) = -\rho g z + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \text{const}, \quad (3.34)$$

odakle direktno sledi tvrđenje zadatka.

Zadatak 3.7 Donji deo vertikalne cilindrične posude ispunjen je tečnošću gustine ρ_2 , a iznad nje je tečnost gustine ρ_1 , pri čemu su obe gustine konstantne i $\rho_2 > \rho_1$. Posuda rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose, pri čemu se tečnosti ne mešaju. Naći raspodelu pritiska u posudi, jednačinu granične površine među tečnostima, kao i jednačinu slobodne površine tečnosti, ako je visina gornjeg sloja tečnosti kada posuda miruje jednaka h , a atmosferski pritisak p_0 .

Rešenje 3.7 Na isti način na koji je u prethodnom zadatku dobijen izraz za pritisak ovde se dobija da je u tečnosti gustine ρ_1 pritisak jednak

$$p^{(1)}(r, \varphi, z) = -\rho_1 g z + \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 r^2 + K_1, \quad (3.35)$$



a u tečnosti gustine ρ_2 :

$$p^{(2)}(r, \varphi, z) = -\rho_2 g z + \frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 r^2 + K_2, \quad (3.36)$$

Jednačina slobodne površine tečnosti se dobija tako što se pritisak $p^{(1)}$ izjednači sa atmosferskim, odakle je

$$z^{(1)} = \frac{\omega^2}{2g} r^2, \quad (3.37)$$

gde smo uzeli da je za $r = 0$ i $z = 0$, što onda znači i da je $K_1 = p_0$. To je, naravno, jednačina rotacionog paraboloidea.

Na granici između slojeva tečnosti su pritisci $p^{(1)}$ i $p^{(2)}$ jednaki u svakoj tački, pa izjednačavanjem izraza (3.35) i (3.36) dobijamo

$$z^{(2)} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \frac{K_2}{g(\rho_2 - \rho_1)}. \quad (3.38)$$

Zapremina V gornjeg sloja tečnosti jednaka je

$$V = 2\pi \int_0^R \int_{z^{(2)}}^{z^{(1)}} r dr dz = -\frac{\pi R^2 K_2}{g(\rho_2 - \rho_1)},$$

gde je R poluprečnik osnove posude, a pošto je ova tečnost nestišljiva, takođe je i

$$V = \pi R^2 h,$$

pa je jednačina granične površine među tečnostima

$$z^{(2)} = \frac{\omega^2}{2g} r^2 - h. \quad (3.39)$$

Poglavlje 4

Idealan fluid

4.1 Ojlerova jednačina, Bernulijev i Koši–Lagranžev integral

Zadatak 4.1 Polje brzine u fluidu ima oblik $\vec{v} = 3(x^2 - y^2)\vec{e}_x - 6xy\vec{e}_y$.

- a) Pokazati da je fluid nestišljiv pri ovakvom kretanju.
- b) Ako je fluid idealan, gustine ρ , u homogenom polju gravitacije $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, naći raspodelu hidrostatičkog pritiska (uzimajući $p(0, 0, 0) = p_0$).
- c) Ako je ravan $y = 0$ čvrsta granica, naći tangencijalnu komponentu brzine na granici.

Rešenje 4.1 a) Pošto je

$$\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 6x - 6x + 0 = 0, \quad (4.1)$$

fluid zaista ostaje nestišljiv pri ovakvom kretanju.

b) Raspodela hidrostatičkog pritiska može se naći pomoću Ojlerove jednačine (2.5):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p.$$

Pošto je za zadato polje brzine

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = 18(x^2 + y^2)(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = 18r^3\vec{e}_r, \quad (4.2)$$

gde je r rastojanje od z -ose, $\vec{f} = -g\vec{e}_z$, a ∇p u cilindričnim koordinatama ima oblik

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (4.3)$$

projektovanjem Ojlerove jednačine na pravce ortova \vec{e}_r , \vec{e}_φ i \vec{e}_z dobijamo sledeće tri skalarne jednačine:

$$18r^3 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.4)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (4.5)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.6)$$

Iz jednačine (4.4) sledi

$$p(r, \varphi, z) = -\frac{9}{2}\rho r^4 + F(\varphi, z), \quad (4.7)$$

pa zamenom ovakvog izraza za pritisak u (4.5) zaključujemo da funkcija F ne zavisi od φ koordinate, a iz jednačine (4.6) onda sledi

$$-g\rho = \frac{dF}{dz}, \quad (4.8)$$

odakle je $F = -\rho gz + \text{const.}$ Vraćajući F u (4.7) dobijamo konačan izraz za pritisak

$$p = p_0 - \rho gz - \frac{9}{2}\rho r^4 = p_0 - \rho gz - \frac{9}{2}\rho(x^2 + y^2)^2, \quad (4.9)$$

gde smo konstantu u F odredili pomoću uslova $p(0, 0, 0) = p_0$.

Lako se proverava da je $\text{rot} \vec{v} = 0$, a pošto je proticanje stacionarno, fluid nestišljiv i zapreminske sile potencijalne, pritisak se može odrediti i pomoću Bernulijevog, odnosno Koši–Lagranževog integrala, koji se u ovom slučaju svode na jednačinu

$$p + \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2 = p(0, 0, 0) = p_0, \quad (4.10)$$

odakle se zamenom datog izraza za brzinu dobija ponovo (4.9).

c) Pošto brzina ima samo x i y komponentu, njena tangencijalna komponenta u ravni $y = 0$ je $\vec{v}_{tang} = 3x^2 \vec{e}_x$.

Zadatak 4.2 *Linijski izvor idealnog homogenog nestišljivog fluida (vidi zadatak 1.29) postavljen je u pravcu vertikalne ose u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Jačina izvora je Q . Pomoću Ojlerove jednačine (2.5) naći raspodelu pritiska, ako je poznato da je na velikim rastojanjima od ose na visini $z = 0$ pritisak jednak p_0 . Gustina fluida je ρ .*

Rešenje 4.2 Supstancijalni izvod brzine koji figuriše na levoj strani Ojlerove jednačine (2.5) u ovom slučaju najlakše je izračunati pomoću izraza (1.10), čime dobijamo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{Q^2}{4\pi^2 r^3} \vec{e}_r. \quad (4.11)$$

Stavljanjem dobijenog izraza u Ojlerovu jednačinu i njenim projektovanjem na pravce ortova \vec{e}_r , \vec{e}_φ i \vec{e}_z dobijamo tri skalarne jednačine čijim rešavanjem nalazimo

$$p(r, \varphi, z) = -\rho g z - \frac{\rho Q^2}{8\pi^2 r^2} + \text{const}.$$

Iz uslova da je na velikim rastojanjima od ose na visini $z = 0$ pritisak jednak p_0 dobijamo da je integraciona konstanta koja se pojavila u prethodnom izrazu jednaka upravo p_0 , pa se konačno za pritisak dobija

$$p(r, \varphi, z) = -\rho g z - \frac{\rho Q^2}{8\pi^2 r^2} + p_0. \quad (4.12)$$

Zadatak 4.3 *Naći raspodelu pritiska za slobodni vorteks (vidi zadatak 1.31) u homogenom polju gravitacije, ako se osa vorteksa poklapa sa pravcem gravitacionog polja $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Gustina fluida je ρ , a za $z = 0$ i $r \rightarrow \infty$ pritisak teži vrednosti p_0 .*

Rešenje 4.3 Slično kao u prethodnom zadatku, pošto je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ i $\text{rot} \vec{v} = 0$ sledi

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2} \text{grad}(v^2).$$

Kako je $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$, Ojlerova jednačina dobija oblik

$$-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^3} \vec{e}_r = -g\vec{e}_z - \frac{1}{\rho} \text{grad} p, \quad (4.13)$$

odakle nalazimo

$$p = -\rho g z - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r^2} + p_0. \quad (4.14)$$

I u ovom slučaju su, kao i u prethodna dva zadatka zadovoljeni uslovi za važenje kako Bernulijevog, tako i Koši–Lagranževog integrala, pa se izraz za pritisak mogao dobiti i direktno primenom ovih integrala.

Zadatak 4.4 *Tornado se može grubo opisati kao vorteks sa rotacionim jezgrom koje se aproksimativno ponaša kao čvrsto telo, dok je van jezgra brzina $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$. (Tipična procenjena vrednost poluprečnika jezgra je 30m.) Kako se menja pritisak na površini Zemlje van jezgra tornada? Koliki je maksimalni pad pritiska za tornado sa maksimalnom brzinom vetra 100km na čas? Ovaj potpritisak je delimično odgovoran za podizanje krovova i veliki deo štete koju tornado pravi. Pretpostaviti da se gustina vazduha može smatrati konstantom i uzeti da je jednaka $\rho = 2.3 \text{ kg/m}^3$.*

Rešenje 4.4 Van jezgra polje brzine je potencijalno i stacionarno, a kako je gustina konstantna i jedina zapreminska sila potencijalna, važe Bernulijev i Koši–Lagranžev integral, tj.

$$p(R, z = 0) + \frac{1}{2} \rho v_{\max}^2 = p(r, z = 0) + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0, \quad (4.15)$$

gde je R poluprečnik jezgra, a p_0 atmosferski pritisak na površini Zemlje na velikim udaljenostima od jezgra tornada (gde je onda brzina vetra zanemarljiva). Odatle je maksimalni pad pritiska jednak

$$p(R, z = 0) - p_0 = -\frac{1}{2}\rho v_{\max}^2 \approx -890\text{Pa}. \quad (4.16)$$

Zadatak 4.5 Pokazati da Bernulijeva jednačina u slučaju stacionarnog proticanja idealnog gasa ima oblik

$$a) \quad U + \frac{p}{\rho} \ln \rho + v^2/2 = \text{const}, \text{ za izotermno proticanje};$$

$$b) \quad U + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + v^2/2 = \text{const}, \text{ za izentropijsko proticanje}.$$

Rešenje 4.5 Pošto Bernulijeva jednačina ima oblik

$$U + \frac{1}{2}v^2 + I(p) = \text{const}, \quad (4.17)$$

gde je

$$I(p) = \int \frac{dp}{\rho}, \quad (4.18)$$

a U masena gustina potencijalne energije, ovde je potrebno naći funkciju I . Jednačina stanja termodinamički idealnog gasa ima oblik

$$p = \rho RT, \quad (4.19)$$

odakle se za

a) izotermno proticanje dobija

$$I = RT \int \frac{d\rho}{\rho} = RT \ln \rho = \frac{p}{\rho} \ln \rho. \quad (4.20)$$

b) Za izentropijsko proticanje idealnog gasa se može pokazati [1] da važi jednačina

$$p = K\rho^\gamma, \quad (4.21)$$

odakle je

$$dp = K\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho,$$

pa je

$$I = K\gamma \int \rho^{\gamma-2}d\rho = K\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}. \quad (4.22)$$

Ako sada iskoristimo jednačinu (4.21) dobijamo

$$I = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho},$$

što je i trebalo pokazati.

4.2 Potencijalno proticanje idealnog fluida

Zadatak 4.6 *Stacionarno proticanje idealnog nestišljivog fluida gustine ρ , van polja zapreminskih sila, opisano je funkcijom toka*

$$\Psi(r, \varphi) = \alpha \frac{\cos \varphi}{r},$$

gde je α konstanta, a r i φ polarne koordinate.

- Naći polje pritiska u fluidu.
- Uzimajući da je beskonačno daleko od koordinatnog početka pritisak jednak p_0 , naći ukupnu silu koja deluje na zamišljeni cilindar jedinične visine, čija se osa poklapa sa z -osom.

Rešenje 4.6 a) Pošto je $\vec{v} = \vec{e}_3 \times \nabla \Psi$ i

$$\nabla \Psi = -\frac{\alpha}{r^2} (\cos \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \vec{e}_\varphi), \quad (4.23)$$

lako se nalazi da je

$$\vec{v} = \frac{\alpha}{r^2} (\sin \varphi \vec{e}_r - \cos \varphi \vec{e}_\varphi). \quad (4.24)$$

Kako je $\text{rot} \vec{v} = 0$ (što se lako proverava), polje pritiska u fluidu nalazimo pomoću Bernulijevog ili Koši–Lagranževog integrala, koji se u ovom slučaju svode na jednačinu

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (4.25)$$

odakle je

$$p = \text{const} - \frac{1}{2} \rho \frac{\alpha^2}{r^4}. \quad (4.26)$$

b) Ako je za $r \rightarrow \infty$ pritisak jednak p_0 , onda iz prethodne jednačine sledi

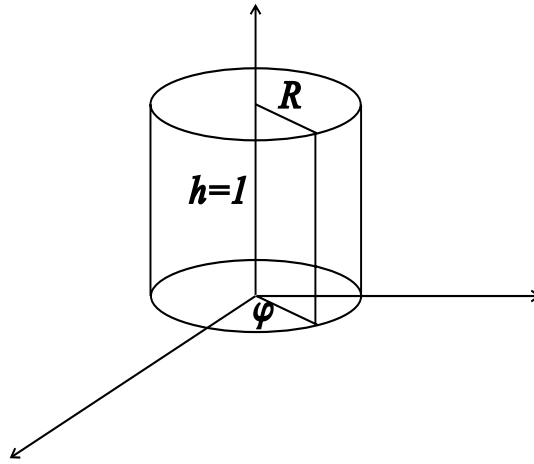
$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \frac{\alpha^2}{r^4}, \quad (4.27)$$

a ukupna sila \vec{F} , koja deluje na zamišljeni cilindar, jednaka je

$$\vec{F} = - \oint_S p \, d\vec{S}, \quad (4.28)$$

gde je S površina cilindra. Površinski integral u izrazu za silu možemo razdvojiti na tri integrala: integral po omotaču i dva integrala po osnovama cilindra. Integrali po osnovama se međusobno anuliraju, pošto je jedina razlika među njima u znaku $d\vec{S}$. Element površine $d\vec{S}$ na omotaču cilindra jednak je $R d\varphi dz \vec{e}_r$, gde je R poluprečnik osnove cilindra, pa je

$$\vec{F} = -R \left(p_0 - \frac{1}{2} \rho \frac{\alpha^2}{R^4} \right) \int_0^{2\pi} (\vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi) d\varphi \int_0^1 dz = 0, \quad (4.29)$$



gde smo iskoristili jednakosti:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi, \quad \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0.$$

Zadatak 4.7 *Profil brzine pri stacionarnom nestišljivom proticanju idealnog fluida, gustine ρ , van polja zapreminskih sila, u cilindričnim koordinatama ima oblik*

$$\vec{v} = \frac{\alpha}{r^2} (\cos \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \vec{e}_\varphi),$$

gde je α zadata konstanta. Znajući da je beskonačno daleko od koordinatnog početka pritisak jednak p_0 naći

- polje pritiska u fluidu;
- ukupnu silu koja deluje na zamišljeni kružni cilindar jedinične visine, čija se osa poklapa sa z -osom.

Rešenje 4.7 a) Lako se proverava da je $\text{rot} \vec{v} = 0$, tj. ovde se radi o potencijalnom proticanju, pa se polje pritiska u fluidu može naći pomoću Bernulijeve jednačine, koja u ovom slučaju ima oblik

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (4.30)$$

odakle je

$$p = \text{const} - \frac{1}{2} \rho \frac{\alpha^2}{r^4}. \quad (4.31)$$

Pošto je za $r \rightarrow \infty$ pritisak jednak p_0 , iz prethodne jednačine sledi

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \frac{\alpha^2}{r^4}. \quad (4.32)$$

b) Na isti način kao u prethodnom zadatku dobija se da je ukupna sila \vec{F} koja deluje na zamiv sljeni cilindar jednaka nuli.

Zadatak 4.8 Potencijal brzine Φ u cilindričnim koordinatama ima oblik

$$\Phi(r, \varphi, z) = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \varphi.$$

- Uveriti se da Φ zadovoljava Laplasovu jednačinu $\Delta\Phi = 0$.
- Uveriti se da polje brzine $\vec{v} = \nabla\Phi$ zadovoljava granične uslove za proticanje nestišljivog idealnog fluida oko nepokretnog čvrstog cilindra $r = R$. Kolika je brzina fluida na jako velikim rastojanjima od takvog cilindra?
- Ako nema zapreminskih sila, a poznato je da je pritisak na jako velikim rastojanjima od cilindra jednak p_∞ , naći pritisak u bilo kojoj tački fluida, ako je gustina fluida ρ .
- Izračunati silu kojom fluid deluje na jediničnu dužinu cilindra.

Rešenje 4.8 a) Direktnom zamenom datog potencijala u izraz za laplasijan u cilindričnim koordinatama

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (4.33)$$

dobija se da je $\Delta\Phi = 0$.

b) Pošto je

$$\vec{v} = \text{grad}\Phi = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (4.34)$$

cilindrične komponente brzine jednake su

$$v_r = U \cos \varphi \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad v_\varphi = -U \sin \varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right), \quad v_z = 0. \quad (4.35)$$

Granični uslov koji treba da bude zadovoljen pri proticanju idealnog fluida oko cilindra $r = R$ je uslov neprobojnosti, tj. uslov da je normalna komponenta brzine na površini cilindra jednaka nuli:

$$v_r|_{r=R} = 0, \quad (4.36)$$

što jeste zadovoljeno. Takođe, pošto je $\text{div}\vec{v} = \text{div grad}\Phi = \Delta\Phi = 0$, zaista se radi o nestišljivom proticanju.

Dekartove komponente brzine v_x i v_y izražavaju se preko cilindričnih komponenta kao

$$v_x = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad v_y = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi, \quad (4.37)$$

odakle je

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_x = U, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} v_y = 0. \quad (4.38)$$

c) Pošto je kretanje potencijalno i stacionarno, zapreminskih sila nema, a gustina fluida konstantna, zadovoljeni su uslovi za primenu Bernulijeve jednačine u bilo kojoj tački i bilo kom trenutku, pa je

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2}, \quad (4.39)$$

odakle je

$$p = p_\infty - \frac{\rho U^2}{2} \left(\frac{2R^2}{r^2} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) + \frac{R^4}{r^4} \right), \quad (4.40)$$

pri čemu smo iskoristili izraze za komponente brzine nađene pod b).

d) Ukupna površinska sila \vec{F} , koja deluje na jedinicu dužine cilindra jednaka je

$$\vec{F} = - \int_S p \, d\vec{S},$$

gde je S površina tog dela cilindra. Element površine $d\vec{S}$ na omotaču cilindra jednak je $R d\varphi dz \vec{e}_r$, gde je R poluprečnik osnove cilindra, pa je

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz p(R, \varphi) \vec{e}_r \\ &= -R \int_0^{2\pi} d\varphi \left(p_\infty - \frac{\rho U^2}{2} (4 \sin^2 \varphi - 1) \right) (\vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi) = 0, \end{aligned}$$

gde smo iskoristili

$$\int_0^{2\pi} (4 \sin^2 \varphi - 1) \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 \varphi - 1) \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Zadatak 4.9 U prethodnom zadatku naći tačke u kojima je brzina jednaka nuli (tačke stagnacije), ako takve postoje. Gde na površini cilindra pritisak ima minimalnu vrednost i kolika je ta vrednost?

Rešenje 4.9 Iz izraza za brzinu nađenih u prethodnom zadatku lako se nalazi da su tačke stagnacije ($r = R, \varphi = 0$) i ($r = R, \varphi = \pi$). Iz Bernulijeve jednačine sledi da pritisak ima maksimalnu vrednost u ovim tačkama. Tačke u kojima pritisak ima ekstremalnu vrednost na površini cilindra nalaze se pomoću jednačine

$$\frac{dp(r = R)}{d\varphi} = -4\rho U^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0, \quad (4.41)$$

koja je zadovoljena ako je $\cos \varphi = 0$ ili $\sin \varphi = 0$. Minimumu pritiska odgovaraju uglovi $\varphi = \pi/2$ i $3\pi/2$, za koje je

$$p_{\min} = p_\infty - \frac{3}{2} \rho U^2. \quad (4.42)$$

Zadatak 4.10 Stacionarno potencijalno proticanje idealnog nestišljivog fluida gustine ρ , van polja zapreminskih sila, oko beskonačno dugačkog kružnog cilindra poluprečnika $r = a$, zadato je potencijalom brzine:

$$\Phi(r, \varphi) = V_{\infty} \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \varphi - K \varphi,$$

gde su V_{∞} i K zadate pozitivne konstante, a r i φ polarne koordinate.

- Naći brzinu proticanja delića u fluidu, kao i tačke stagnacije. Skicirati strujne linije.
- Izračunati cirkulaciju brzine po kružnici sa centrom na osi cilindra, poluprečnika $R > a$, koja leži u ravni normalnoj na osu cilindra.

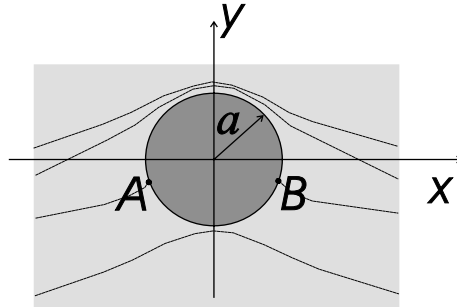
Rešenje 4.10 a) Komponente brzine su

$$v_r = V_{\infty} \cos \varphi \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad v_{\varphi} = -V_{\infty} \sin \varphi \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{K}{r}, \quad v_z = 0. \quad (4.43)$$

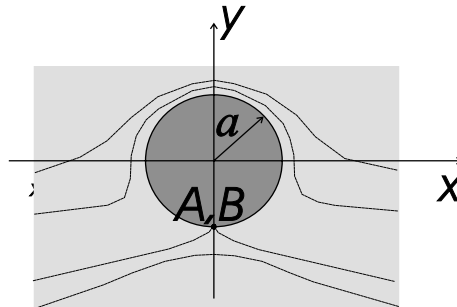
Izjednačavanjem ovih izraza sa nulom zaključujemo da

- za $K \leq 2V_{\infty}a$ u svakoj ravni normalnoj na osu cilindra postoje dve tačke stagnacije A i B određene jednačinama

$$r = a, \quad \sin \varphi = -\frac{K}{2V_{\infty}a} \quad (4.44)$$

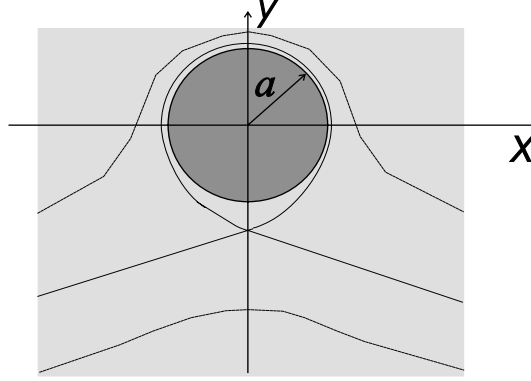


- za $K = 2V_{\infty}a$ tačke A i B iz prethodnog slučaja se poklapaju, tj. u svakoj ravni normalnoj na osu cilindra postoji jedna tačka stagnacije ($r = a, \varphi = 3\pi/2$) i ona se nalazi na površini cilindra;



3. za $K > 2V_\infty a$ tačke stagnacije određene su izrazima

$$r = \frac{K}{2V_\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2 V_\infty^2}{K^2}} \right), \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}. \quad (4.45)$$



b) Pošto je element linije na ovakvoj konturi $d\vec{l} = R d\varphi \vec{e}_\varphi$, cirkulacija Γ je jednaka

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = R \int_0^{2\pi} v_\varphi d\varphi = -2K\pi. \quad (4.46)$$

Obratiti pažnju da ovde ne može da se primeni Stoksova teorema (rezultat bi bio 0).

Zadatak 4.11 Uzimajući da je u prethodnom zadatku beskonačno daleko od cilindra pritisak jednak p_∞ , naći pritisak u fluidu, kao i silu koja deluje po jedinici dužine cilindra.

Rezultat 4.11 Pritisak se nalazi iz Bernulijeve jednačine, a odatle $F_x = 0$ i $F_y = -2\pi K \rho V_\infty$. Ponovo fluid ne deluje nikakvom silom u pravcu svog proticanja (na velikim rastojanjima od cilindra), ali sada postoji sila u pravcu normalnom na pravac toka.

Zadatak 4.12 Kolikom silom treba delovati na loptu radijusa R da bi ona mirovala u homogenom nestišljivom idealnom fluidu, koji se na jako velikim rastojanjima od lopte kreće konstantnom brzinom $\vec{u} = u\vec{e}_z$? Zapreminske sile zanemariti, a za polje brzine fluida pretpostaviti da je stacionarno i bezvrtložno, pri čemu je potencijal oblika

$$\Phi = F(r) \cos \theta,$$

gde je r rastojanje od centra lopte, a θ ugao između radius vektora \vec{r} i orta \vec{e}_z .

Rešenje 4.12 Da bi lopta mirovala potrebno je na nju delovati silom intenziteta jednakog intenzitetu ukupne površinske sile kojom fluid deluje na nju,

a suprotnog znaka. Potrebno je, dakle, naći pritisak u fluidu, što je u ovom slučaju moguće uraditi pomoću Bernulijeve jednačine:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u^2, \quad (4.47)$$

ako je poznata brzina fluida \vec{v} i pritisak na velikim rastojanjima od lopte p_∞ . Pod pretpostavkom sugerisanom u zadatku je $\vec{v} = \text{grad}\Phi$, pri čemu potencijal zbog nestišljivosti zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\Delta\Phi = 0. \quad (4.48)$$

Stavljanjem pretpostavljenog oblika za potencijal Φ u izraz za laplasijan (A.8) u sfernim koordinatama dobijamo jednačinu:

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + 2r \frac{dF}{dr} - 2F = 0. \quad (4.49)$$

Iz teorije diferencijalnih jednačina poznato je da se rešenje ovakve jednačine traži u obliku $F = Cr^k$, gde su C i k konstante. Zamenom takvog oblika za funkciju F u jednačinu dobijamo

$$C(k^2 + k - 2)r^k = 0,$$

što je zadovoljeno za svako r jedino ako je

$$k^2 + k - 2 = 0,$$

tj. ako je $k = 1$ ili $k = -2$. To dalje znači da je opšte rešenje jednačine (4.49) oblika

$$F(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \quad (4.50)$$

tj. potencijal Φ je jednak

$$\Phi = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (4.51)$$

pa su komponente brzine u sfernim koordinatama:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(C_1 - \frac{2C_2}{r^3} \right) \cos \theta, \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right) \sin \theta, \\ v_\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Zbog uslova neprobojnosti na površini lopte $r = R$ normalna komponenta brzine v_r treba da bude jednaka nuli, odakle sledi da je

$$C_1 = \frac{2C_2}{R^3},$$

pa je

$$\begin{aligned}\Phi &= C_2 \left(2 \frac{r}{R^3} + \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta, \\ v_r &= 2C_2 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right) \cos \theta, \\ v_\theta &= -C_2 \left(\frac{2}{R^3} + \frac{1}{r^3} \right) \sin \theta,\end{aligned}$$

Preostalu neodređenu konstantu C_2 određujemo iz uslova da intenzitet brzine fluida za $r \rightarrow \infty$ teži vrednosti u . Iz poslednjih izraza za komponente brzine vidimo da je

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_r = \frac{2C_2}{R^3} \cos \theta, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} v_\theta = -\frac{2C_2}{R^3} \sin \theta,$$

pa je

$$u = \frac{2C_2}{R^3} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2} u R^3.$$

Konačni izrazi za potencijal i komponente brzine su onda

$$\Phi = ur \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad (4.52)$$

$$v_r = u \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad (4.53)$$

$$v_\theta = -u \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta, \quad (4.54)$$

pa je na površini lopte

$$v^2 = \frac{9}{4} u^2 \sin^2 \theta,$$

a onda je iz Bernulijeve jednačine pritisak

$$p(r = R, \theta, \varphi) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho u^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (4.55)$$

Pošto je element površine lopte $d\vec{S}$ jednak

$$d\vec{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r,$$

gde je

$$\vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z,$$

ukupna sila kojom fluid deluje na loptu jednaka je

$$\vec{F} = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta p(r = R, \theta, \varphi) \sin \theta (\sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z). \quad (4.56)$$

Jasno je da su F_x i F_y komponente ove sile jednake nuli, zbog $\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$, a z komponenta je

$$F_z = 2\pi R^2 \left(\left(p_\infty + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta - \frac{9}{8} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \right) = 0, \quad (4.57)$$

jer su oba integrala u poslednjem izrazu takođe jednaka nuli. Dakle, nije potrebno delovati nikakvom silom na loptu da bi ona mirovala. Ovo je paradoksalan rezultat (tzv. D'alambertov paradoks – slične rezultate dobili smo u prethodnim zadacima sa cilindrima), pošto je iz iskustva poznato da na loptu u ovakvim slučajevima fluid deluje silom jednakom $6\pi\eta Ru$, gde je η koeficijent viskoznosti. Jasno, rezultat da je sila jednaka nuli i jeste posledica pretpostavke da se ovde radi o idealnom fluidu, tj. da se viskoznost zanemaruje.

4.3 Vrtložno kretanje idealnog fluida

Zadatak 4.13 *Polazeći od Helmholtzove jednačine*

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \operatorname{div} \vec{v} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{f}, \quad (4.58)$$

koja važi za idealan barotropan fluid, pokazati da je pri nestišljivom dvodimenzionom proticanju takvog fluida u polju potencijalnih zapreminskih sila $\vec{f} = -\nabla U$, vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ konstantan duž trajektorije delića.

Rešenje 4.13 Ako je proticanje nestišljivo, onda je $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, a ako su zapreminske sile potencijalne, onda je $\operatorname{rot} \vec{f} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$, pa se Helmholtzova jednačina svodi na

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (4.59)$$

S druge strane u zadatku 1.33 pokazano je da se pri dvodimenzionom nestišljivom kretanju brzina $\vec{v} = v_1(x_1, x_2, t)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, t)\vec{e}_2$ može izraziti preko funkcije toka $\psi(x_1, x_2, t)$ kao

$$\vec{v} = \vec{e}_3 \times \nabla \psi,$$

odakle je

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \Delta \psi \vec{e}_3, \quad (4.60)$$

pa je onda

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \Delta \psi \frac{\partial}{\partial x_3} (\vec{e}_3 \times \nabla \psi) = 0. \quad (4.61)$$

Iz jednačine (4.59) onda direktno sledi da je

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0,$$

tj. zaista je $\vec{\omega} = \text{const}$ duž trajektorije delića.

Zadatak 4.14 Pokazati da pri proticanju idealnog fluida brzinom \vec{v} , za infinitezimalni supstancijalni vektor $d\vec{l}$ važi

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot d\vec{l}) = d\vec{l} \cdot \left(\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 \right). \quad (4.62)$$

Rešenje 4.14 Supstancijalni izvod skalarnog proizvoda brzine \vec{v} i supstancijalnog elementa $d\vec{l}$ jednak je

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot d\vec{l}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} + \vec{v} \cdot \frac{d(d\vec{l})}{dt}. \quad (4.63)$$

Ako je $d\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, onda je

$$d(d\vec{l}) = (\vec{r}_2 + \vec{v}(\vec{r}_2, t)dt - (\vec{r}_1 + \vec{v}(\vec{r}_1, t)dt)) - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = (\vec{v}(\vec{r}_2, t) - \vec{v}(\vec{r}_1, t))dt,$$

a pošto je

$$\vec{v}(\vec{r}_2, t) = \vec{v}(\vec{r}_1 + d\vec{l}, t) = \vec{v}(\vec{r}_1, t) + (d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{v},$$

sledi da je

$$\vec{v} \cdot \frac{d(d\vec{l})}{dt} = \vec{v} \cdot ((d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{v}). \quad (4.64)$$

Kako je

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot ((d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{v}) &= \sum_{i=1}^3 v_i \sum_{j=1}^3 dl_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^3 dl_j v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 dl_j \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 dl_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 v_i^2 \right) = \frac{1}{2} d\vec{l} \cdot \text{grad} v^2, \end{aligned}$$

vraćanjem ovog izraza u (4.64), a zatim u (4.63), dobijamo

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot d\vec{l}) = d\vec{l} \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 \right),$$

a odatle, zamenom supstancijalnog izvoda brzine iz Ojlerove jednačine (2.5), konačno i izraz koji je trebalo pokazati.

Zadatak 4.15 (Kelvinova teorema) Koristeći prethodni zadatak pokazati da se cirkulacija $\Gamma = \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l}$ po supstancijalnoj konturi $C(t)$ u idealnom barotropnom fluidu, koji se kreće u polju potencijalnih zapreminskih sila, ne menja u toku njenog kretanja.

Rešenje 4.15 Supstancijalni izvod cirkulacije Γ jednak je

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_{C(t)} \frac{d}{dt} \vec{v} \cdot d\vec{l},$$

a to je, na osnovu prethodnog zadatka dalje jednako

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot \left(\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 \right) \\ &= \oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot \nabla \left(-U - I + \frac{1}{2} v^2 \right) = \oint_{C(t)} d(-U - I + \frac{1}{2} v^2) = 0,\end{aligned}$$

gde smo iskoristili izraze $\vec{f} = -\text{grad} U$ i $\text{grad} p / \rho = \text{grad} I$, koji su redom posledica potencijalnosti zapreminskih sila i barotropnosti fluida. Dakle,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0,$$

što znači da je zaista $\Gamma(t) = \text{const}$ u toku kretanja konture C sastavljene od delića fluida.

Zadatak 4.16 Kretanje tipa Rankinovog vorteksa

$$\vec{v} = \begin{cases} \frac{1}{2} r \Omega \vec{e}_\varphi, & \text{za } r < a \\ \frac{1}{2} \frac{\Omega a^2}{r} \vec{e}_\varphi, & \text{za } r > a \end{cases}$$

uspostavljeno je u velikoj zapremini vode sa slobodnom površinom (r, ϕ, z) . Ako je za $r \gg a$ slobodna površina deo ravni $z = 0$, pokazati da je jednačina slobodne površine vode za konačno r data sa

$$z = \begin{cases} -\frac{\Omega^2 a^4}{8gr^2}, & \text{za } r > a \\ -\frac{\Omega^2 a^2}{4g} + \frac{\Omega^2 r^2}{8g}, & \text{za } r < a. \end{cases}$$

Rešenje 4.16 Zamenjivanjem izraza za brzinu u Ojlerovu jednačinu, dobijaju se jednačine u oblastima $r < a$ i $r > a$, iz kojih sledi da je pritisak jednak

$$p = \begin{cases} -\rho g z + \frac{1}{8} \rho r^2 \Omega^2 + C_1, & \text{za } r < a \\ -\rho g z - \frac{1}{8} \frac{\rho \Omega^2 a^4}{r^2} + C_2, & \text{za } r > a \end{cases} \quad (4.65)$$

Za $r \rightarrow \infty$ slobodna površina leži u ravni $z = 0$, a na slobodnoj površini je pritisak jednak atmosferskom pritisku p_0 , pa odatle zaključujemo da je $C_2 = p_0$. Takođe, pritisak treba da bude neprekidna funkcija, pa odatle za $r = a$ zaključujemo da je $C_1 = p_0 - \frac{1}{4} \rho \Omega^2 a^2$. Jednačinu slobodne površine vode datu u zadatku onda direktno dobijamo izjednačavanjem pritiska (4.65) sa atmosferskim pritiskom p_0 .

Zadatak 4.17 Jako dugačak nepokretan cilindar nalazi se u struji idealnog fluida, opisanoj funkcijom toka

$$\psi = U r \sin \varphi - \frac{U a^2}{r} \sin \varphi - \frac{k}{2\pi} \ln \frac{r}{a},$$

gde su k, a i U konstante, $|k| \leq 4\pi Ua$, a r, φ i z cilindrične koordinate, pri čemu se z -osa poklapa sa osom cilindra. Pokazati da ukupna površinska sila kojom fluid deluje na jediničnu dužinu cilindra ima pravac normalan na pravac brzine fluida na jako velikim rastojanjima (takođe, normalan i na osu cilindra), a intenzitet $\rho U k$, gde je ρ gustina fluida.

Rešenje 4.17 Pomoću date funkcije toka nalazimo cilindrične komponente brzine:

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = U \cos \varphi \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \\ v_\varphi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} = U \sin \varphi \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) - \frac{k}{2\pi r} \end{aligned}$$

a onda stavljanjem izraza za brzinu u Ojlerovu jednačinu dobijamo izraz za pritisak:

$$p(r, \varphi) = \rho \left(\frac{U^2 a^2}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{kU}{2\pi r} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) - \frac{k^2}{8\pi^2 r^2} \right) + \text{const}. \quad (4.66)$$

Površinska sila po jedinici dužine \vec{F} je onda jednaka

$$\vec{F} = -a \int_0^{2\pi} p(a, \varphi) \vec{e}_r d\varphi = -a \int_0^{2\pi} p(a, \varphi) (\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) d\varphi = -\rho k U \vec{e}_y.$$

Ova sila je očigledno normalna na osu cilindra, a pošto je brzina fluida na jako velikim rastojanjima od cilindra jednaka

$$\vec{V} = \lim_{r \rightarrow \infty} (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi) = -U(\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) = -U \vec{e}_x,$$

sila je normalna i na brzinu u beskonačnosti.

4.4 Talasi u idealnom fluidu

Zadatak 4.18 Kroz stišljivi idealni barotropni fluid prostire se ravan monohromatski talas, pri čemu je brzina delića

$$\vec{v} = v \vec{e}_1 = \epsilon \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 - ct),$$

gde je

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \Big|_{\rho=\rho_0}$$

fazna brzina talasa, λ talasna dužina, $a \epsilon \ll c$. Pretpostavljajući da se gustina ρ pri prostiranju talasa menja kao $\rho(x_1, t) = \rho_0(1 + s(x_1, t))$, $|s| \ll 1$, gde je ρ_0 gustina neperturbisanog fluida, naći $\rho(x, t)$. Jedina zapreminska sila je gravitaciona sila $\vec{f} = -g \vec{e}_3$.

Rešenje 4.18 Pošto je

$$v \frac{\partial v}{\partial x_1} = -\epsilon^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - ct) \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - ct)$$

i

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \epsilon c \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - ct)$$

sledi da je

$$\left| \frac{v \frac{\partial v}{\partial x_1}}{\frac{\partial v}{\partial t}} \right| = \frac{\epsilon}{c} \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - ct) \right| \ll 1,$$

pa je

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Takođe, pošto je fluid barotropan, važi

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = c^2 \rho_0 \frac{\partial s}{\partial x_1},$$

pa iz Ojlerove jednačine (2.5) sledi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial x_1}, \quad (4.67)$$

odakle je

$$s(x_1, t) = \frac{\epsilon}{c} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - ct) + F(t). \quad (4.68)$$

S druge strane, jednačina kontinuiteta ovde ima oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v) \approx \rho_0 \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,$$

odakle sledi

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow F = \text{const},$$

gde smo iskoristili (4.68). Konačno je

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\epsilon}{c} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - ct) \right),$$

pošto F mora da bude jednako 0, zbog uslova da je u neperturbisanom stanju $\rho = \rho_0$.

Zadatak 4.19 (Rimanov talas) Poznato je da pri prostiranju talasa kroz stišljiv barotropan fluid njegovi delići imaju brzinu oblika

$$\vec{v} = v(\rho) \vec{e}_1,$$

pri čemu je gustina ρ fluida funkcija samo x_1 koordinate i vremena t . Ako je jedina zapreminska sila koja deluje gravitaciona sila $\vec{f} = -g\vec{e}_3$, pokazati da gustina pri ovakvom talasnom kretanju mora da zadovoljava jednačinu

$$\rho = F\left(t - \frac{x}{u(\rho)}\right),$$

gde je F proizvoljna funkcija svog argumenta $(t - x/u)$, a

$$u(\rho) = v(\rho) + c(\rho), \quad c(\rho) = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Rešenje 4.19 Pod pretpostavkama zadatka jednačina kontinuiteta dobija oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \left(v + \rho \frac{dv}{d\rho} \right) = 0, \quad (4.69)$$

a projekcija Ojlerove jednačine na x_1 osu:

$$\frac{dv}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \left(v \frac{dv}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \right) = 0. \quad (4.70)$$

Množenjem jednačine (4.69) sa $\frac{dv}{d\rho}$ i poređenjem tako dobijene jednačine sa jednačinom (4.70) zaključujemo da je

$$\frac{dp}{d\rho} = \rho^2 \left(\frac{dv}{d\rho} \right)^2,$$

odakle je

$$\rho \frac{dv}{d\rho} = c.$$

Vraćanjem poslednjeg izraza u (4.69) dobijamo jednačinu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = 0. \quad (4.71)$$

Konačno, treba proveriti da li funkcija koja zadovoljava jednačinu $\rho = F(t - x/u(\rho))$, zadovoljava i jednačinu (4.71). Pošto je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \left(1 + \frac{x_1}{u^2} u' \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) F', \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_1} &= \left(-\frac{1}{u} + \frac{x_1}{u^2} u' \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right) F', \end{aligned}$$

direktnom zamenom ovih izraza u jednačinu (4.71) dobijamo identitet, što znači da gustina zaista zadovoljava jednačinu datu u zadatku, za funkciju F proizvoljnog oblika.

Zadatak 4.20 Gravitacioni talas male amplitude [1] prostire se kroz nestišljivu tečnost beskonačne dubine i jako velike površine, pri čemu je potencijal brzine Φ jednak

$$\Phi = Ce^{kx_3} \cos(kx_1 - \omega t),$$

gde su C , k i ω pozitivne konstante, a x_3 koordinata izabrana tako da je gravitaciono ubrzanje $\vec{g} = -g\vec{e}_3$. Pretpostavljajući da se delići tečnosti pri ovakvom kretanju ne udaljavaju mnogo od svojih srednjih položaja (x_1^0, x_2^0, x_3^0) (koji se ne menjaju sa vremenom), pokazati da su trajektorije delića približno kružnice, čiji poluprečnici opadaju sa dubinom.

Rešenje 4.20 Komponente brzine delića su jednake

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = -kCe^{kx_3} \sin(kx_1 - \omega t), \quad (4.72)$$

$$v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \quad (4.73)$$

$$v_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = kCe^{kx_3} \cos(kx_1 - \omega t). \quad (4.74)$$

Pošto su po sugerisanoj pretpostavci

$$x_i(t) = x_i^0 + X_i(t) \quad i = 1, 2, 3,$$

gde su $|X_i(t)| \ll |x_i^0|$, izrazi za brzinu su u prvoj aproksimaciji jednaki vrednostima koje dobijemo kada u njima x_1 i x_3 zamenimo njihovim srednjim vrednostima, tj. možemo uzeti da je približno

$$\frac{dx_1}{dt} = -kCe^{kx_3^0} \sin(kx_1^0 - \omega t), \quad (4.75)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = kCe^{kx_3^0} \cos(kx_1^0 - \omega t), \quad (4.76)$$

odakle direktnim integraljenjem dobijamo

$$X_1(t) = -\frac{k}{\omega} Ce^{kx_3^0} \cos(kx_1^0 - \omega t) \quad \text{ i } \quad X_3(t) = -\frac{k}{\omega} Ce^{kx_3^0} \sin(kx_1^0 - \omega t),$$

pa je jednačina trajektorije

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2 = \frac{k^2}{\omega^2} C^2 e^{2kx_3^0},$$

zaista jednačina kružnice, čiji poluprečnik $kCe^{kx_3^0}/\omega$ opada sa smanjivanjem x_3^0 .

Zadatak 4.21 Pokazati da dizperziona relacija (veza između frekvence ω i talasnog broja k) za gravitacioni talas male amplitude, koji se prostire kroz sloj nestišljive tečnosti $-h \leq x_3 \leq 0$, ima oblik

$$\omega^2 = gk \tanh kh, \quad (*)$$

pri čemu je gravitaciono ubrzanje $\vec{g} = -g\vec{e}_3$. Pretpostavlja se da je kretanje potencijalno sa potencijalom brzine Φ oblika

$$\Phi = F(x_3) \cos(kx_1 - \omega t),$$

gde su k i ω pozitivne konstante, a $F(x_3)$ nepoznata funkcija. Čemu je jednaka fazna brzina prostiranja talasa u slučaju kada je dubina h mnogo manja od talasne dužine talasa?

Rešenje 4.21 Pošto je tečnost nestišljiva, potencijal zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\Delta\Phi = 0,$$

pa zamenom izraza za potencijal, datog u zadatku, dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2 F}{dx_3^2} - k^2 F(x_3) = 0,$$

koju funkcija F treba da zadovoljava, a čije je opšte rešenje

$$F(x_3) = C_1 e^{kx_3} + C_2 e^{-kx_3}. \quad (4.77)$$

Na površini tečnosti potencijal treba da zadovoljava (videti u [1]) granični uslov:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 0, \quad (4.78)$$

dok je za $x_3 = -h$ komponenta brzine normalna na dno jednaka nuli (tečnost ne može da prođe kroz čvrsto dno), tj.

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right|_{x_3=-h} = 0. \quad (4.79)$$

Zamenjujući u uslov (4.79) potencijal sa funkcijom F oblika (4.77) nalazimo da je

$$C_1 = C_2 e^{2kh},$$

a onda iz uslova (4.78) primenjenog na $x_3 = 0$ (što smemo da uradimo pošto se radi o talasu male amplitude, pa je površina uvek bliska ravni $x_3 = 0$) dobijamo disperzionu relaciju (*).

Fazna brzina ovog talasa $c = \omega/k$ je, na osnovu disperzione relacije (*), jednaka

$$c = \sqrt{\frac{\omega}{k} \operatorname{th} kh}.$$

Pošto se talasna dužina λ izražava preko talasnog broja kao $2\pi/k$, uslov da je dubina h mnogo manja od talasna dužine znači da je $hk \ll 1$, pa je fazna brzina u tom slučaju jednaka

$$\lim_{hk \rightarrow 0} c = \sqrt{gh}.$$

Poglavlje 5

Viskozan fluid

5.1 Navije–Stoksov tenzor napona

Zadatak 5.1 U Navije–Stoksovom fluidu polje brzine zadato je sa:

$$v_1 = -x_1 - x_2, \quad v_2 = x_2 - x_1, \quad v_3 = 0.$$

Za ravan čiji je ort normale \vec{e}_1 naći:

- a) razliku normalne komponente napona u ovom fluidu i normalne komponente napona koja bi delovala u slučaju da je fluid idealan,
- b) intenzitet tangencijalne komponente napona. Koeficijent viskoznosti je $\eta = 0.982 \text{ mPa} \cdot \text{s}$.

Rešenje 5.1 a) Pošto je

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -1 + 1 = 0,$$

ovde se, u stvari, radi o Stoksovom fluidu, pa tenzor napona ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{E}} + 2\eta\tilde{\mathcal{S}}, \quad (5.1)$$

gde je η koeficijent viskoznosti. Lako se nalazi da je tenzor brzine deformacije $\tilde{\mathcal{S}}$ u ovom slučaju reprezentovan matricom

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

pa tenzoru napona odgovara matrica

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -2\eta - p & -2\eta & 0 \\ -2\eta & 2\eta - p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

odakle je tražena normalna komponenta napona P_N jednaka

$$P_N = \vec{e}_1 \cdot \mathcal{P} \cdot \vec{e}_1 = -2\eta - p. \quad (5.4)$$

Kako je u slučaju idealnog fluida normalna komponenta napona $P_N^{\text{ideal}} = -p$, razlika normalnih komponenta napona $\Delta \vec{P}_N$ za ova dva slučaja je

$$\Delta P_N = P_N^{\text{ideal}} - P_N = 2\eta, \quad (5.5)$$

što znači da veličina p kod viskoznih fluida nema uvek smisao normalne sile po jedinici površine.

b) Pošto je ukupni napon koji deluje u tačkama ravni normalne na \vec{e}_1 jednak

$$\mathcal{P} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2\eta - p \\ -2\eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

intenzitet njegove tangencijalne komponente $|P_T|$ jednak je

$$|P_T| = 2\eta = 1.964 \text{mPas}. \quad (5.7)$$

Zadatak 5.2 *Kretanje fluida koje je takvo da brzine svih delića imaju isti pravac naziva se paralelni tok. Pokazati da je u slučaju paralelnog toka u Stoksovom fluidu intenzitet normalne komponente napona koji deluje na ravni paralelne ili normalne na tok jednak pritisku p .*

Rešenje 5.2 Za paralelan tok polje brzine ima oblik $\vec{v} = v\vec{n}$, gde je \vec{n} fiksirani ort. Izaberimo koordinatni sistem tako da x_1 osa ima pravac orta \vec{n} . Onda je

$$\vec{v} = v(x_1, x_2, x_3, t)\vec{e}_1. \quad (5.8)$$

Pošto se radi o Stoksovom fluidu, koji je po definiciji nestišljiv, potrebno je da je zadovoljen uslov $\text{div}\vec{v} = 0$, tj.

$$\text{div}\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \quad (5.9)$$

što znači da intenzitet brzine v ne zavisi od koordinate x_1 . Tenzoru brzine deformacije $\tilde{\mathcal{S}}$ u tom slučaju odgovara matrica

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

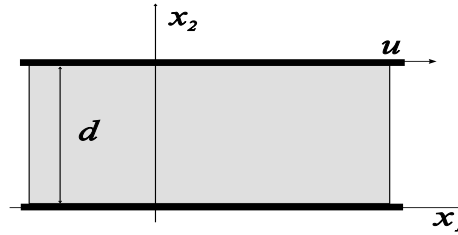
a tenzoru napona

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -p & \eta \frac{\partial v}{\partial x_2} & \eta \frac{\partial v}{\partial x_3} \\ \eta \frac{\partial v}{\partial x_2} & -p & 0 \\ \eta \frac{\partial v}{\partial x_3} & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

odakle je jasno da je intenzitet normalne komponente napona koji deluje na ravni paralelne ili normalne na tok jednak pritisku p .

5.2 Stacionarno laminarno proticanje viskoznog fluida

Zadatak 5.3 (Ravan Kuetov tok) *Stoksov fluid stacionarno protiče između dve beskonačne paralelne ploče, od kojih jedna miruje, a druga se kreće konstantnom brzinom intenziteta u u svojoj ravni. Naći profil brzine unutar fluida, ako je poznato da je rastojanje između ploča d , da je gradijent pritiska jednak nuli i da su zapreminske sile jednake nuli.*



Rešenje 5.3 Izaberimo koordinatni sistem tako da donja ploča leži u ravni $x_2 = 0$, gornja u ravni $x_2 = d$, a neka je x_1 osa određena pravcem vektora \vec{u} , tj neka je $\vec{u} = u\vec{e}_1$. Pod pretpostavkom da je kretanje laminarno, tj. u slojevima (dakle da nema značajnog mešanja susednih slojeva, tj. turbulencija), kao i zbog simetrije, pretpostavićemo da je brzina delića u fluidu oblika $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$. Onda je

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \vec{v} = 0,$$

a pošto se zapreminske sile zanemaruju i nema gradijenta pritiska, Stoksova jednačina

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (5.12)$$

se svodi na

$$\Delta \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 v}{dx_2^2} = 0, \quad (5.13)$$

odakle sledi

$$v(x_2) = C_1 x_2 + C_2. \quad (5.14)$$

Integracione konstante u poslednjem izrazu određuju se iz graničnih uslova – u ovom slučaju to su tzv. uslovi *slepljivanja*. Naime, usled viskoznosti delići fluida se lepe za čvrstu granicu, tako da im je brzina jednaka brzini granice. Ovde to znači da je $v(0) = 0$, pošto ploča $x_2 = 0$ miruje, odnosno $v(d) = u$, pošto se ploča $x_2 = d$ kreće brzinom u . Zamenom ovih graničnih uslova u dobijeni izraz za profil brzine, dobijamo dve jednostavne algebarske jednačine, čijim rešavanjem nalazimo konstante C_1 i C_2 , tako da je konačno

$$\vec{v} = \frac{u}{d} x_2 \vec{e}_1. \quad (5.15)$$

Zadatak 5.4 Tanka ravna ploča kvadratnog oblika, ivice a , klizi na tankom sloju ulja, debljine d , po horizontalnoj ravni. Ako je brzina ploče u , a viskoznost ulja η , izračunati silu kojom treba delovati na ploču da bi se ovakvo kretanje održalo, pretpostavljajući da se kretanje fluida može aproksimirati ravnim Kuetovim tokom. Kolika je ta sila ako je $a = 1\text{m}$, $d = 2\text{mm}$, $u = 1\text{m/s}$ i $\eta = 1\text{Pa}\cdot\text{s}$?

Rešenje 5.4 Ako iskoristimo rezultate dobijene u prethodna dva zadatka, tj. izraz (5.15) za brzinu pri Kuetovom proticanju i izraz (5.11) za tenzor napona pri paralelnom toku, dobijamo da tenzor napona pri Kuetovom proticanju ima oblik

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -p & \eta \frac{u}{d} & 0 \\ \eta \frac{u}{d} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

pa je vektor napona koji deluje na gornju ploču jednak

$$\mathcal{P}(-\vec{e}_2) = -\eta \frac{u}{d} \vec{e}_1 + p \vec{e}_2. \quad (5.17)$$

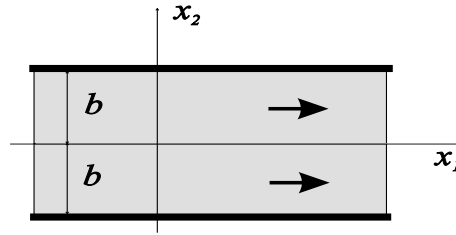
Ukupna viskozna sila \vec{F}^{visk} kojom fluid deluje na gornju ploču jednaka je proizvodu tangencijalne komponente ovog vektora i površine ploče:

$$\vec{F}^{\text{visk}} = -\eta \frac{u}{d} a^2 \vec{e}_1, \quad (5.18)$$

pa je na ploču potrebno delovati silom \vec{F} istog pravca i intenziteta, a suprotnog smera, da bi se ovakvo kretanje održalo. Intenzitet te sile jednak je

$$F = \eta \frac{u}{d} a^2 = 500\text{N}.$$

Zadatak 5.5 (Ravan Poazejev tok) Stoksov fluid stacionarno protiče između dve beskonačne paralelne ploče, koje miruju, u pravcu paralelnom pločama, pri čemu intenzitet brzine delića zavisi samo od najkraće udaljenosti delića od ploča. Pokazati da je gradijent pritiska unutar fluida konstantan i naći profil brzine, ako je taj gradijent poznat. Rastojanje između ploča je $2b$, koeficijent viskoznosti je η , a zapreminske sile se mogu zanemariti.



Rešenje 5.5 Ako koordinatni sistem izaberemo kao na slici, brzina ima oblik $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$, pa stavljanjem takvog izraza u Stoksovu jednačinu (5.12), uz ostale pretpostavke zadatka, dobijamo jednačinu

$$\text{grad} p = \eta \Delta \vec{v}. \quad (5.19)$$

Projektovanjem ove jednačine na x_2 i x_3 osu dobijamo:

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0,$$

odakle zaključujemo da pritisak zavisi samo od koordinate x_1 . Uzimajući to u obzir, projekcija Stoksove jednačine na pravac x_1 dobija oblik:

$$\frac{dp}{dx_1} = \eta \frac{d^2 v}{dx_2^2}. \quad (5.20)$$

Leva strana ove jednačine zavisi samo od x_1 , a desna samo od x_2 , što je za proizvoljne vrednosti ovih koordinata moguće jedino ako su obe strane ove jednačine jednake konstanti. Kako leva strana jednačine upravo predstavlja x_1 komponentu gradijenta pritiska, dok su preostale dve komponente jednake nuli, to znači da je zaista gradijent pritiska pri ovakvom proticanju konstantan. Ako $\frac{dp}{dx_1}$ označimo sa K , onda iz poslednje jednačine dobijamo diferencijalnu jednačinu čijim rešavanjem dobijamo izraz za intenzitet brzine:

$$\frac{d^2 v}{dx_2^2} = \frac{K}{\eta} \Rightarrow v(x_2) = \frac{1}{2} \frac{K}{\eta} x_2^2 + C_1 x_2 + C_2, \quad (5.21)$$

gde konstante C_1 i C_2 nalazimo iz graničnih uslova $v(-b) = v(b) = 0$. Zamenom dobijenog izraza za v u ove granične uslove dobijamo sistem od dve obične algebarske jednačine po C_1 i C_2

$$\begin{aligned} v(-b) &= \frac{1}{2} \frac{K}{\eta} b^2 - C_1 b + C_2 = 0, \\ v(b) &= \frac{1}{2} \frac{K}{\eta} b^2 + C_1 b + C_2 = 0, \end{aligned}$$

iz kojih sledi $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{2} \frac{K}{\eta} b^2$, pa je, konačno, profil brzine:

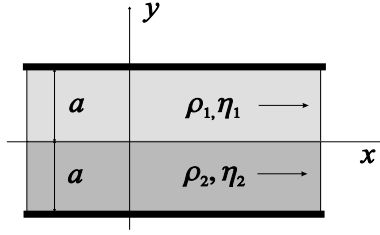
$$v(x_2) = -\frac{1}{2} \frac{K}{\eta} b^2 \left(1 - \frac{x_2^2}{b^2} \right). \quad (5.22)$$

Zadatak 5.6 *Prostor između dve beskonačne ravne paralelne ploče, koje se nalaze na rastojanju $2a$ jedna od druge, ispunjen je sa dva Stoksova fluida, jednakih debljina a i koeficijenata viskoznosti η_1 i η_2 . Fluidi stacionarno protiču između ploča usled delovanja konstantnog gradijenta pritiska \vec{K} , paralelnog pločama. Pretpostavljajući da se fluidi pri kretanju ne mešaju, da je proticanje laminarno, kao i da se zapreminske sile mogu zanemariti, naći profil brzine u fluidima.*

Rešenje 5.6 Stoksova jednačina u ovom slučaju svodi se na jednačine

$$\vec{K} = \eta_1 \Delta \vec{v}_1 \quad \text{ i } \quad \vec{K} = \eta_2 \Delta \vec{v}_2$$

u odgovarajućim oblastima fluida (pošto su fluidi nestišljivi, zapreminskih sila nema, a $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$ – vidi sliku).



Pošto je $\vec{K} = K\vec{e}_x$, gornje vektorske jednačine se svode na skalarne

$$K = \eta_1 \frac{d^2 v_1}{dy^2} \quad \text{i} \quad K = \eta_2 \frac{d^2 v_2}{dy^2},$$

čija su opšta rešenja

$$v_i(y) = \frac{1}{2} \frac{K}{\eta_i} y^2 + A_i y + B_i, \quad i = 1, 2. \quad (5.23)$$

Konstante A_i i B_i određuju se iz graničnih uslova:

$$v_1(a) = 0, \quad (5.24)$$

$$v_1(0) = v_2(0), \quad (5.25)$$

$$v_2(-a) = 0, \quad (5.26)$$

$$\vec{P}_{\vec{e}_y} \Big|_{y=0} = -\vec{P}_{-\vec{e}_y} \Big|_{y=0}. \quad (5.27)$$

Zamenom izraza (5.23) za brzine u uslove (5.24), (5.25) i (5.26) dobijaju se sledeće jednačine:

$$\frac{K}{2\eta_1} a^2 + A_1 a + B_1 = 0, \quad (5.28)$$

$$B_1 = B_2, \quad (5.29)$$

$$\frac{K}{2\eta_2} a^2 - A_2 a + B_2 = 0. \quad (5.30)$$

Četvrti uslov (5.27) se, zbog

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\vec{e}_y} \Big|_{y=0} &= \tilde{P}_1 \vec{e}_y = (-p_1 \tilde{\mathcal{E}} + 2\eta_1 \tilde{\mathcal{S}}) \vec{e}_y \Big|_{y=0} \\ &= \begin{pmatrix} -p_1 & \eta_1 \frac{dv_1}{dy} & 0 \\ \eta_1 \frac{dv_1}{dy} & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 \end{pmatrix} \Big|_{y=0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 A_1 \\ -p_1(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

i, slično,

$$-\vec{P}_{-\vec{e}_y} \Big|_{y=0} = \tilde{P}_2 \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \eta_2 A_2 \\ -p_2(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

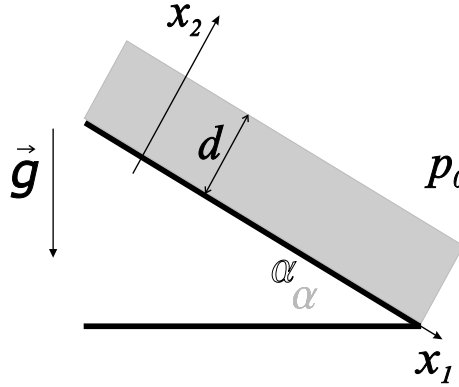
svodi na jednačine:

$$\begin{aligned}\eta_1 A_1 &= \eta_2 A_2 \\ p_1(0) &= p_2(0).\end{aligned}\quad (5.32)$$

Rešavanjem sistema jednačina (5.24), (5.25), (5.26), (5.32) dobijamo koeficijente A_i i B_i :

$$\begin{aligned}A_i &= \frac{Ka}{2\eta_i} \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}, \quad i = 1, 2 \\ B_1 &= B_2 = -\frac{Ka^2}{\eta_1 + \eta_2}.\end{aligned}$$

Zadatak 5.7 Sloj Stoksove tečnosti gustine ρ , koeficijenta viskoznosti η i debljine d stacionarno teče niz nepokretnu strmu ravan ugla α , tako da brzina proticanja zavisi samo od dubine. Strma ravan je jako velika i postavljena je na horizontalnu ravan u homogenom gravitacionom polju. Pretpostavljajući da je atmosfera idealan fluid, a da je atmosferski pritisak jednak p_0 , naći profil brzine unutar tečnosti.



Rešenje 5.7 Brzinu ćemo tražiti u obliku $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$. Pošto je $\vec{g} = g(\sin \alpha \vec{e}_1 - \cos \alpha \vec{e}_2)$, projekcije Stoksove jednačine na koordinatne ose imaju oblik:

$$0 = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2 v}{dx_2^2}, \quad (5.33)$$

$$0 = -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad (5.34)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}, \quad (5.35)$$

Iz jednačine (5.35) zaključujemo da pritisak ne zavisi od x_3 koordinate, a iz (5.34) onda sledi

$$p = -\rho g x_2 \cos \alpha + F(x_1), \quad (5.36)$$

gde je $F(x_1)$ nepoznata funkcija koordinate x_1 , a zamenom ovog izraza u (5.33) dobijamo jednačinu

$$-\rho g \sin \alpha + \frac{dF(x_1)}{dx_1} = \eta \frac{d^2 v}{dx_2^2}. \quad (5.37)$$

Leva strana poslednje jednačine zavisi samo od koordinate x_1 , a desna samo od x_2 , što je za proizvoljne vrednosti x_1 i x_2 moguće samo ako su obe strane jednakosti jednake istoj konstanti, koju ćemo označiti sa K . Odatle za brzinu dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu drugog reda

$$\frac{K}{\eta} = \frac{d^2 v}{dx_2^2}, \quad (5.38)$$

čije je rešenje

$$v = \frac{K}{2\eta} x_2^2 + K_1 x_2 + K_2. \quad (5.39)$$

Za $x_2 = 0$, tj. uz samu strmu ravan, brzina tečnosti je jednaka nuli, odakle zaključujemo da je $K_2 = 0$. Za $x_2 = d$, granični uslov dobijamo iz

$$\tilde{\mathcal{P}}(-\vec{e}_2) \Big|_{x_2=d} = - \left(-p_0 \tilde{\mathcal{E}} \right) (\vec{e}_2). \quad (5.40)$$

Pošto je $\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{E}} + 2\eta\tilde{\mathcal{S}}$, a tenzoru brzine deformacije odgovara matrica

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{dv}{dx_2} & 0 \\ \frac{dv}{dx_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

iz uslova (5.40) dobijamo

$$\left(\begin{pmatrix} \mu \frac{dv}{dx_2} \\ -p \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Big|_{x_2=d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

odnosno

$$\frac{dv}{dx_2} \Big|_{x_2=d} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = -\frac{Kd}{\eta} \quad (5.43)$$

i

$$p(d) = p_0. \quad (5.44)$$

Međutim, iz (5.36) onda sledi da je

$$-\rho g d \cos \alpha + F(x_1) = p_0 \quad (5.45)$$

tačno za svako x_1 , što je moguće jedino ako je $F(x_1) = \text{const.}$ Odatle je

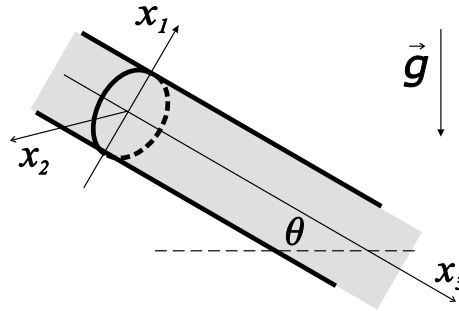
$$K = -\rho g \sin \alpha + \frac{dF(x_1)}{dx_1} = -\rho g \sin \alpha, \quad (5.46)$$

pa je konačno brzina jednaka

$$v = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} x_2 (2d - x_2). \quad (5.47)$$

Zadatak 5.8 (Hagen–Poazejev tok) Pod Hagen–Poazejevim tokom podrazumeva se stacionarno proticanje viskoznog Stoksovog fluida, gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η u homogenom polju gravitacije kroz cilindričnu cev prečnika d , čija osa sa horizontalom zaklapa ugao θ . Smatrajući da se radi o paralelnom toku u pravcu ose cevi, kao i da brzina fluida zavisi samo od rastojanja od ose cilindra

- a) pokazati da je projekcija gradijenta pritiska na pravac ose cilindra konstanta i
b) naći profil brzine u cevi, ako je ta projekcija poznata.



Rešenje 5.8 a) Stoksova jednačina (5.12) u ovom slučaju ima oblik

$$0 = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (5.48)$$

Ako koordinatni sistem izaberemo kao na slici, onda gravitaciono ubrzanje \vec{g} i brzinu \vec{v} možemo da napišemo kao

$$\vec{g} = g(-\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_3), \quad \vec{v} = v(x_1, x_2) \vec{e}_3, \quad (5.49)$$

pa projektovanjem Stoksove jednačine na x_2 osu dobijamo

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2},$$

odakle zaključujemo da pritisak ne zavisi od koordinate x_2 , tj. $p = p(x_1, x_3)$. Projekcija Stoksove jednačine na x_1 osu ima oblik

$$0 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (5.50)$$

odakle je

$$p(x_1, x_3) = -\rho g x_1 \cos \theta + F(x_3), \quad (5.51)$$

gde je F funkcija samo koordinate x_3 . To dalje znači da je

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{dF}{dx_3}, \quad (5.52)$$

pa stavljanjem ovakvog izraza za $\frac{\partial p}{\partial x_3}$ u projekciju Stoksove jednačine na x_3 osu:

$$0 = -g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\eta}{\rho} \Delta v, \quad (5.53)$$

dobijamo jednačinu:

$$\rho g \sin \theta + \frac{dF(x_3)}{dx_3} = \eta \Delta v. \quad (5.54)$$

Leva strana ove jednačine je funkcija samo od x_3 , a desna samo od x_1 i x_2 , što je za proizvoljne vrednosti ovih koordinata moguće samo ako su obe strane jednačine jednake istoj konstanti. Odatle sledi da je i $\frac{dF(x_3)}{dx_3}$ konstantno, pa zbog (5.52) to istovremeno znači i da je projekcija gradijenta pritiska na osu cevi konstanta.

b) Pošto je

$$v = v \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right) = v(r)$$

jednačinu

$$\Delta v = \frac{\rho g \sin \theta + K}{\eta} = C \quad (5.55)$$

je najzgodnije rešavati u cilindričnim koordinatama. Izraz za laplasijan (A.4) u cilindričnim koordinatama se svodi na

$$\Delta v = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right), \quad (5.56)$$

pa iz jednačine (5.55) sledi

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = Cr \quad \Rightarrow \quad r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} Cr^2 + C_1, \quad (5.57)$$

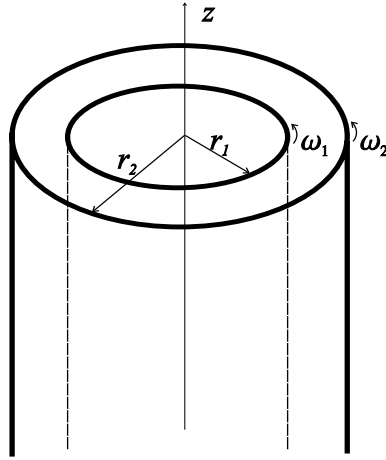
odnosno

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2} Cr + \frac{C_1}{r} \quad \Rightarrow \quad v(r) = \frac{1}{4} Cr^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (5.58)$$

Za $r \rightarrow 0$ važi $\ln r \rightarrow -\infty$, što znači da treba uzeti da je konstanta $C_1 = 0$, jer nema nikakvog fizičkog razloga da brzina delića na osi cevi bude beskonačna. Preostalu neodređenu konstantu C_2 nalazimo iz uslova da je $v(d/2) = 0$, odakle je $C_2 = -Cd^2/8$, tako da je konačno

$$\vec{v} = \frac{\rho g \sin \theta + \frac{\partial p}{\partial x_3}}{4\eta} \left(r^2 - \frac{d^2}{4} \right) \vec{e}_3. \quad (5.59)$$

Zadatak 5.9 (Kuetovo proticanje) *Stoksov fluid stacionarno protiče između dva beskonačna koaksijalna cilindra, poluprečnika r_1 i r_2 ($r_1 < r_2$), usled njihove rotacije oko zajedničke ose ugaonim brzinama Ω_1 i Ω_2 , respektivno. Zane-marujući zapreminske sile, naći profil brzine fluida, ako je poznata gustina fluida ρ i koeficijent viskoznosti η .*



Rešenje 5.9 Zbog simetrije problema polje brzine treba tražiti u obliku

$$\vec{v} = v(r)\vec{e}_\varphi, \quad (5.60)$$

gde su (r, φ, z) cilindrične koordinate, pri čemu se osa z poklapa sa zajedničkom osom cilindara. Supstancijalni izvod brzine je ovde najzgodnije tražiti preko formule

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v}. \quad (5.61)$$

Zbog stacionarnosti proticanja je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, a ako primenimo izraze za gradijent (A.1) i rotor (A.3) u cilindričnim koordinatama dobijamo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v^2}{r} \vec{e}_r. \quad (5.62)$$

Kako je

$$\Delta \vec{v} = \text{grad} \text{div} \vec{v} - \text{rot} \text{rot} \vec{v} = -\text{rot} \text{rot} \vec{v} = \frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right) \vec{e}_\varphi, \quad (5.63)$$

Stoksova jednačina u ovom slučaju dobija oblik

$$\frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \vec{e}_r + \frac{\eta}{\rho} \frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right) \vec{e}_\varphi, \quad (5.64)$$

odakle je

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad (5.65)$$

i

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} \right) = 0 \quad (5.66)$$

Iz poslednje jednačine direktno dobijamo linearnu nehomogenu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = C_1, \quad (5.67)$$

čije je opšte rešenje:

$$v(r) = e^{-\int \frac{dr}{r}} \left(C_1 \int e^{\int \frac{dr}{r}} dr + C_2 \right) = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (5.68)$$

Konstante C_1 i C_2 određujemo iz graničnih uslova:

$$v(r_1) = \Omega_1 r_1, \quad v(r_2) = \Omega_2 r_2. \quad (5.69)$$

Zamenom dobijenog izraza za brzinu u ove granične uslove dobijamo sistem od dve algebarske jednačine po C_1 i C_2 , čijim rešavanjem nalazimo

$$C_1 = 2(\Omega_1 - \Omega_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad C_2 = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (5.70)$$

Zadatak 5.10 U slučaju Kuetovog proticanja (vidi prethodni zadatak) izračunati moment površinskih sila koji deluje na jediničnu dužinu unutrašnjeg, odnosno spoljašnjeg cilindra, ako unutrašnji cilindar miruje, a spoljašnji rotira ugaonom brzinom Ω .

Rezultat 5.10 Traženi moment površinskih sila jednak je $4\pi\eta\Omega r_1^2 r_2^2 / (r_2^2 - r_1^2)$.

Zadatak 5.11 Beskonačno dugačak čvrsti cilindar poluprečnika a rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω oko sopstvene ose u Stoksovom fluidu. Naći profil brzine koji odgovara stacionarnom laminarnom osno-simetričnom kretanju uspostavljenom u fluidu usled rotacije cilindra, ako se zapreminske sile mogu zanemariti.

Rešenje 5.11 Slično kao u slučaju Kuetovog proticanja nalazimo da je brzina oblika $\vec{v} = v(r)\vec{e}_\varphi$, gde je

$$v(r) = K_1 r + \frac{K_2}{r}. \quad (5.71)$$

Konstanta K_1 u ovom slučaju mora biti jednaka nuli, pošto nema nikakvog fizičkog razloga da na jako velikim rastojanjima od ose cilindra brzina postaje neograničeno velika, a konstantu K_2 određujemo iz uslova slepljivanja na površini cilindra: $v(a) = a\Omega$, odakle je konačno

$$v(r) = \frac{\Omega a^2}{r}. \quad (5.72)$$

5.3 Nestacionarno laminarno proticanje viskoznog fluida

Zadatak 5.12 Stoksov fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η nalazi se u poluprostoru $y > 0$. Granična ravan $y = 0$ kreće se brzinom $v_0(t) = a \cos \omega t$ u pravcu x -ose, gde su a i ω konstante. Naći polje brzine u fluidu, pretpostavljajući da brzina ima pravac x -ose, a da joj intenzitet zavisi samo od vremena i y -koordinate (tj. od rastojanja od ploče koja osciluje). Zanemariti zapreminske sile i gradijent pritiska.

Rešenje 5.12 Stoksova jednačina se u ovom slučaju svodi na jednačinu

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (5.73)$$

gde je v intenzitet brzine, a $\nu = \eta/\rho$ kinematički koeficijent viskoznosti. Uvedimo kompleksnu funkciju

$$\hat{v} = \hat{F}(y)e^{i\omega t}. \quad (5.74)$$

Ako ovakva funkcija zadovoljava jednačinu (5.73), onda sigurno i njen realni deo zadovoljava tu jednačinu. Potražimo rešenje jednačine (5.73) u obliku (5.74), pri čemu ćemo zahtevati da realni deo funkcije \hat{v} zadovoljava granični uslov

$$\text{Re} \hat{v}(x, y = 0, z, t) = a \cos \omega t = v_0(t). \quad (5.75)$$

Pošto je

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = \hat{F}(y)i\omega e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} = \frac{d^2 \hat{F}}{dy^2} e^{i\omega t}, \quad (5.76)$$

iz jednačine (5.73) sledi da kompleksna funkcija $\hat{F}(y)$ treba da zadovoljava jednačinu

$$\frac{d^2 \hat{F}}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu} \hat{F} = 0, \quad (5.77)$$

čije je opšte rešenje oblika

$$\hat{F}(y) = A e^{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)y} + B e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}(1+i)y}. \quad (5.78)$$

Odatle je

$$\hat{v} = A e^{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y} e^{i(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y)} + B e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y} e^{i(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y)}, \quad (5.79)$$

pa je brzina jednaka

$$v(y, t) = e^{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y} \text{Re}[A e^{i(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y)}] + e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y} \text{Re}[B e^{i(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y)}]. \quad (5.80)$$

Kada $y \rightarrow 0$ član $e^{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}$ u prethodnom izrazu za brzinu teži beskonačnosti, što bi značilo da se na jako velikim rastojanjima od ploče (čije je oscilovanje uzrok kretanja fluida) delići kreću jako velikim brzinama. Pošto za to ne postoje nikakvi fizički razlozi, treba uzeti da je konstanta A jednaka nuli, što znači da brzina ima oblik

$$v(y, t) = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y} \left(B_1 \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y) - B_2 \sin(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y) \right), \quad (5.81)$$

gde je $B = B_1 + iB_2$, tj. B_1 i B_2 su redom realni i imaginarni deo kompleksne konstante B . Iz graničnog uslova (5.75) konačno sledi da je $B_1 = a$ i $B_2 = 0$, pa je

$$v(y, t) = ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y} \cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y). \quad (5.82)$$

Zadatak 5.13 *Prostor između dve beskonačne ravne paralelne ploče ispunjen je Stoksovim fluidom, gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η . Naći polje brzine unutar fluida, ako jedna od ploča miruje u ravni $y = 0$, a druga se kreće u sopstvenoj ravni $y = H$ brzinom $\vec{u} = ue^{-\alpha t}\vec{e}_x$, gde su u i α pozitivne konstante. Zanemariti zapreminske sile i gradijent pritiska, a rešenje pretpostaviti u obliku $\vec{v}(\vec{r}, t) = V(y)T(t)\vec{e}_x$.*

Rešenje 5.13 Ako pretpostavljeni izraz za brzinu (uz sve ostale pretpostavke zadatka) zamenimo u Stoksovu jednačinu, dobijamo sledeću skalarnu jednačinu:

$$V(y) \frac{dT}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2V}{dy^2} T(t), \quad (5.83)$$

odakle deljenjem sa VT sledi

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \frac{1}{V(y)} \frac{d^2V}{dy^2}. \quad (5.84)$$

U poslednjoj jednačini izraz sa leve strane je funkcija samo vremena t , a izraz sa desne strane funkcija samo koordinate y , što je za proizvoljne vrednosti t i y moguće samo ako su obe strane jednačine jednake istoj konstanti K . Odatle onda dobijamo dve jednačine:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = K \quad (5.85)$$

i

$$\frac{\eta}{\rho} \frac{1}{V} \frac{d^2V}{dy^2} = K. \quad (5.86)$$

Rešavanjem jednačine (5.85) dobijamo

$$T(t) = C_1 e^{Kt}, \quad (5.87)$$

a, kako je u svakom trenutku $v(H, t) = V(H)C_1 e^{Kt} = ue^{-\alpha t}$, zaključujemo da je $K = -\alpha$. Onda jednačina (5.86) dobija oblik

$$\frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{\alpha \rho}{\eta} V = 0, \quad (5.88)$$

odakle je

$$V(y) = C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{\alpha \rho}{\eta}} y \right) + C_3 \sin \left(\sqrt{\frac{\alpha \rho}{\eta}} y \right). \quad (5.89)$$

Iz graničnog uslova $v(0, t) = 0$ zaključujemo da je $C_2 = 0$, tako da je brzina oblika:

$$v(y, t) = C \sin \left(\sqrt{\frac{\alpha \rho}{\eta}} y \right) e^{-\alpha t}, \quad (5.90)$$

gde je $C = C_1 C_3$. Konačno, iz graničnog uslova $v(H, t) = ue^{-\alpha t}$ imamo

$$C \sin \left(\sqrt{\frac{\alpha \rho}{\eta}} H \right) e^{-\alpha t} = ue^{-\alpha t}, \quad (5.91)$$

odakle je konstanta C jednaka $u / \sin(\sqrt{\frac{\alpha \rho}{\eta}} H)$, pa je

$$\vec{v} = \frac{u}{\sin \left(\sqrt{\frac{\alpha \rho}{\eta}} H \right)} \sin \left(\sqrt{\frac{\alpha \rho}{\eta}} y \right) e^{-\alpha t} \vec{e}_x. \quad (5.92)$$

Zadatak 5.14 Ako se cilindar iz zadatka 5.11 u nekom trenutku iznenada zaustavi, naći polje brzine u fluidu nakon zaustavljanja, pretpostavljajući da je ono oblika

$$\vec{v} = \frac{1}{r} F(r^2 / \nu t) \vec{e}_\varphi.$$

Jednostavnosti radi, pretpostaviti da je poluprečnik cilindra jako mali.

Rešenje 5.14 Zamenjujući sugerisani oblik brzine u Stoksovu jednačinu dobija se da je funkcija F rešenje obične diferencijalne jednačine

$$\frac{d^2 F}{dw^2} + \frac{1}{4} \frac{dF}{dw} = 0, \quad (5.93)$$

gde je $w = r^2 / \nu t$. Odavde se dobija da je

$$F = 4C_1 + C_2 e^{-w/4} \quad (5.94)$$

a konstante C_1 i C_2 se nalaze iz graničnih uslova, tako da konačno nalazimo

$$\vec{v} = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/4\nu t} \right) \vec{e}_\varphi. \quad (5.95)$$

gde je Γ_0 cirkulacija brzine po proizvoljnoj konturi koja obuhvata cilindar, pre nego što se on zaustavi.

5.4 Vrtložno i potencijalno kretanje u viskoznom fluidu

Zadatak 5.15 Naći vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ u zadatku 5.14. Direktnim računom pokazati da $\vec{\omega}$ zadovoljava uopštenu Helmholtzovu jednačinu:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\text{rot}\vec{f} + \nu\Delta\vec{\omega}.$$

Rezultat 5.15 $\vec{\omega} = \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} e^{-r^2/4\nu t}$

Zadatak 5.16 Polje brzine u Navije–Stoksovom fluidu ima oblik

$$v_1 = kx_1, \quad v_2 = -kx_2, \quad v_3 = 0.$$

- Pokazati da je ovakvo kretanje potencijalno i nestišljivo.
- Naći polje ubrzanja.
- Zanemarujući zapreminske sile, pomoću Stoksove jednačine naći pritisak u fluidu, ako je gustina ρ .
- Pokazati da za ovakvo kretanje postoji integral analogan Bernulijevom integralu kod idealnih fluida i pomoću njega naći pritisak.
- Naći brzinu disipacije mehaničke energije u toplotu.
- Da li ravan $x_2 = 0$ može da predstavlja granicu fluid–čvrsto telo? Zašto?

Rešenje 5.16 a) Lako se proverava da je $\text{rot}\vec{v} = 0$, pa se zaista radi o potencijalnom proticanju, kao i da je $\text{div}\vec{v} = 0$, pa je i uslov nestišljivosti zadovoljen.

b) Ako iskoristimo izraz za ubrzanje dat u zadatku 1.10 dobijamo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\text{grad}v^2 = \frac{k^2}{2}\text{grad}(x_1^2 + x_2^2) = k^2(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) \quad (5.96)$$

c) Pošto je

$$\Delta\vec{v} = \text{grad}\text{div}\vec{v} - \text{rot}\text{rot}\vec{v}, \quad (5.97)$$

Stoksova jednačina (5.12) se u ovom slučaju svodi na jednačinu

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\text{grad}p, \quad (5.98)$$

odnosno, ako iskoristimo izraz nađen za ubrzanje pod b) dobijamo tri skalarne jednačine

$$\begin{aligned} k^2 x_1 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ k^2 x_2 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} \end{aligned}$$

iz kojih sledi

$$p = -\frac{1}{2}\rho k^2(x_1^2 + x_2^2) + \text{const} \quad (5.99)$$

d) Stoksova jednačina se u ovom slučaju može napisati i u obliku

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad (5.100)$$

odakle sledi da je

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad (5.101)$$

što jeste analogno Bernulijevom integralu kod idealnih fluida. Odatle se, zamjenjivanjem izraza za brzinu datog u zadatku, direktno nalazi izraz za pritisak isti kao pod c).

e) Ako sa E_k označimo kinetičku energiju jedinice mase fluida, onda je

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\rho \vec{v}^2 \right) = \rho \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = k^3 \rho (x_1^2 - x_2^2). \quad (5.102)$$

f) Za $x_2 = 0$ brzina je jednaka $\vec{v} = kx_1\vec{e}_1$, tj. nije jednaka nuli za proizvoljno x_1 , što znači da uslov slepljivanja nije zadovoljen, pa ravan $x_2 = 0$ ne može da predstavlja granicu fluid-čvrsto telo.

Zadatak 5.17 Naći vektor vrtložnosti za

a) ravno Poazejevo proticanje (zadatak 5.5);

b) Hagen-Poazejevo proticanje (zadatak 5.8).

Rezultat 5.17 a) $\vec{\omega} = -\frac{K}{2\eta}x_2\vec{e}_3$; b) $\vec{\omega} = -\frac{\rho g \sin \theta + \frac{\partial p}{\partial x_3}}{4\eta}r\vec{e}_\varphi$

Zadatak 5.18 Pri kom uslovu je Kuetovo proticanje (zadatak 5.9) bezvrtložno?

Rešenje 5.18 Pošto je

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \vec{e}_z \quad (5.103)$$

Kuetovo proticanje je bezvrtložno kada je $\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2 = 0$, odnosno kada je zadovoljen uslov

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (5.104)$$

5.5 Disipacija energije u viskoznom fluidu

Zadatak 5.19 Polazeći od opšte jednačine (2.20) unutrašnje energije pokazati da temperatura T Stoksovog fluida zadovoljava jednačinu

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \Theta + \kappa \Delta T, \quad (5.105)$$

gde je

$$\Theta = 2\eta(\mathcal{S}_{11}^2 + \mathcal{S}_{22}^2 + \mathcal{S}_{33}^2 + 2\mathcal{S}_{12} + 2\mathcal{S}_{13} + 2\mathcal{S}_{23}).$$

Pri izvođenju ove jednačine treba pretpostaviti da je veza između gustine unutrašnje energije u i temperature T oblika $u = cT$, gde je c konstanta (toplotni kapacitet), kao i da važi Furijeov zakon $\vec{q} = -\kappa \nabla T$, gde je κ konstanta (koeficijent termoprovodnosti).

Rešenje 5.19 Jednačina (5.105) direktno sledi iz (2.20), ako se uzme u obzir da iz Furijeovog zakona sledi da je

$$\operatorname{div} \vec{q} = -\kappa \Delta T, \quad (5.106)$$

kao i da je

$$\operatorname{Tr} \tilde{S} \tilde{P} = 2\eta \operatorname{Tr} \tilde{S}^2 = 2\eta(\mathcal{S}_{11}^2 + \mathcal{S}_{22}^2 + \mathcal{S}_{33}^2 + 2\mathcal{S}_{12}^2 + 2\mathcal{S}_{13}^2 + 2\mathcal{S}_{23}^2). \quad (5.107)$$

Zadatak 5.20 Naći stacionarno polje temperature u Stoksovom fluidu koji vrši ravno Kuetovo proticanje $\vec{v} = ky\vec{e}_1$ ($k = \text{const}$) između ploča $y = 0$ i $y = d$, čije se temperature održavaju redom na vrednostima T_1 i T_2 . Zbog simetrije problema pretpostaviti da temperatura zavisi samo od y koordinate.

Rešenje 5.20 Pošto su jedini nenulti elementi tenzora brzine deformacije $S_{12} = S_{21} = k/2$ jednačina (5.105) u ovom slučaju ima oblik

$$0 = \eta k^2 + \kappa \frac{d^2 T}{dy^2},$$

odakle je

$$T = -\frac{\eta k^2}{\kappa} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2. \quad (5.108)$$

Iz graničnih uslova $T(0) = T_1$ i $T(d) = T_2$ nalazimo integracione konstante:

$$C_2 = T_1, \quad C_1 = \frac{T_2}{d} + \frac{\eta k^2 d}{2\kappa} - \frac{T_1}{d},$$

odakle je polje temperature

$$T = -\frac{\eta k^2}{2\kappa} y^2 + \left(\frac{T_2 - T_1}{d} + \frac{\eta k^2 d}{2\kappa} \right) y + T_1. \quad (5.109)$$

Poglavlje 6

Razni zadaci

Zadatak 6.1 Potencijal brzine ima oblik $\Phi = Ax_1 + Bx_1/r^2$, gde je $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Naći funkciju toka ψ .

Zadatak 6.2 Posmatrajmo potencijalno proticanje kome odgovara potencijal brzine

$$\Phi = -V_\infty r \sin \varphi + \frac{A}{r} \cos \varphi,$$

gde su r i φ polarne koordinate.

- Naći funkciju toka ψ ako je proticanje nestišljivo.
- Naći tačke stagnacije i izračunati ψ u njima.
- Skicirati nekoliko strujnih linija za $\psi \leq -\sqrt{2V_\infty A}$ i $\psi \geq \sqrt{2V_\infty A}$.

Zadatak 6.3 U kontinualnoj sredini polja brzine i gustine zadata su jednačinama

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 \vec{e}_1, \quad \rho(x_1, x_2, x_3, t) = \rho_0 e^{-t},$$

gde je $\rho_0 = \text{const}$.

- Uveriti se da je jednačina kontinuiteta zadovoljena.
- Izračunati masu i brzinu promene mase u cilindričnoj zapremini poprečnog preseka S , sa osnovama u ravnima $x_1 = 0$ i $x_1 = 3$.
- Da li kretanje definisano jednačinama

$$x_1 = X_1 e^{t-t_0}, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3,$$

odgovara zadatom polju brzine? Obrazložiti odgovor.

Zadatak 6.4 Cilindrična posuda u kojoj se nalazi voda, rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko svoje ose (koja je postavljena u pravcu gravitacionog polja). Kolika je maksimalna vrednost ω pri kojoj voda ne izlazi iz posude, ako je poznato da su poluprečnik osnove i visina posude jednaki a , a da u stanju mirovanja voda ispunjava posudu do visine $h = 3a/4$? Kolika je minimalna visina vode u posudi za slučaj te maksimalne ugaone brzine?

Zadatak 6.5 *Pretpostavljajući da se delići tečnosti pri kretanju opisanom u zadatku 4.21 ne udaljavaju mnogo od svojih srednjih položaja (x_1^0, x_2^0, x_3^0) , pokazati da su njihove trajektorije približno elipse.*

Zadatak 6.6 *Polje brzine u viskoznom fluidu ima oblik*

$$v_1 = k(x_1^2 - x_2^2), \quad v_2 = -2kx_1x_2, \quad v_3 = 0.$$

- a) *Pokazati da je ovakvo kretanje potencijalno i nestišljivo.*
- b) *Naći polje ubrzanja.*
- c) *Zanemarujući zapreminske sile, pomoću Stoksove jednačine naći pritisak u fluidu. Uzeti da je gustina fluida ρ .*
- d) *Pokazati da za ovakvo kretanje postoji integral analogan Bernulijevom integralu kod idealnih fluida i pomoću njega naći pritisak.*
- e) *Naći brzinu disipacije mehaničke energije u toplotu.*
- f) *Da li ravan $x_2 = 0$ može da predstavlja granicu fluid-čvrsto telo? Zašto?*

Zadatak 6.7 *Dva sloja različitih Stoksovih fluida protiču između dve beskonačne paralelne ploče, od kojih jedna miruje, a druga se kreće konstantnom brzinom v_0 u svojoj ravni. Pretpostavljajući da se slojevi tečnosti ne mešaju, da je granična ravan između njih paralelna pločama, da nema gradijenta pritiska, kao i da se zapreminske sile mogu zanemariti, naći profil brzine između ploča. Pretpostaviti da su gustine i koeficijenti viskoznosti fluida poznati, a da su debljine slojeva b_1 i b_2 .*

Zadatak 6.8 a) *Pokazati da se za polje brzine oblika $\vec{v} = v(y, z)\vec{e}_x$, van polja zapreminskih sila, Navije-Stoksova jednačina svodi na oblik:*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} = \beta = \text{const}.$$

b) *Koristeći prethodni deo zadatka naći polje brzine u viskoznom fluidu koji protiče kroz horizontalnu cev čiji je presek jednakostranični trougao. Pretpostaviti (zbog simetrije) da je $v(y, z)$ oblika*

$$v = A \left(z + \frac{b}{2\sqrt{3}} \right) \left(z + \sqrt{3}y - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) \left(z - \sqrt{3}y - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) + B,$$

gde je b -stranica trougla, a A i B treba odrediti.

Zadatak 6.9 *Stoksova tečnost gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η stacionarno protiče kroz prostor između dva beskonačna koaksijalna cilindra, poluprečnika a i b ($a < b$). Cilindri su postavljeni horizontalno. Pretpostavljajući da se delići fluida kreću u pravcu ose cilindra, pri čemu intenzitet brzine zavisi samo od rastojanja od ose, naći profil brzine ako se fluid kreće samo usled toga što*

a) se unutrašnji cilindar kreće u pravcu ose brzinom v_a , a spoljašnji brzinom v_b ;

b) postoji konstantan gradijent pritiska u pravcu ose, a oba cilindra miruju.

Zadatak 6.10 Naći silu trenja koja deluje na svaku od dve paralelne beskonačne ploče, između kojih se nalazi sloj Stoksove tečnosti, gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η , ako se jedna ploča kreće brzinom $v_0(t) = a \cos \omega t$ u svojoj ravni, a druga miruje. Rastojanje između ploča je h , a zapreminske sile i gradijent pritiska se zanemaruju.

Zadatak 6.11 Stoksov fluid miruje u dugačkom kanalu, čije su granične ravni $y = \pm a$ nepokretne. U trenutku $t = 0$ iznenada počinje da deluje konstantan gradijent pritiska $\vec{G} = G\vec{e}_x$. Pretpostavljajući da se zapreminske sile mogu zanemariti, a da je brzina oblika $\vec{v} = v(y, t)\vec{e}_x$, naći jednačinu koju zadovoljava $v(y, t)$ za $t > 0$, kao i granične i početne uslove za $v(y, t)$. Kada $t \rightarrow \infty$ očekuje se da $v(y, t)$ prestaje da zavisi od vremena, tj. kretanje postaje stacionarno. Pretpostavljajući da je $v(y, t) = V(y) + v_1(y, t)$, gde je $V(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} v(y, t)$, formirati jednačinu i granične uslove koje zadovoljava $v_1(y, t)$.

Dodatak A

Matematički dodatak

A.1 Cilindrične koordinate

$$\text{grad}\psi = \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z \quad (\text{A.1})$$

$$\text{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \\ & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Sferne koordinate

$$\nabla\psi = \text{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \text{div}\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} = \text{rot}\vec{v} = & \frac{1}{r\sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} \right) \vec{e}_r + \\ & \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi) \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \quad (\text{A.8})$$

Literatura

- [1] Ljubo Ristovski, *Fizika kontinuuma – fluidi*, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Beogradu i Jugoslovenski zavod za produktivnost rada, Beograd, 1986
- [2] Djorđe Mušicki, *Uvod u teorijsku fiziku – Teorijska mehanika*, Naučna knjiga, Beograd 1980
- [3] Božidar S. Milić, *Kurs klasične teorijske fizike, I deo – Njutnova mehanika*, Izdavačka jedinica Univerziteta u Nišu, Niš 1983
- [4] W. M. Lai, D. Rubin, and E. Krempf, *Introduction to Continuum Mechanics*, Pergamon Press, 1978
- [5] W. F. Hughes and J.A. Brighton, *Theory and Problems of Fluid Dynamics*, Schaum Outline Series, McGraw–Hill Book Company, 1967
- [6] A. R. Paterson, *Fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1983
- [7] Pijush K. Kundu, *Fluid Mechanics*, Academic Press, Inc. 1990
- [8] W. H. Lee and S. H. Lam, *Principles of Fluid Mechanics*, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., 1964