

# UNIVERZITET U BEOGRADU

Prof. dr Dragoljub S. Belić

## F I Z I K A I

za studente fizičke hemije

Recenzenti: Prof. dr Snežana Drndarević  
Prof. dr Aleksandar Srećković

Recenzija udžbenika prihvaćena je na sednici Naučno-nastavnog veća  
Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu održanoj 30.03.1994. godine.

## S A D R Ź A J

UVODNE NAPOMENE	5
ELEMENTI VEKTORSKE ALGEBRE	6
I KINEMATIKA MATERIJALNE TAČKE	
1.1. Kretanje materijalne tačke. Brzina kretanja.	9
1.2. Određivanje predjenog puta materijalne tačke.	11
1.3. Ravnomerno pravolinijsko kretanje.	12
1.4. Neravnomerno pravolinijsko kretanje. Ubrzanje.	13
1.5. Krivolinijsko kretanje. Ubrzanje pri krivolinijskom kretanju.	15
1.6. Ravnomerno kružno kretanje.	17
II KINEMATIKA KRUTOG TELA	
2.1. Translatorno kretanje krutog tela.	19
2.2. Rotaciono kretanje krutog tela oko stalne ose.	20
2.2.1. Ugaona brzina.	20
2.2.2. Ugaono ubrzanje.	21
2.3. Relacije medju vektorima linijske i ugaone brzine.	21
2.4. Relacije medju vektorima linijskog i ugaonog ubrzanja.	23
III DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE	
3.1. Prvi Njutnov zakon. Inercijalni sistemi.	25
3.2. Drugi Njutnov zakon. Jedinice sile i mase.	26
3.3. Impuls ili količina kretanja.	27
3.4. Treći Njutnov zakon: Zakon akcije i reakcije.	28
3.5. Zakon održanja impulsa. Primeri.	29
3.6. Zakon nezavisnosti dejstva sila. Slobodno i vezano kretanje.	32
3.7. Odnos kinematičkih i dinamičkih veličina.	
Diferencijalna jednačina kretanja. Zadaci dinamike.	32
3.8. Pravolinijsko kretanje materijalne tačke. Primeri.	33
3.8.1. Kretanje pod dejstvom konstantne sile: $F=\text{const}$ .	33
3.8.2. Kretanje pod dejstvom sile koja zavisi od brzine: $F=F(v)$ .	35
3.8.3. Linearno harmonijsko kretanje pod dejstvom sile $F=F(x)$ .	36
3.8.4. Kretanje pod dejstvom sile koja zavisi od vremena: $F=F(t)$ .	37
3.9. Pravolinijsko kretanje medjusobno vezanih tela.	38
3.10. Krivolinijsko kretanje materijalne tačke. Primeri.	39
3.10.1. Kos hitac u vakuumu.	40
3.10.2. Prostorni harmonijski oscilator.	41
3.11. Određivanje sile po obliku trajektorije.	42
3.12. Dinamika vezanog kretanja materijalne tačke. Klasifikacija mehaničkih veza.	43
3.12.1. Kretanje matematičkog klatna.	44
3.12.2. Dinamika jednakog kružnog kretanja materijalne tačke.	45
3.13. Sile trenja.	45
IV DINAMIKA RELATIVNOG KRETANJA MATERIJALNE TAČKE	
4.1. Relativnost kretanja.	48
4.2. Inercijalni koordinatni sistemi. Galilejeve transformacije. Galilejev princip relativnosti.	48
4.3. Neinercijalni koordinatni sistemi. Inercijalne sile.	49
4.4. Sile inercije u rotirajućim sistemima.	51
4.5. Centrifugalna sila inercije.	54
4.6. Koriolisova sila inercije.	55
4.7. Uticaj obrtanja Zemlje na tela na njenoj površini.	56
4.7.1. Zavisnost težine tela od geografske širine.	56
4.7.2. Uticaj Koriolisove sile na slobodno padanje tela.	57
4.7.3. Uticaj Koriolisove sile na kretanje na Zemljinoj površini.	59
4.7.4. Fukoovo (Foucault) klatno.	60

V ZAKONI ODRŽANJA U PRIRODI	
5.1. Rad sile. Konzervativne i nekonzervativne sile.	61
5.2. Snaga ili efekat rada.	63
5.3. Energija mehaničkog kretanja.	64
5.3.1. Kinetička energija.	64
5.3.2. Potencijalna energija.	64
5.4. Zakon održanja mehaničke energije.	67
5.5. Opisivanje kretanja pomoću energijskih dijagrama.	70
5.6. Sudari. Idealno elastičan sudar tela.	72
5.7. Kos sudar tela.	74
5.8. Apsolutno neelastičan sudar.	78
VI OSNOVE DINAMIKE MEHANIČKOG SISTEMA	
6.1. Kretanje mehaničkog sistema. Centar masa.	80
6.2. Zakoni kretanja centra masa.	81
VII DINAMIKA KRUTOG TELA	
7.1. Translatorno kretanje krutog tela.	83
7.2. Rotaciono kretanje krutog tela. Moment impulsa. Moment sile.	84
7.3. Osnovni zakoni dinamike rotacionog kretanja krutog tela.	
Zakon održanja momenta impulsa.	86
7.4. Rotacija tela oko nepokretne ose. Moment inercije.	87
7.5. Određivanje momenta inercije. Štajnerov obrazac.	90
7.6. Složeno kretanje krutog tela.	94
7.7. Kinetička energija, rad i snaga tela pri rotaciji.	97
7.8. Rotacija tela oko slobodne ose. Slobodne ose rotacije	99
7.8.1. Kretanje čigre. Ugaona brzina precesije.	101
7.8.2. Žiroskopi i primena.	102
VIII GRAVITACIJA	
8.1. Njutnov zakon gravitacije.	104
8.2. Gravitaciono privlačenje materijalne tačke prstenom i šupljom sferom.	106
8.3. Gravitaciono privlačenje pune homogene sfere.	108
8.4. Gravitaciono polje, rad i potencijalna energija.	108
8.5. Keplerovi zakoni.	112
8.6. Kretanje tela sa promenljivom masom	117
IX OSNOVE MEHANIKE NEPREKIDNIH SREDINA	
9.1. Mehanika elastičnih tela. Hukov zakon.	121
9.2. Deformacija istezanja. Granica elastičnosti.	122
9.3. Deformacije smicanja i torzije.	123
9.4. Mehanika fluida. Pritisak.	125
9.5. Osnovni zakoni hidrostatičke. Paskalov i Arhimedov zakon.	126
9.6. Merenje pritiska.	129
9.7. Kretanje idealne tečnosti. Jednačina kontinuiteta.	130
9.8. Bernulijeva jednačina. Primena.	131
9.9. Impuls tečnosti pri proticanju.	134
9.10. Viskoznost tečnosti. Stoksov zakon.	135
9.11. Raspodela brzina u cevi. Isticanje viskozne tečnosti.	136
9.12. Laminarno i turbulentno strujanje. Dinamički potisak.	138
X MEHANIČKE OSCILACIJE	141
10.1. Jednačina harmonijskog oscilovanja. Put, brzina i ubrzanje.	142
10.2. Matematičko i fizičko klatno.	143
10.3. Energija harmonijskog oscilatornog kretanja.	145
10.4. Slaganje oscilacija istog pravca i perioda.	146
10.5. Slaganje oscilacija različitih perioda. Izbijanje.	147
10.6. Slaganje uzajamno normalnih harmonijskih oscilacija	148
10.7. Prigušene oscilacije.	151
10.8. Prinudne oscilacije. Rezonancija.	154

XI TALASNO KRETANJE	
11.1. Prostiranje oscilacija u elastičnoj sredini. Jednačina talasa.	158
11.2. Jednačine ravnih i sfernih talasa.	160
11.3. Hajgensov princip. Difrakcija talasa.	162
11.4. Interferencija talasa.	163
11.5. Stojeći talasi.	165
11.6. Doplerov efekat.	166
11.7. Energija talasa. Gustina energije.	167
11.8. Brzina prostiranja talasa u elastičnoj sredini.	169
11.9. Zvučni talasi i njihovo prostiranje. Interferencija zvuka.	170
11.10 Subjektivne karakteristike zvuke. Infrazvuk.	172
11.11 Ultrazvuk i primena.	173
XII PRIRODA SVETLOSTI I NJENE OSNOVNE FIZIČKE OSOBINE. GEOMETRIJSKA OPTIKA	176
12.1. Fermatov princip i osnovni zakoni geometrijske optike	179
12.2. Prelamanje kroz planparalelnu ploču.	182
12.3. Prelamanje svetlosti kroz prizmu.	183
12.4. Odbijanje svetlosti od ravnog i sfernog ogledala.	186
12.5. Obrazovanje lika pri prelamanju svetlosti na ravnoj i sfernoj površini.	188
12.6. Uvećanje pri odbijanju i prelamanju svetlosti. Žižne daljine.	189
12.7. Optička sočiva. Debelo i tanko sočivo. Optička moć.	191
12.8. Jednačine i uvećanja tankog i debelog sočiva.	192
12.9. Sistem dva sočiva.	194
12.10 Greške sočiva.	194
12.11 Optički instrumenti.	197
12.12 Moć razdvajanja i granice uvećanja optičkih instrumenata.	199
XIII ELEMENTI TALASNE OPTIKE	
13.1. Polarizacija svetlosti.	201
13.2. Polarizacija pri refleksiji. Brusterov i Malusov zakon.	202
13.3. Polarizacija dvojnim prelamanjem. Dihroizam.	203
13.4. Obrtanje ravni polarizacije. Optička aktivnost.	204
13.5. Interferencija svetlosti.	205
13.5.1. Interferencija pomoću ogledala. Frenelova interferencija.	206
13.5.2. Interferencija na tankim slojevima.	206
13.6. Interferometri.	207
13.7. Difrakcija svetlosti.	208
XIV OSNOVE TEORIJE RELATIVNOSTI	
14.1. Teorija relativnosti. Osnovni postulati.	211
14.2. Relativnost vremena i prostora. Transformacione jedn.	212
14.3. Kinematika specijalne teorije relativnosti.	216
14.4. Dinamika specijalne teorije relativnosti.	217
14.5. Relativistički izraz za energiju. Proporcionalnost mase i energije.	218
LITERATURA	221

## UVODNE NAPOMENE

Reč "φυσικῆ" (fizis) na grčkom jeziku označava prirodu, odnosno prirodne pojave i promene. Fizika se kao disciplina odnosi na opisivanje stanja i kretanja materije, bez promena njenog hemijskog sastava. I ova definicija, razvojem moderne fizike i fizičke hemije, postaje nepotpuna i neprecizna, te je možda bolje, ako je uopšte potrebno, definiciju fizike davati posle upoznavanja sa njom.

Danas je fizika veoma razvijena i obuhvata čitav niz oblasti, od kojih ćemo se mi po prirodi stvari susresti prvo sa mehanikom. **Mehanika** je deo fizike koji proučava i opisuje najjednostavnije oblike kretanja materije. Mehanika se može podeliti na kinematiku i dinamiku. **Kinematika** opisuje samo kretanje, predjeni put, brzinu i ubrzanje za različite oblike kretanja, ne vodeći računa o uzrocima tog kretanja. **Dinamika** proučava uzroke kretanja tela, odnosno zavisnost kretanja od sila koje na njih deluju ili energije kojom raspolažu. Dinamika obuhvata statiku i kinetiku. Statika se odnosi na dejstvo spoljašnjih uticaja na telo koje miruje, dok kinetika uspostavlja odnos između dejstva sila i zakona kretanja tela. Mi ćemo se posebno zadržati na kinematici i kinetici kretanja.

Osnovni pojmovi kinematike su prostor, vreme i materijalnost. Ove pojmove je teško definisati i usvojeni su kao naše iskustvene predstave o svetu koji nas okružuje, odnosno kao univerzalne kategorije svega postojećeg.

Da bi se opisivale fizičke promene moraju se definisati osobine ili svojstva materije i mere tih svojstava koje se nazivaju fizičke veličine. Na primer, inertnost je svojstvo tela, a masa je fizička veličina koja izražava meru ili količinu inercije tela. Usvojeni etaloni jedinica za fizičke veličine nazivaju se fizičke jedinice. Neophodan skup fizičkih veličina za opisivanje fizičkih pojava naziva se sistem mera, a odgovarajući skup fizičkih jedinica naziva se sistem jedinica. Istorijski su postojali razni sistemi jedinica (MKS, CGS, ECGS, EMCGS), ali je nedavno postignuta saglasnost da se u celom svetu koristi jedinstveni tzv. **medjunarodni sistem jedinica - IS**. Ovaj sistem obuhvata sedam osnovnih fizičkih veličina i odgovarajućih jedinica, pomoću kojih je moguće izvesti i definisati sve ostale veličine i jedinice u fizici. Međunarodni sistem obuhvata sledeće veličine i jedinice:

<u>FIZICKA VELIČINA (OZNAKA)</u>		<u>OSNOVNA JEDINICA (OZNAKA)</u>	
1. dužina	(L)	metar	(m)
2. masa	(M)	kilogram	(kg)
3. vreme	(T)	sekunda	(s)
4. jačina struje	(A)	amper	(A)
5. temperatura	(q)	kelvin	(K)
6. jačina svetlosti	(I)	kandela	(cd)
7. količina supstancije	(N)	mol	(mol)

1 **m** - je dužina puta koju svetlost u vakuumu pređe za vreme od  $1/299792458$  sekunde.

1 **kg** - je masa tela načinjenog od legure platina/iridijum koje se nalazi u Medjunarodnom birou za mere u Parizu. Ovo telo predstavlja etalon mase.

1 **s** - je trajanje  $9.192.631.770$  perioda zračenja koje odgovara prelazu između hiperfinskih nivoa osnovnog stanja atoma cezijuma Cs133.

1 **K** - predstavlja 273,16-ti deo temperature tzv. trojne tačke vode. U praksi se koristi i Celzijusov stepen, °C, koji ima istu vrednost, a temperatura se preračunava po relaciji:  $t\text{ }^{\circ}\text{C} = \theta\text{ K} - 273,16$ .

1 **A** - je jačina one stalne struje koja prolazeći kroz dva paralelna pravolinijska provodnika beskonačne dužine, zanemarljivo malog preseka, koji se nalaze u vakuumu na međusobnom rastojanju od 1 m, uzrokuje pojavu sile između provodnika od  $2 \times 10^{-7}$  N/m dužine provodnika.

1 **cd** - jačina svetlosnog izvora, sveća ili kandela je šezdeseti deo jačine svetlosti koja se emituje normalno sa površine 1 cm crnog tela na temperaturi očvršćavanja platine (2046 K).

1 **mol** - je količina supstance sistema koji sadrži onoliko elementarnih jedinica koliko ima atoma u 0,012 kg izotopa ugljenika C-12.

Dakle, osnovne jedinice su usvojeni standardi. Sve ostale jedinice se izvode uz pomoć definicionih odnosno dimenzionih formula. Na primer: za brzinu  $(v)=LT^{-1}$ , za ubrzanje  $(a)=LT^{-2}$ , za silu  $(F)=MLT^{-2}$ . U odnosu na osnovnu jedinicu, često se koriste njeni delovi, odnosno umnošci. Manje i veće jedinice u odnosu na osnovnu se označavaju sledećim prefiksima:

		1	JEDINICA	1	
deci	d	0,1	deka	da	10
centi	c	0,01	hekto	ha	100
mili	m	$10(-3)$	kilo	k	$10(3)$
mikro	$\mu$	$10(-6)$	mega	M	$10(6)$
nano	n	$10(-9)$	giga	G	$10(9)$
piko	p	$10(-12)$	tera	T	$10(12)$
femto	f	$10(-15)$	peta	P	$10(15)$
atto	a	$10(-18)$	eksa	E	$10(18)$

Brojevi u zagradama predstavljaju eksponent broja deset.

Ono što ćemo često susretati u daljem izlaganju biće pojmovi materijalne tačke i krutog tela kao idealizovane predstave o fizičkim pojavama koje se uvode radi pojednostavljenja razmatranja samih fizičkih pojava.

Nezaobilazno ćemo nadalje koristiti dosta elementarne matematike, ali posebno treba obratiti pažnju na značaj diferencijalnog i integralnog računa u definisanju i izvodenju fizičkih zakonitosti. Korisno je obnoviti osnovna znanja iz ovih oblasti. Za sada ćemo se ukratko zadržati samo na elementima vektorske algebre, jer će nam to biti potrebno već u prvim izlaganjima.

U odnosu na svoju prirodu, fizičke veličine se dele na skalare, vektore i tenzore.

**SKALARI** su određeni svojom brojnom vrednošću i odgovarajućom jedinicom: masa, vreme, temperatura,...

**VEKTORI** su fizičke veličine koje su potpuno određene svojom veličinom (intenzitetom), pravcem i smerom: brzina, ubrzanje, sila,...

**TENZORI** su fizičke veličine određene sa tri vektora: tenzor inercije, rotacije, deformacije, viskoznosti,...

## ELEMENTI VEKTORSKE ALGEBRE.

**Zbir (ili razlika) vektora**  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ , datih sa  $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k} = (A_1, A_2, A_3)$  i  $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k} = (B_1, B_2, B_3)$ , je treći vektor  $\vec{C}$ , takav da je:

$$\vec{C} = \vec{A} \pm \vec{B} = (A_1 \pm B_1, A_2 \pm B_2, A_3 \pm B_3) = (C_1, C_2, C_3) \quad (0.1)$$

Vektor  $\vec{C}$  leži u ravni određenoj sa  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Grafički se zbir predstavlja vektorom čiji je početak u početku prvog, a kraj u kraju drugog vektora, ukoliko su vektori nadovezani jedan na drugi. Ukoliko pak vektori imaju istu napadnu tačku, isti početak, lako se pokazuje da je njihov zbir jednak dijagonali paralelograma koji se konstruiše nad njima, sa početkom u zajedničkoj napadnoj tački. Razlika se može dobiti indirektnom konstrukcijom zbira vektora  $\vec{A}$  i vektora  $-\vec{B}$ , koji je istog intenziteta i pravca, ali obrnutog smera od vektora  $\vec{B}$ .

**Množenje vektora skalarom** daje vektor istog pravca i smera, a intenziteta jednakog umnošku intenziteta vektora i skalara.

Medjusobno se vektorima mogu izvesti dve operacije množenja: skalarno i vektorsko množenje.

**Skalarni proizvod dva vektora** je skalarna veličina definisana na sledeći način:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B}) \quad (0.2)$$

ili

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (0.3)$$

Ako su vektori medjusobno normalni,  $\vec{A} \perp \vec{B}$ , tada je  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ , jer je kosinus od  $\pi/2$  jednak nuli.

**Vektorski proizvod dva vektora** je vektor, definisan na sledeći način:

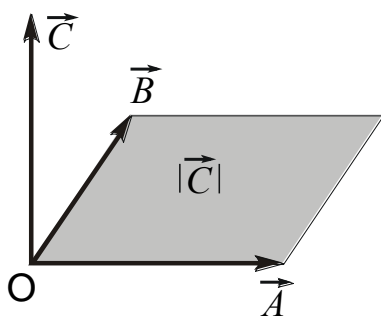
$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1) \quad (0.4)$$

Intenzitet vektora  $\vec{C}$  je određen sa:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B}) \quad (0.5)$$

Posledica ovog izraza je da je vektorski proizvod dva medjusobno paralelna vektora jednak nuli. Inače, pravac novog vektora je normalan na oba polazna vektora, odnosno na ravan koju oni obrazuju a smer mu se određuje tako da sa polaznim vektorima obrazuje desni trijedrar, slika 0.1., odnosno na osnovu tzv. pravila desnog zavrtnja (ako bi se desni zavrtnaj obrtao tako da po manjem uglu dovede prvi vektor do poklapanja sa pravcem drugog, smer pomeranja zavrtnja bi se poklapao sa smerom  $\vec{C}$ ). Intenzitet vektora  $\vec{C}$  jednak je u stvari površini paralelograma konstruisanog nad vektorima  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$ . Na osnovu pravila o određivanju smera vektora da se zaključiti da za vektorski proizvod ne važi pravilo komutativnosti, odnosno da se zamenom redosleda vektora u vektorskom proizvodu menja znak proizvoda, tj.:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad (0.6)$$



Slika 0.1. Vektorski proizvod

Komponente rezultujućeg vektora je lakše zapamtiti preko determinante trećeg reda, koja u prvoj koloni ima jedinične vektore izabranog koordinatnog sistema, u drugoj koloni komponente vektora  $\vec{A}$  i u trećoj komponente vektora  $\vec{B}$ . Ova determinanta se prikazuje na sledeći način:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (0.7)$$

**Mešoviti proizvod tri vektora** se uz pomoć determinante može izraziti na sledeći način:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (0.8)$$

Ovo je skalarna veličina i geometrijski predstavlja zapreminu paralelopipeda konstruisanog nad ova tri vektora. Koristeći osobinu simetrije determinanti na zamenu vrsta i kolona sledi:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (0.9)$$

**Dvostruki vektorski proizvod** je vektor i može se faktorisati na sledeći način:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (0.10)$$

Ovo se dokazuje na sledeći način. Polazeći od definicije vektorskog proizvoda dva vektora, za  $X_1$  komponentu se u sistemu  $OX_1X_2X_3$  dobija sledeći izraz:

$$A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3) \quad (0.11)$$

Ako se ovom izrazu doda i oduzme član  $A_1B_1C_1$  i odgovarajući članovi grupišu, dobija se:

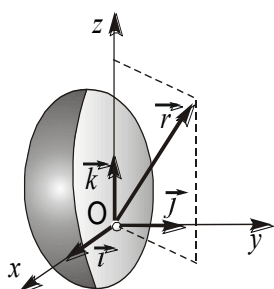
$$B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) = (\vec{A} \cdot \vec{C})B_1 - (\vec{A} \cdot \vec{B})C_1$$

što predstavlja samo prvu komponentu transformisanog trostrukog vektorskog proizvoda u ranije navedenu razliku. Sličan rezultat se dobija i za druge dve komponente, čime se pokazuje da navedena transformacija važi.

## KINEMATIKA MATERIJALNE TAČKE

## 1.1. Kretanje materijalne tačke. Brzina kretanja.

Određivanje položaja materijalne tačke u prostoru moguće je samo u odnosu na neko drugo telo, uzeto kao referentno. U proizvoljnoj tački, O, referentnog tela mogu se povući tri orijentisana



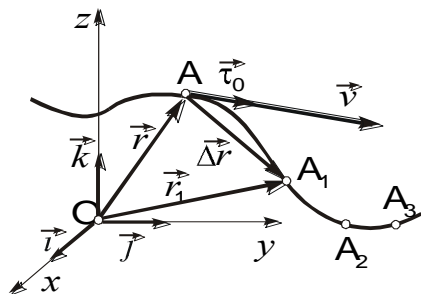
pravca određena odgovarajućim jediničnim vektorima - ortovima  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$ . Ova tri pravca nazivamo koordinatnim osama (x, y i z-osa) i u opštem slučaju oni zajedno sa tačkom O predstavljaju **koordinatni sistem**. U mehanici se najčešće upotrebljava desni pravougli tzv. Dekartov (Descartes) koordinatni sistem, prikazan na slici 1.1, a po potrebi i polarni, sferni, generalisani, itd.

Položaj tačke A u prostoru, u ovom sistemu, određen je skupom njenih koordinata (x, y, z), odnosno pomoću vektora položaja:

Slika 1.1. Referentni sistem

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \quad (1.1)$$

Kretanje se može definisati kao neprekidna promena položaja. Opisivanje kretanja znači određivanje položaja materijalne tačke (ili tela) u proizvoljnom trenutku vremena u odnosu na dati koordinatni sistem. Neka se materijalna tačka A kreće preko položaja A1, A2, A3,... Geometrijsko mesto ili skup tačaka uzastopnih položaja tela naziva se putanja ili trajektorija, slika 1.2. Položaj tačke A pri kretanju određen je tekućim vektorom položaja  $\vec{r}$ :



Slika 1.2. Trajektorija

$$\vec{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} = \vec{r}(t)$$

Ovoj vektorskoj jednačini odgovara skup od tri skalarne jednačine:

$$x = x(t), y = y(t) \text{ i } z = z(t)$$

Bilo vektorska jednačina, bilo skup od tri skalarne jednačine predstavljaju takozvane konačne jednačine kretanja. Kretanje, međutim, može biti određeno i ako se poznaje geometrijski oblik putanje i pređeni put kao funkcija vremena:

$$f(x,y,z) = 0 \quad \text{i} \quad s = s(t) \quad (1.2)$$

U klasičnoj mehanici sve navedene funkcije su neprekidne, što znači da se u principu mogu višestruko diferencirati po vremenu.

Posmatrajmo kretanje tačke A sa prethodne slike. Neka se tačka iz ovog položaja premesti u vremenskom intervalu  $\Delta t$  u tačku A1 sa vektorom položaja  $\vec{r}_1$ . Prema slici je:

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r} \quad (1.3)$$

Vektor  $\Delta \vec{r} = \overline{A_1 A}$  predstavlja priraštaj (promenu) vektora položaja  $\vec{r}$  u intervalu vremena  $\Delta t$ , dakle  $\Delta \vec{r}$  je funkcija vremenskog intervala  $\Delta t$  i naziva se i vektor pomeranja tačke A. Ovaj vektor je mera pomeranja i u principu se njegov intenzitet razlikuje od pređenog puta materijalne tačke,  $\Delta s$ , koji predstavlja dužinu luka trajektorije od tačke A do  $A_1$ . Količnik priraštaja vektora položaja,  $\Delta \vec{r}$ , i intervala vremena  $\Delta t$ , u kome je priraštaj nastao, naziva se vektor srednje brzine u tom intervalu vremena:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \langle \vec{v} \rangle \quad (1.4)$$

Uobičajeno je da se srednja vrednost neke veličine označava uglastim zagradama, kao u ovom primeru. Vektor  $\langle \vec{v} \rangle$  daje srednju promenu vektora položaja u intervalu  $\Delta t$  i ako kretanje nije uniformno, a  $\Delta t$  relativno veliko, ne opisuje dobro kretanje. Da bi se kretanje boqe opisalo promene treba posmatrati u veoma malim intervalima vremena, dakle tako da  $\Delta t \rightarrow 0$ . Granična vrednost gornjeg odnosa kada  $\Delta t \rightarrow 0$  naziva se trenutna brzina u vremenskom trenutku  $t$  i može se pisati kao:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (1.5)$$

Matematički, trenutna brzina je jednaka prvom izvodu vektora položaja tačke po vremenu.

Prema slici 1.2, kada se  $\Delta t$  smanjuje  $\Delta \vec{r}$  postaje sve kraća tetiva luka koja u graničnom slučaju, prelazi u tangentu na trajektoriju u posmatranoj tački. Pravac tangente je određen njenim ort vektorom  $\vec{t}_o$ . Pri tome se intenzitet vektora priraštaja izjednačuje sa pređenim putem, postaje  $dr=ds$ , pa se vektor brzine može izraziti na sledeći način:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{t}_o = \frac{ds}{dt} \vec{t}_o = v \vec{t}_o \quad (1.6)$$

gde je  $\vec{t}_o$  jedinični vektor ili ort tangente, a  $v=ds/dt$  algebarska vrednost ili intenzitet brzine u datoj tački.

U pravouglom koordinatnom sistemu vektor  $\vec{v}$  ima tri komponente duž x, y, i z-ose. Diferenciranjem vektora položaja  $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$  po vremenu sledi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (1.7)$$

Kako je kao i za svaki drugi vektor  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$ , sledi da su komponente brzine date sa:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad \text{i} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (1.8)$$

Dakle, brzina je vektor određen svojim projekcijama na koordinatne ose. Modul ili intenzitet brzine je određen sa:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.9)$$

Pravci vektora brzine u odnosu na koordinatne ose određeni su preko kosinusa uglova koje zaklapa sa njima:

$$\cos(\vec{\tau}_o, \vec{i}) = \frac{\dot{x}}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$\cos(\vec{\tau}_o, \vec{j}) = \frac{\dot{y}}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

$$\cos(\vec{\tau}_o, \vec{k}) = \frac{\dot{z}}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

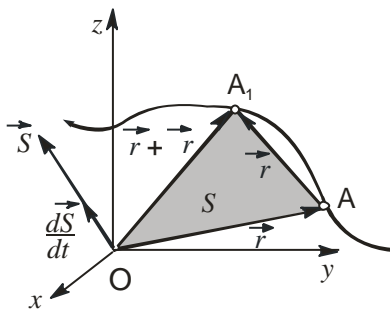
Prema definiciji brzine njene dimenzije su  $(v) = (s)/(t) = LT^{-1}$ , a jedinice naravno zavise od sistema. U sistemu **SI** osnovna jedinica je m/s.

**Sektorska brzina.** Pojam brzine se može uopštiti na proizvoljne promenljive vektore i skalare. Ako se neki vektor  $\vec{A}$  menja sa vremenom, njegov prvi izvod po vremenu naziva se brzina promene vektora  $\vec{A}$ :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{v}_A \quad (1.10)$$

Svakako da ovako generalisan vektor brzine ne mora imati dimenzije brzine vektora položaja  $LT^{-1}$ , već to zavisi od prirode vektora A. Dimenzije će biti  $(A)T^{-1}$ .

Tako, na primer, svaka ravna površina  $\Delta S$  može se orijentisati pridruživanjem vektora  $\Delta \vec{S}$ , čiji je intenzitet jednak veličini uočene površine, pravac normalan na ravan površine, a smer od njenog "lica", kao na slici 1.3. Kako je u ovom slučaju uočena površina nastala pomeranjem tačke A, odnosno njenog vektora položaja  $\vec{r}$ , za  $\Delta \vec{r}$ , ista se može predstaviti na sledeći način:



Slika 1.3. Sektorska brzina

$$\Delta \vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \Delta \vec{r}) \quad (1.11)$$

Količnik vektora  $\Delta \vec{S}$  i odgovarajućeg vremenskog intervala  $\Delta t$ , kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , naziva se sektorska brzina materijalne tačke u tački A i data je sledećim izrazom:

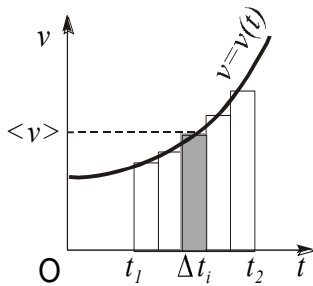
$$\vec{v}_{\text{sek}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \vec{r} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}) \quad (1.12)$$

gde je  $\vec{v}$  trenutna brzina materijalne tačke u tački A. Pri kretanju tačke u ravni, pravac vektora sektorske brzine je stalan i normalan na tu ravan. Njene dimenzije su  $L^2T^{-1}$ .

## 1.2. Određivanje pređenog puta materijalne tačke.

Posmatrajmo najjednostavniji slučaj kada se tačka kreće duž prave linije, recimo x-ose. U tom slučaju je  $v = dx/dt$ . Ovo je, kao što smo videli, prvi izvod ili diferencijal puta po vremenu i fizički predstavlja nagib ili koeficijent pravca tangente u datoj tački trajektorije. Dakle, brzinu smo dobili diferenciranjem vektora položaja, odnosno pređenog puta čestice, po vremenu.

Obrnut postupak bi bio da se iz date brzine kao funkcije vremena nađe pređeni put odnosno koordinata materijalne tačke. Ovo se može izvesti pomoću metoda integralnog računa, tj. postupkom integriranja, što predstavlja obrnut postupak od diferenciranja.



Slika 1.4. Određivanje pređenog puta

Iz izraza (1.8) je  $dx = vdt$ . Ako se brzina malo menja u intervalu  $\Delta t$ , tada je pređeni put  $\Delta x = \langle v \rangle \Delta t$  i predstavlja šrafiranu površinu na slici 1.4. Brojna vrednost ove površine predstavlja dužinu pređenog puta. Za duži vremenski interval, od  $t_1$  do  $t_2$ , pređeni put  $x_{12}$  će biti jednak zbiru pojedinih puteva  $\Delta x_i$ , pređeih u svakom od intrevala vremena  $\Delta t_i$ :

$$x_{12} = \sum_{i=1}^n \langle v_i \rangle \Delta t_i \quad (1.13)$$

Smanjivanjem  $\Delta t$ , u graničnom slučaju kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , zbir pojedinih površina postaje jednak ukupnoj površini ispod krive linije koja predstavlja funkciju  $v=v(t)$ . Dakle, pomeranje ili pređeni put u ma kom vremenskom intervalu jednak je delu površine ispod grafika brzine u funkciji vremena.

Granični slučaj zbira predstavlja integral. Dakle polazeći od izraza  $dx=v(t)dt$ , da bi smo dobili pređeni put u određenom vremenskom intervalu, ovaj izraz treba integraliti:

$$\int dx = \int v(t)dt \quad (1.14)$$

Dakle, pređeni put se određuje integriranjem funkcije  $v=v(t)$  i određivanjem integracione konstante C iz početnih uslova (položaja materijalne tačke u trenutku  $t=0$ ). Zamenom vremena trajanja kretanja u dobijeni izraz dobija se pređeni put. Za proizvoljan vremenski interval, od  $t_1$  do  $t_2$ , pređeni put se dobija praktično na isti način, izračunavanjem određenog integrala:

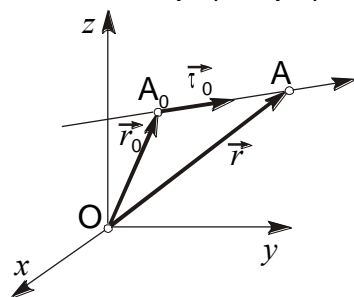
$$x_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \quad (1.15)$$

### 1.3. Ravnomerno pravolinijsko kretanje.

Za opisivanje kretanja je potrebno poznavati konačnu jednačinu putanje  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ili jednačinu brzine  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  /takođe je dovoljno poznavati ubrzanje  $\vec{a} = \vec{a}(t)$ , što ćemo uskoro videti/. Poznavanjem jedne od funkcija, zbog njihove povezanosti, moguće je odrediti i ostale. Prema obliku gornjih funkcija, kretanja se mogu podeliti na sledeće vidove:

- Prema obliku putanje na pravolinijsko i krivolinijsko,
- Prema brzini na ravnomerno i neravnomerno, i
- Prema ubrzanju na jednako i nejednako ubrzana (usporena).

Kada je putanja prava, kretanje je pravolinijsko. Za opisivanje takvog kretanja potrebno je poznavati položaj te prave u prostoru u odnosu na izabrani koordinatni sistem i odrediti zakon puta  $s=s(t)$ , izraz (1.2). Položaj prave može se odrediti položajem jedne njene tačke,  $A_0$ , i ortom pravca  $\vec{\tau}_0$ , kao na slici 1.5. Ako za određeni vremenski interval materijalna tačka pređe iz položaja  $A_0$  u položaj A, rastojanje  $A_0A$  predstavlja pređeni put s, u datom vremenskom intervalu. U tom slučaju vektor pomeranja je  $\Delta \vec{r} = s \vec{\tau}_0$ , pa možemo pisati, na osnovu slike 1.5., da je

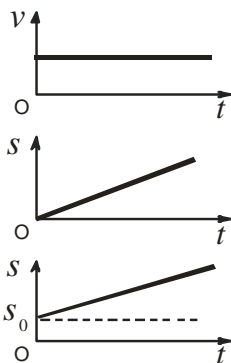


Slika 1.5. Putanja kod pravolinijskog kretanja

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s \vec{\tau}_0$$

Ovo je vektorska jednačina pravolinijskog kretanja, a brzina će biti data sa:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{t}_0 = v \vec{t}_0$$



Slika 1.6. Ravnomerno pravolinijsko kretanje

pošto su vektori  $\vec{r}_0$  i  $\vec{t}_0$  konstantni. Dakle, za slučaj ravnomernog pravolinijskog kretanja, pri kome je brzina konstantna, iz  $ds/dt=v=const$  jednostavnom integracijom dobijamo:

$$s = vt + C = vt + s_0 \quad (1.16)$$

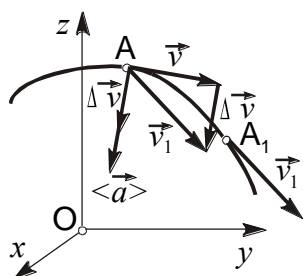
Konstanta integracije  $C=s_0$  određuje se iz početnih uslova. Ako kretanje počinje u  $A_0$  u trenutku  $t=0$ , tada je pređeni put  $s=s_0=0$ , pa je  $s=vt$ . Dakle, pri ravnomernom pravolinijskom kretanju put je linearna funkcija vremena. Na priloženim graficima, slika 1.6., prikazane su vremenske zavisnosti brzine i pređenog puta za ovakvo kretanje i to za  $s_0=0$  i  $s_0 \neq 0$ . Sa grafika  $s(t)$  se vidi da je  $v=tg\varphi$ .

#### 1.4. Neravnomerno pravolinijsko kretanje. Ubrzanje.

Pri neravnomernom kretanju materijalne tačke njen vektor brzine se menja sa vremenom i to u opštem slučaju i po intenzitetu i po pravcu (ovo poslednje važi samo za krivolinijsko kretanje).

Razmotrićemo opštiji slučaj kretanja po krivoj liniji kada se brzina menja i po pravcu i po intenzitetu. Prema priloženom grafiku, sl.1.7., vektor promene brzine od trenutka  $t$  do  $t+\Delta t$  će biti:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$$



Slika 1.7. Promena brzine

Odnos vektora priraštaja brzine  $\Delta \vec{v}$  i vremenskog intervala  $\Delta t$ , u kome je taj priraštaj nastao, naziva se vektor srednjeg ubrzanja materijalne tačke i definisan je sledećim izrazom:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \langle \vec{a} \rangle \quad (1.17)$$

Pošto je  $\Delta t$  skalar, i to pozitivan,  $\langle \vec{a} \rangle$  ima isti pravac i smer kao i  $\Delta \vec{v}$ . Granična vrednost ovog izraza, kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , naziva se vektor ubrzanja materijalne tačke, u tački A, u trenutku vremena  $t$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} \quad (1.18)$$

Pošto je, kako smo već videli,  $\vec{v} = d\vec{r} / dt$ , sledi:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \quad (1.19)$$

odnosno, vektor ubrzanja jednak je drugom izvodu vektora položaja pokretne tačke po vremenu.

U pravougloj koordinatnoj sistemu i ubrzanje će imati tri komponente, duž Ox, Oy i Oz-osa. Dvostrukim diferenciranjem vektora položaja po vremenu sledi:

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

obzirom da su ortovi  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  nepromenljivi i po pravcu i po intenzitetu. Sa druge strane i vektor a se može izraziti preko komponenta  $a_x$ ,  $a_y$  i  $a_z$ , odakle sledi da je:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \quad \text{i} \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \quad (1.20)$$

Iz ovih jednačina se za intenzitet vektora ubrzanja dobija:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

a njegov pravac u odnosu na koordinatne ose biće određen preko kosinusa uglova u odnosu na ose:

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

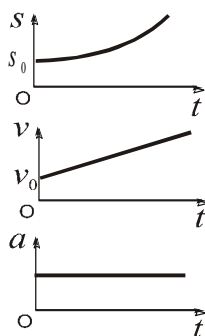
$$\cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

Razmotrićemo sada kao konkretan slučaj ubrzanog kretanja pravolinijsko jednakoubrzano kretanje tačke. U ovom slučaju putanja ili trajektorija tačke je prava linija na kojoj u različitim trenucima vremena, odnosno položajima, tačka ima različite brzine. Takvo kretanje je za  $a > 0$  jednakoubrzano, a u suprotnom je jednakousporeno ( $\vec{a}$  ima suprotan smer od  $\vec{v}$ ). Pri tome je ubrzanje konstantno:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0 = \text{const}$$

odnosno  $d\vec{v} = \vec{a}_0 dt$ . Odavde se integracijom dobija, zanemarujući vektorske oznake zbog kolinearosti vektora  $\vec{v}$  i  $\vec{a}_0$ :



Slika 1.8. Ravnomerno ubrzano kretanje

$$v = a_0 t + C_1 = a_0 t + v_0$$

uzimajući da je u trenutku  $t=0$ ,  $C_1=v_0$ . Iz zadnjeg izraza se zakon promene puta može dobiti još jednom integracijom, polazeći od veze  $v=ds/dt$ :

$$\frac{ds}{dt} = a_0 t + v_0$$

Integracijom izraza  $ds=a_0 t dt+v_0 dt$ , uz uslov da je nova integraciona konstanta  $C_2=s_0$ , dobijamo:

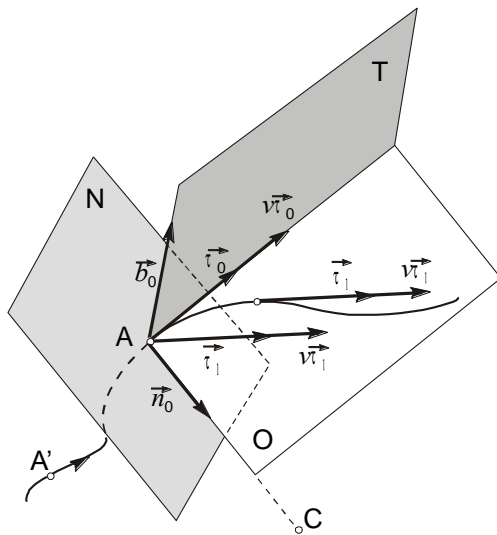
$$s = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + s_0 \quad (1.21)$$

Ovo je konačna jednačina pređenog puta za pravolinijsko jednakubrzano kretanje. Na priloženim graficima na slici 1.8. ilustrovane su vremenske zavisnosti ubrzanja, brzine i pređenog puta. U datim uslovima se vidi da je ubrzanje nezavisno od vremena, brzina je linearna, a put kvadratna funkcija vremena.

### 1.5. Krivolinijsko kretanje. Ubrzanje pri krivolinijskom kretanju.

U opštem slučaju ubrzanje ne mora biti konstantno tokom kretanja. Može da se menja po intenzitetu (pri pravolinijskom nejednako ubrzanom kretanju) i/ili po pravcu i smeru (kod proizvoljnog kretanja po krivoj liniji). U tom slučaju za opisivanje kretanja potrebno je poznavati ubrzanje kao funkciju vremena, čime postupak integracije postaje složeniji.

Razmotrimo odnos vektora ubrzanja,  $\vec{a}$ , prema putanji posmatrane tačke u slučaju krivolinijskog kretanja, slika 1.9. U tački A putanje povucimo tangentu jediničnog orta  $\vec{\tau}_0$ , i vektor



Slika 1.9. Prirodni koordinatni trijedrar

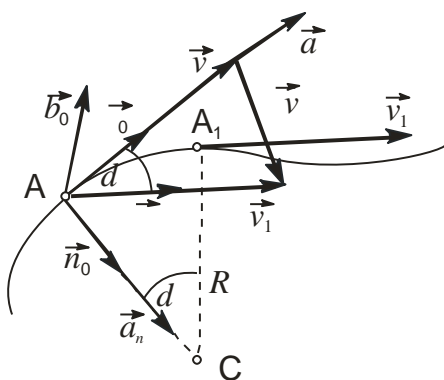
brzine  $v\vec{\tau}_0$ . Ravan N normalna na  $\vec{\tau}_0$  naziva se normalna ravan putanje u tački A. U tački  $A_1$ , bliskoj tački A, može se povući novi ort  $\vec{\tau}_1$  i vektor brzine  $v\vec{\tau}_1$ .

Ako prenesemo translacijom vektor  $\vec{\tau}_1$  u tačku A, ortovi  $\vec{\tau}_0$  i  $\vec{\tau}_1$  u tom slučaju definišu oskulatornu ravan, O, trajektorije u tački A. Linija preseka N i O ravni naziva se glavna normala a njen pravac je određen ortom  $\vec{n}_0$ . Ort  $\vec{n}_0$  je usmeren od A ka centru krivine C. Centar krivine trajektorije je tačka u kojoj se seku normale iz dve veoma bliske tačke tački A.

Normala na trajektoriju u tački A, koja leži u ravni N i normalna je na oskulatornu ravan O, naziva se binormala  $\vec{b}_0$ . Ravan određena vektorima

$\vec{\tau}_0$  i  $\vec{b}_0$  naziva se tangentna ravan i označena je na slici sa T.

Ort-vektori  $\vec{\tau}_0$ ,  $\vec{n}_0$  i  $\vec{b}_0$  obrazuju u tački A desni trijedrar, koji se naziva "prirodni koordinatni trijedrar". Ovaj triedrar, ili koordinatni sistem, se kreće zajedno sa tačkom A i pravci i smerovi njegovih osa se menjaju sa vremenom u zavisnosti od zakona puta tačke A na njenoj trajektoriji.



Slika 1.10. Tangencijalno i normalno ubrzanje

Određimo projekcije vektora ubrzanja  $\vec{a}$  na ose prirodnog triedra  $\vec{\tau}_0$ ,  $\vec{n}_0$  i  $\vec{b}_0$  uz pomoć slike 1.10. Podsećajući se definicija brzine i ubrzanja možemo u ovom slučaju pisati za ubrzanje:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}_0) \quad (1.22)$$

Ovde su  $v$  i  $\vec{\tau}_0$  promenljive veličine ( $\vec{\tau}_0$  po pravcu i smeru), pa je:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_o + v \frac{d\vec{\tau}_o}{dt} \quad (1.23)$$

Izvod ort vektora po vremenu diskutovan je u glavi 2 (jedn. 2.11). Za sada ćemo, međutim, izvod  $d\vec{\tau}_o/dt$  transformisati na sledeći način:

$$\frac{d\vec{\tau}_o}{dt} = \frac{d\vec{\tau}_o}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{\tau}_o}{ds} \quad (1.24)$$

U ovom izrazu  $d\vec{\tau}_o$  kao granični položaj vektora  $\Delta\vec{\tau}_o$ , kada  $A_1 \rightarrow A$ , imaće u stvari pravac normalan na  $\vec{\tau}_o$ , kao njegov priraštaj koji izaziva samo promenu pravca. Ovaj priraštaj, na osnovu činjenice da spaja vrhove ortove  $\vec{\tau}_o$  i  $\vec{\tau}_1$ , slika 1.10, leži u oskulatornoj ravni, te se poklapa sa pravcem i smerom glavne normale  $\vec{n}_o$ .

Intenzitet vektora  $d\vec{\tau}_o$  je srazmeran uglu između  $\vec{\tau}_o$  i  $\vec{\tau}_1$ , dakle uglu  $\Delta\varphi$ , odnosno u graničnom slučaju  $d\varphi$ . Stoga, možemo pisati da je :

$$d\vec{\tau}_o = d\varphi \vec{n}_o \quad (1.25)$$

Takođe treba odrediti element puta  $ds$ . Radi toga povucimo normale na trajektoriju u tačkama A i  $A_1$ , u čijem preseku se nalazi centar krivine trajektorije-C. Luk krive  $ds=AA_1$  se može smatrati lukom kruga prečnika  $R=AC$ . Krug čiji se element luka poklapa sa elementom trajektorije u datoj tački naziva se krugom krivine, njegov poluprečnik poluprečnikom krivine krive, a centar, kao što smo već istakli, centrom krivine u datoj tački. I prava linija ima centar krivine, u beskonačnosti.

Sa slike 1.10 će sada očigledno element luka krive biti dat izrazom:

$$ds = AA_1 = R d\varphi$$

Dakle, vektor ubrzanja se zamenom izraza za  $d\vec{\tau}_o$  i  $ds$  u (1.24), odnosno (1.23), može pisati kao:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_o + v^2 \frac{d\varphi}{R} \frac{\vec{n}_o}{d\varphi} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_o + \frac{v^2}{R} \vec{n}_o \quad (1.26)$$

Znači da vektor ubrzanja ima dve komponente u odnosu na prirodni triedar. Komponenta u pravcu tangente na trajektoriju naziva se tangenciono ubrzanje i data je sa:

$$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_o = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau}_o \quad (1.27)$$

Druga komponenta u pravcu i smeru glavne normale naziva se normalno ubrzanje i data je izrazom:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{n}_o \quad (1.28)$$

Ova komponenta, obzirom da je usmerena ka centru krivine, naziva se i centripetalno ubrzanje. Kao što smo videli vektor ubrzanja nema komponentu u pravcu binormale:

$$\vec{a}_b = 0 \quad (1.29)$$

što znači da ubrzanje uvek leži u oskulatornoj ravni trajektorije. Tangenciona komponenta ubrzanja karakteriše promenu brzine po intenzitetu a normalna po pravcu. Imamo, dakle, da je:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \quad (1.30)$$

Intenzitet vektora ubrzanja je:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \quad (1.31)$$

Ovaj izraz predstavlja zavisnost intenziteta ubrzanja od  $\dot{v}$ ,  $v$  i  $R$ .

U zavisnosti od toga koja komponenta ubrzanja je zastupljena pri kretanju materijalne tačke, razlikuju se sledeći slučajevi ubrzanog kretanja:

- a)  $a_t = 0$ ,  $a_n = 0$  - kretanje je ravnomerno pravolinijsko;
- b)  $a_t \neq 0$ ,  $a_n = 0$  - neravnomerno pravolinijsko;
- c)  $a_t = 0$ ,  $a_n \neq 0$  - ravnomerno krivolinijsko, odnosno kružno;
- d)  $a \neq 0$ ,  $a_n \neq 0$  - neravnomerno krivolinijsko, složeno kretanje.

Dimenzije ubrzanja su  $(a)=LT^{-2}$ , a jedinice u međunarodnom sistemu su  $m/s^2$ .

### 1.6. Ravnomerno kružno kretanje.

Zadržaćemo se posebno na ravnomernom kružnom kretanju, jer ćemo takvo kretanje često sretati u daljem tekstu. To je kretanje materijalne tačke po kružnoj putanji sa vektorom brzine konstantnim po intenzitetu. Ako se koordinatni sistem postavi u centar kruga, kao na slici 1.11, vektorska jednačina kretanja tačke A će biti:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad (1.32)$$

sa

$$x(t) = r \cdot \cos\varphi \quad \text{i} \quad y(t) = r \cdot \sin\varphi$$

Pri ravnomernom kretanju, ugao  $\varphi$  se ravnomerno menja sa vremenom, odnosno može se prikazati kao linearna funkcija vremena:  $\varphi = \omega t$ , gde je sa  $\omega$  označena konstanta proporcionalnosti (odnosno ugaona brzina, kako ćemo uskoro videti). Prema tome, prethodne izraze možemo pisati na sledeći način:

$$x(t) = r \cdot \cos(\omega t) \quad \text{i} \quad y(t) = r \cdot \sin(\omega t) \quad (1.33)$$

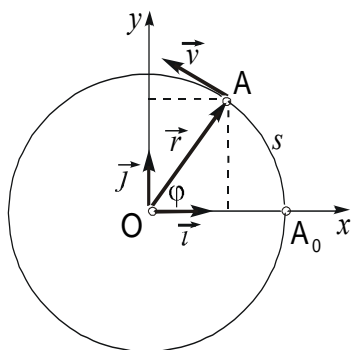
Ovo su parametarske jednačine kretanja, a njihovim dizanjem na kvadrat i eliminisanjem vremena  $t$  kao parametra dobija se jednačina trajektorije, oblika:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

što je jednačina kruga. Po njoj se tačka kreće sa sledećim zakonom puta:

$$s = r \cdot \varphi = r \cdot \omega \cdot t \quad (1.34)$$

Brzina ovog kretanja se dobija diferenciranjem vektorske jednačine kretanja po vremenu, pri čemu su ortovi stalni. Dobija se:



Slika 1.11. Kružno kretanje

$$\vec{v} = -r\omega \sin(\omega t) \vec{i} + r\omega \cos(\omega t) \vec{j} \quad (1.35)$$

Intenzitet ove brzine je:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} = r\omega \quad (1.36) \end{aligned}$$

Dakle, intenzitet brzine je stalan, jer su  $r$  i  $\omega$  konstantni. Da bi odredili odnos pravaca vektora  $\vec{r}$  i  $\vec{v}$ , pomnožimo ih

skalarno:

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = (r \cos \omega t \vec{i} + r \sin \omega t \vec{j}) \cdot (-r \omega \sin \omega t \vec{i} + r \omega \cos \omega t \vec{j}) = 0$$

jer je  $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ ,  $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$  i  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ . Znači vektor brzine je normalan na radijus vektor ili vektor položaja tačke, odnosno brzina je kao normala na radijus usmerena duž tangente kruga u svakoj tački. Smer brzine je u smeru obrtanja, od  $A_0$  ka  $A_1$ .

Iako je ovo kretanje ravnomerno, postoji ubrzanje i to njegova normalna komponenta. Vektor ubrzanja dobijamo dvostrukim diferenciranjem vektora položaja, odnosno:

$$\vec{a} = -r\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - r\omega^2 \sin \omega t \vec{j} = -\omega^2 (r \cos \omega t \vec{i} + r \sin \omega t \vec{j}) = -\omega^2 \vec{r} \quad (1.37)$$

Vektor  $\vec{a}$  je usmeren duž  $-\vec{r}$ , to je u stvari normalna komponenta  $\vec{a}_n$ . Intenzitet vektora ubrzanja je:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{r^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + r^2 \omega^4 \sin^2 \omega t} = r\omega^2 \quad (1.38)$$

Dakle  $a = a_n = r\omega^2 = \text{const}$  jer su  $r$  i  $\omega$  konstantni. Imajući iz definicije normalne komponente ubrzanja da je  $a_n = v^2/r$  i upoređivanjem sa izrazom (1.38) dobijamo da je konstanta  $\omega$  jednaka  $\omega = v/r$ .

## II

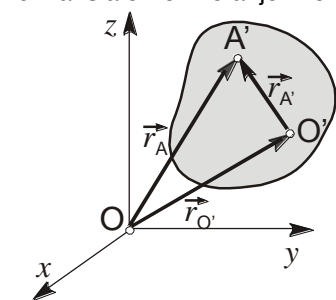
### KINEMATIKA KRUTOG TELA

Kruto telo je mehanički sistem sastavljen od velikog broja materijalnih tačaka sa osnovnom karakteristikom da, bez obzira na spoljne uticaje, rastojanje  $d$  izmedju bilo koje dve njegove tačke ostaje stalno. Svaka tačka tela pri kretanju opisuje odgovarajuću putanju ili trajektoriju.

Da bi se odredilo kretanje tela treba poznavati kretanje svake tačke, odnosno treba poznavati po tri jednačine kretanja:  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $z(t)$  za svaku tačku. To čini  $3N$  jednačina, pri čemu je  $N$  ukupan broj tačaka tela. Pošto se, međjutim, rastojanja medju pojedinim tačkama ne menjaju, to je dovoljno poznavati kretanje samo tri proizvoljne tačke koje ne leže na istoj pravoj liniji (što čini 9 jednačina). Obzirom da su i ove tri izabrane tačke povezane uslovom konstantnog rastojanja, što čini tri jednačine uslova veze, za opisivanje kretanja celog tela je potrebno i dovoljno poznavati šest nezavisnih jednačina. Iz tog razloga se uvode pojmovi novih kinematičkih veličina, koje su opšte za sve materijalne tačke. Te nove veličine su ugaoni pomeraj (ugao), ugaona brzina i ugaono ubrzanje. Na taj način se kretanje krutog tela prema obliku putanja pojedinih materijalnih tačaka uslovno deli na translatorno (ili progresivno) i rotaciono (ili obrtno) kretanje.

#### 2.1. Translatorno kretanje krutog tela.

Translatorno kretanje je ono pri kome svaka linija koja spaja dve proizvoljne tačke tela pri kretanju ostaje paralelna samoj sebi, odnosno zadržava svoju orijentaciju u prostoru. Dakle, ako znamo translatorno kretanje jedna tačke, znamo istovremeno kretanje svih tačaka zbog uslova veze. Dakle translatorno kretanje možemo da opišemo pomoću tri jednačine kretanja jedne tačke  $x(t)$ ,  $y(t)$  i



Slika 2.1. Translatorno kretanje krutog tela

$z(t)$ . Ostale tri jednačine, od neophodnih šest, odnose se na opisivanje rotacije tela. Zadržaćemo se prvo na translaciji. Položaj proizvoljne tačke  $A$  krutog tela u odnosu na nepokretni sistem dat je relacijom:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{O'} + \vec{r}_{A'} \quad (2.1)$$

gde je sa  $O'$  označena tačka tela čije je kretanje poznato i dato parametarskim jednačinama  $x_{O'}(t)$ ,  $y_{O'}(t)$  i  $z_{O'}(t)$ , slika 2.1. Ako su projekcije duži  $AO'$ , odnosno komponente vektora  $\vec{r}_{A'}$ , redom  $a$ ,  $b$  i  $c$ , a pri translaciji su nepromenljive, kretanje proizvoljne tačke  $A$  u odnosu na nepokretni sistem  $Oxyz$  biće dato sa:

$$x_A(t) = x_{O'}(t) + a \quad y_A(t) = y_{O'}(t) + b \quad z_A(t) = z_{O'}(t) + c$$

Dakle, poznavanje tri parametarske jednačine kretanja jedne tačke omogućava opisivanje translatornog kretanja proizvoljne tačke tela.

Brzina proizvoljne tačke  $A$ , na osnovu toga, biće:

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_{O'} \quad \text{ili} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_{O'}$$

jer je vektor  $\vec{r}_A'$  konstantan, a njegov izvod jednak nuli. Dakle, brzine svih tačaka tela pri translaciji su medjusobno jednake. Na sličan način se još jednim diferenciranjem za ubrzanje dobija:

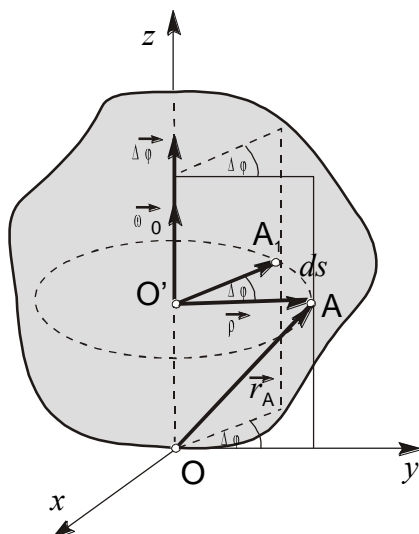
$$\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}}_O' \quad \text{ili} \quad \dot{\vec{v}}_A = \dot{\vec{v}}_O' \quad \text{odnosno} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_O'$$

Ubrzanja svih tačaka tela pri translaciji su takodje medjusobno jednaka.

Dakle, translaciono kretanje krutog tela može se opisati primenom zakona kretanja materijalne tačke.

## 2.2. Rotaciono kretanje krutog tela oko stalne ose.

Rotaciono kretanje tela je ono kod koga sve tačke tela opisuju kružnice čiji se centri nalaze na pravoj koja se zove osa rotacije. Na priloženoj slici osa rotacije je obeležena sa  $OO'$ . Pri tome će svaka tačka tela imati svoju trajektoriju, brzinu i ubrzanje ( $s=r\varphi$ ,  $v=s/t$ , dakle,  $v$  je različito za svako  $r$ ,



Slika 2.2. Kinematičke karakteristike rotacije

a prema tome i ubrzanje). Zbog toga ove veličine, onako kako smo ih definisali za materijalnu tačku i translaciono kretanje ne mogu da posluže za opisivanje kretanja tela u celini odnosno njegove rotacije.

Medjutim, zajedničko za sve delove tela jeste činjenica da radijus vektori svih tačaka tela za isti vremenski interval zarotiraju za isti ugao. Ta promena ugla  $\Delta\varphi$  u toku rotacije za vremenski interval  $\Delta t$ , naziva se ugaoni pomeraj i karakteriše kretanje tela u celini, kako je prikazano na slici 2.2. Ugaoni pomeraj se, dakle, može uzeti za opisivanje rotacije i ima isti smisao kao predjeni put kod translacionog kretanja.

Za opisivanje rotacije potrebno je još odrediti položaj ose rotacije i smer rotacije tela. Ovo se može učiniti definisanjem ugaonog pomeraja kao vektora. Njegov intenzitet je funkcija vremena,  $\Delta\varphi=\varphi(t)$ , pravac mu je duž ose rotacije, a smer se određuje pravilom desnog zavrtnja (takozvani pozitivni smer). Ako

odgovarajući ort vektora ose rotacije označimo sa  $\vec{\omega}_o$ , tada će biti:

$$\Delta\vec{\varphi} = \Delta\varphi \cdot \vec{\omega}_o \quad (2.2)$$

Na osnovu vektorske analize ugaoni pomeraj se može smatrati vektorom (ponašaće se tako samo u slučaju beskonačno malih pomeranja, pa je on u stvari aksijalni ili pseudo (nepravi) vektor (vezan za rotaciju, nema definisanu napadnu tačku). On se u suštini razlikuje od polarnih (pravih) vektora kakvi su  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  i  $\vec{a}$  kod kojih nema ograničenja na vektorske operacije. Napomenimo da je vektorski proizvod dva aksijalna ili pseudo vektora aksijalni, a ukršteni proizvod aksijalnog i polarnog vektora je polarni vektor.

### 2.2.1 Ugaona brzina.

Količnik priraštaja ugaonog pomeraja i njemu odgovarajućeg vremenskog intervala naziva se srednja ugaona brzina za posmatrani interval vremena:

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Granična vrednost ovog odnosa, kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , naziva se ugaona brzina rotacije tela u datom trenutku  $t$ , odnosno:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\phi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \quad (2.4)$$

Dakle, ugaona brzina je prvi izvod ugaonog pomeraja po vremenu. To je aksijalni vektor intenziteta  $\omega = d\phi/dt$ , pravca duž ose rotacije i smeru određenog pravilom desnog zavrtnja:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\omega}_0$$

gde je  $\vec{\omega}_0$  ort ose rotacije. Kada je  $\omega = \text{const}$ , govorimo o jednakom rotacionom kretanju. Kod njega je karakterističan period rotacije, koji predstavlja vreme jednog punog obrta tela, odnosno rotacije za  $2\pi$  ili  $360^\circ$ . Po definiciji je:

$$\omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{odnosno} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Recipročna vrednost perioda je broj obrtaja u jedinici vremena i naziva se frekvencija:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{odnosno} \quad \omega = 2\pi\nu$$

Veličina  $\omega$  predstavlja broj obrtaja u vremenskom intervalu od  $2\pi$  (6,28) sekundi.

### 2.2.2. Ugaono ubrzanje.

Ako ugaona brzina nije konstantna, tada se količnik promene vektora ugaone brzine nastale u intervalu vremena  $\Delta t$ , i tog vremenskog intervala naziva srednje ugaono ubrzanje:

$$\langle \vec{\alpha} \rangle = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Granična vrednost ovog odnosa, kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , naziva se trenutno ugaono ubrzanje:

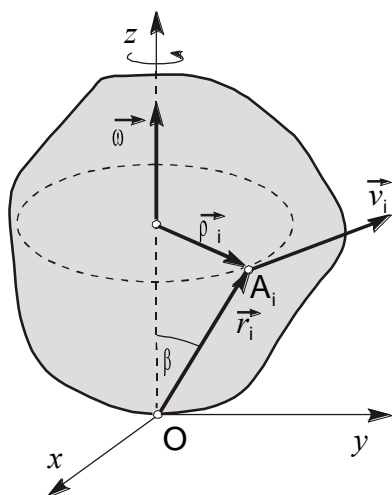
$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} \vec{\omega}_0 \quad (2.6)$$

Pri tome se podrazumeva da je  $\vec{\omega}_0 = \text{const}$ . Dakle, ugaono ubrzanje je prvi izvod ugaone brzine po vremenu i to je kinematička karakteristika celog krutog tela, važi za svaku njegovu tačku. I to je aksijalni vektor usmeren duž ose rotacije, smer mu zavisi od predznaka ubrzanja.

Dimenzija ugaone brzine je prema definiciji  $T^{-1}$ , a ugaonog ubrzanja je  $T^{-2}$ .

### 2.3. Relacija medju vektorima linijske i ugaone brzine.

Veličine  $\phi = \phi(t)$ ,  $\omega = \omega(t)$  i  $\alpha = \alpha(t)$  određuju rotaciono kretanje celokupnog krutog tela. Medjutim, svaka materijalna tačka ima svoje linijske elemente kretanja: predjeni put  $s_i$ , brzinu  $\vec{v}_i$  i ubrzanje  $\vec{a}_i$ . Kako se odnose na isto telo medju linijskim i rotacionim veličinama mora postojati određena relacija-veza.



Slika 2.3. Odnos linijske i ugaone brzine

Kada smo govorili o jednakom kružnom kretanju, na kraju smo pokazali da se konstanta  $\omega$  može izraziti kao  $\omega=v/r$ . Videli smo zatim da je  $\omega$  ugaona brzina. Sa priložene slike 2.3., iz odnosa  $\vec{v}_i$ ,  $\vec{\rho}_i$  i  $\vec{\omega}$ , koji su uzajamno normalni i usmereni po desnoj orijentaciji, na osnovu svojstava analogije sa vektorskim proizvodom možemo pisati da je:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (2.7)$$

Intenzitet ovog vektorskog proizvoda odnosno brzine  $\vec{v}_i$ , dat je sledećim izrazom:

$$v_i = |\vec{\omega} \times \vec{r}_i| = \omega \cdot r_i \cdot \sin\beta = \omega \cdot \rho_i$$

Iz ovih relacija proizilazi da se poznavanjem vektora  $\vec{\omega}$  i  $\vec{r}_i$ , odnosno  $\vec{\rho}_i$ , može odrediti linijska brzina,  $\vec{v}_i$ , svake tačke tela. Koristeći gornji vektorski proizvod mogu se odrediti komponente vektora  $\vec{v}_i$  na koordinatne ose. Ako je  $\vec{r}_i$  dato sa  $x_i$ ,  $y_i$  i  $z_i$ , a  $\vec{\omega}$  sa  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  i  $\omega_z$  i ako su ortovi osa  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$ , tada je na osnovu elementarne vektorske algebre:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Projekcije brzine na koordinatne ose dobijaju se razvijanjem ove determinante, što daje:

$$\begin{aligned} v_{xi} &= \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ v_{yi} &= \omega_z x_i - \omega_x z_i \\ v_{zi} &= \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ove jednačine se nazivaju Ojler-ove (Euler) po naučniku koji ih je prvi izveo. U slučaju sa slike, što je čest praktični primer, kada je  $\omega_x = \omega_y = 0$  i  $\omega_z = \omega$ , ove jednačine dobijaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} v_{xi} &= -\omega y_i \\ v_{yi} &= \omega x_i \\ v_{zi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

U slučaju pokretnog koordinatnog sistema, koji se kreće zajedno sa telom koje rotira, prvi izvodi ortova koordinatnih osa po vremenu biće na osnovu vektorske jednačine (2.7) ( $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{i} \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{j} \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= \vec{\omega} \times \vec{k} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ovaj skup predstavlja takozvane Poason-ove (Poisson) jednačine i biće korišćen u daljem izlaganju.

#### 2.4. Relacija medju vektorima linijskog i ugaonog ubrzanja.

Linijsko ubrzanje se dobija, kao što znamo, diferenciranjem brzine po vremenu, te možemo pisati:

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{d\omega}{dt} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad (2.12)$$

odnosno

$$\vec{a}_i = \vec{\alpha} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times \vec{v}_i \quad (2.13)$$

Prvi član, koji ćemo označiti sa  $\vec{a}_{\tau i} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_i$ , je normalan na ravan koju obrazuju  $\vec{\omega}$  i  $\vec{r}_i$  ( $\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$ ), pa je kolinearan sa brzinom  $\vec{v}_i$ , odnosno sa ortom tangente  $\vec{\tau}_o$  u tački  $A_i$  na krugu poluprečnika  $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{r}_i)$ . Taj krug je putanja tačke  $A_i$  pri rotaciji. Intenzitet vektora  $\vec{a}_{\tau i}$  je:

$$a_{\tau i} = \alpha \cdot r_i \cdot \sin(\vec{\alpha}, \vec{r}_i) = \alpha \cdot \rho_i = \frac{d\omega}{dt} \rho_i \quad (2.14)$$

Ovo je tangenciono ubrzanje i odgovorno je za promenu ugaone brzine po intenzitetu ( $\alpha = d\omega/dt$ ).

Drugi član u izrazu za linijsko ubrzanje je:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_i = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}_z + \vec{\rho}_i)) = -\omega^2 \vec{\rho}_i = \vec{a}_{ni} \quad (2.15)$$

imajući u vidu da je vektorski proizvod  $\vec{\omega}$  i  $\vec{r}_z$  nula, obzirom da su kolinearni. Rezultujući vektor izraza je usmeren duž radijusa krivine u tački  $A_i$ , od nje, i predstavlja normalnu komponentu ubrzanja odgovornu za promenu pravca vektora brzine  $\vec{v}_i$ . Njegov intenzitet je, s obzirom da je  $\vec{\omega} \perp \vec{v}_i$ :

$$a_{ni} = \omega \cdot v_i \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_i) = \omega \cdot v_i \quad (2.16)$$

Pošto se tačka  $A_i$  kreće po krugu poluprečnika  $\rho_i$ , to se (preko veze  $v_i = \omega \rho_i$ ) ovaj intenzitet može izraziti i kao:

$$a_{ni} = \omega \rho_i = \frac{v^2}{\rho_i} \quad (2.17)$$

što smo već sreli kod jednakog kružnog kretanja i nazvali ga centripetalnim ubrzanjem.

**PRIMERI.** Kako izgleda zakon puta kod ravnomernog rotacionog kretanja tela a kako kod jednako ubrzanog?

U prvom slučaju je:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \text{const}$$

odnosno  $d\varphi = \omega dt$ , što jednostavnom integracijom daje:

$$\varphi = \omega t + C_1 = \omega t + \varphi_0 \quad (2.18)$$

gde je  $\varphi_0$  početni ugao, u trenutku  $t=0$ .

Kod jednako ubrzanog rotacionog kretanja postoji ubrzanje  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{const}$$

Obzirom da je  $\alpha$  konstantnog intenziteta i kolinearno sa  $\omega$ , integracijom izraza  $d\omega=\alpha dt$  dobijamo ugaonu brzinu, a još jednom integracijom ugao rotacije:

$$\omega = \alpha t + C_1 = \alpha t + \omega_0 \quad (2.19)$$

$$\varphi = \frac{\alpha t^2}{2} + \omega_0 t + C_2 = \frac{\alpha t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0 \quad (2.20)$$

pri čemu je  $\omega_0$  početna ugaona brzina, u trenutku  $t=0$ .

Očigledna je analogija oblika ovih izraza sa izrazima za put, brzinu i ubrzanje kod linijskog kretanja.

### III

## DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE

Deo mehanike koji se bavi izučavanjem kretanja tela zajedno sa njegovim uzrocima naziva se DINAMIKA.

Uzrok promene stanja kretanja ili deformacije tela je njihovo medjusobno dejstvo ili interakcija. Mehaničke interakcije tela dešavaju se ili neposrednim dodiranjem tela (na primer lokomotiva vuče vagon) ili posredstvom posebne materijalne sredine koja se naziva fizičko polje (Sunce privlači planete posredstvom gravitacionog polja).

### 3.1. Prvi Njutnov zakon. Inercijalni sistemi.

Osnovne stavove dinamike formulisao je Njutn (I. Newton, 1687 godine) u svojim "Matematičkim principima prirodne filozofije", (Philosophie naturalis principia mathematica), u obliku tri osnovna zakona kretanja.

**Prvi Njutnov zakon** ili zakon inercije glasi: *Svako telo zadržava stanje mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja sve dok ga druga tela svojim dejstvom ne prinude da promeni to stanje.*

Ovde se telo posmatra kao materijalna tačka, tj. iz razmatranja se isključuje obrtno kretanje. Medjutim, videćemo da isti princip važi i za rotaciju tela - da telo bez spoljnjih uticaja teži da zadrži ravnomerno obrtno kretanje, ili mirovanje.

Dakle, svako drugo kretanje, sem ravnomernog, je prinudno kretanje, pod dejstvom drugih tela, u interakciji sa njima.

Prvi Njutnov zakon nemoguće je eksperimentalno proveriti na Zemlji pošto je nemoguće dovesti telo u uslove da na njih ne deluju druga tela (postojanje gravitacije, otpora vazduha, trenja...). Ipak uopštavanjem nekih činjenica može se uveriti u ispravnost zakona (uz ograničenje posmatranja tela po određenom pravcu ili ekvipotencijalnoj površini). Na posredan način ispravnost I Njutnovog zakona pokazuje se slaganjem svih zaključaka koji se iz njega dobijaju sa eksperimentalnim rezultatima.

Kada se govori o mirovanju ili ravnomernom kretanju postavlja se pitanje: u odnosu na koji referentni (koordinatni) sistem se to odnosi? Sam Njutn je podrazumevao da se tu radi o nekom apsolutnom kretanju u apsolutnom prostoru: "Apsolutni prostor je po svojoj suštini nezavisan od bilo čega spoljašnjeg i ostaje uvek isti i nepokretan". Ovo je metafizičko gledište i ne odgovara stvarnosti u kojoj se svako telo nalazi i kreće. Već smo ranije istakli da je kretanje moguće definisati samo relativno, u odnosu na druga tela.

Posmatranja pokazuju da I Njutnov zakon ne važi u odnosu na svaki referentni sistem. Razmotrimo nekoliko primera. Neka je za referentni sistem izabran vagon ili autobus koji se kreće ravnomerno pravolinijski. Ako se zanemari tresenje i klopanje u njemu će važiti zakon inercije. Tela koja miruju ostaju u miru, ona koja se kreću nastavljaju da se kreću uniformno. Medjutim, čim vagon počne da zaokreće, kočii ili se ubrzava, zakon se narušava, tela koja su do tada mirovala počinju da se kreću ili padaju bez vidnog delovanja drugih okolnih tela na njih.

Uzmimo zatim za primer Zemljinu kuglu kao referentni sistem. Zakon inercije ovde važi mnogo tačnije, ali i ovde neka pažljiva posmatranja fizičkih procesa (oscilovanje klatna, tok morskih i vazdušnih struja) otkrivaju odstupanja od I Njutnovog zakona, odnosno onog što iz njega sleduje.

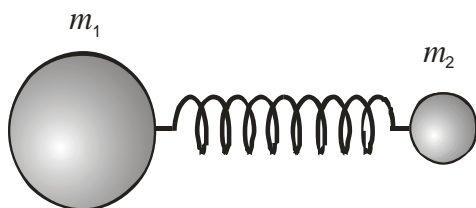
Ako se, medjutim, referentni sistem veže za Sunce, sa osama usmerenim prema određenim zvezdama, u takvom sistemu zakon inercije važi praktično sasvim tačno.

Referentni sistem u odnosu na koji važi I Njutnov zakon naziva se INERCIJALNI SISTEM.

Kako je rečeno, heliocentrični sistem praktično predstavlja inercijalni sistem. Takođe i svaki drugi sistem koji se u odnosu na njega kreće ravnomerno i pravolinijski biće inercijalan. Svaki sistem koji u odnosu na neki od inercijalnih sistema ima ubrzanje, sam neće biti inercijalan, to su neinercijalni sistemi. Očigledno da će samo kretanje zavisiti od toga iz kog sistema se posmatra, o čemu ćemo detaljnije govoriti kasnije.

### 3.2. Drugi Njutnov zakon. Jedinice sile i mase.

Ako jedno telo deluje na drugo tada se ovo prvo ponaša kao uzrok promene stanja kretanja drugog tela. Kažemo da ta dva tela medjusobno interaguju. Fizička veličina kojom se mere interakcije izmedju tela naziva se **SILA**. Ovaj fizički pojam nije pristupačan neposrednom posmatranju, već se prisustvo sile manifestuje preko posledica koje ona izaziva u interakciji, bilo izmedju različitih tela bilo izmedju fizičkog polja i tela.



Slika 3.1. Primer delovanja sile

Interakcija tela se manifestuje ili preko promene njihove brzine ili preko njihove deformacije, pa su to i načini da se sile upoređuju, odnosno mere (na primer, jedan način merenja sile je preko dinamometra - elastične opruge čija je deformacija proporcionalna sili).

Eksperimentalno je utvrđeno da dejstvo sile na dato telo zavisi od napadne tačke, intenziteta, pravca i smera sile. Znači, sila je vektorska veličina. Po prirodi sile mogu biti veoma različite: mehaničke, gravitacione, elektromagnetne i nuklearne sile.

**Drugi Njutnov zakon** se odnosi na interakcije tela i u formulaciji koju je sam Njutn dao glasi: **Promena stanja kretanja tela proporcionalna je sili koja na njega deluje i vrši se u pravcu u kome sila deluje.**

Promena stanja kretanja znači da telo menja stanje mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja, tj. da se menja njegova brzina, odnosno da telo dobija ubrzanje. Dakle, rezultat dejstva sile je ubrzanje tela. Znači sila  $F$  kojom neko telo deluje na posmatrano telo biće proporcionalna ubrzanju koje telo dobija:

$$F = k \tag{3.1}$$

gde je  $k$ -konstanta proporcionalnosti. Kako smo već istakli, sila je vektorska veličina i to kolinearna sa ubrzanjem kao svojom posledicom, pa je u stvari:

$$\vec{F} = k \cdot \vec{a} \tag{3.2}$$

Posmatrajmo dva tela različitih dimenzija, od istog materijala, povezana elastičnom oprugom, kao na slici. Posle sabijanja opruge i oslobadjanja tela konstatovaće se da su tela dobila različita ubrzanja. Dakle, promena kretanja (pri dejstvu iste sile) zavisi i od nekih svojstvenih osobina tela. Ta osobina tela karakteriše se posebnom fizičkom veličinom-masom ( $m$ ).

Merenjem stečenih ubrzanja i masa tela, može se utvrditi da važi sledeća proporcionalnost:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left| \frac{a_2}{a_1} \right|$$

Dakle, sila je proporcionalna ubrzanju, ali i masi i to tako (pokazuju eksperimenti) da je:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{3.3}$$

što je matematička formulacija II Njutnovog zakona. Ovo je vektorska jednačina, kojoj obzirom na definicije brzine i ubrzanja odgovaraju sledeće tri skalarne jednačine:

$$\begin{aligned} ma_x &= m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x \\ ma_y &= m \frac{dv_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y \\ ma_z &= m \frac{dv_z}{dt} = m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z \end{aligned} \quad (3.4)$$

Masa tela zavisi od veličine tela i od njihove supstance. Njutn je smatrao da je masa mera količine materije u telu. Međutim pokazalo se da je ovo mišljenje metafizičko, odnosno nekorektno. Razvojem nauke je pokazano da je materija šira kategorija od mase, obuhvata recimo i energiju.

Masa se može definisati, kao i svaka druga fizička veličina, na osnovu skupa objektivnih zakonitosti u odnosu te veličine sa drugim fizičkim veličinama. U slučaju mase, jedna od tih zakonitosti data je upravo II Njutnovim zakonom u smislu pojma inernosti tela. Inernost tela podrazumeva postojanje karakteristike tela - mase - koja se ispoljava činjenicom da različita tela pod dejstvom iste sile dobijaju različita ubrzanja. Gornji izraz  $m_1/m_2 = |a_1/a_2|$  omogućuje da se mase različitih tela kvantitativno uporede. Masa izmerena na taj način naziva se inerciona masa pošto se meri na osnovu inercionih pojava.

Iz svega se može zaključiti sledeće: Ubrzanje  $\vec{a}$  koje telo dobije upravo je proporcionalno sili  $\vec{F}$ , a obrnuto proporcionalno masi tela:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (3.5)$$

Ovaj izraz, odnosno vektorska jednačina (3.3), ujedno predstavlja osnovnu jednačinu dinamike.

Izraz (3.5) može poslužiti i kao definiciona formula za definisanje dimenzija i jedinica sile. Rekli smo već ranije da je masa osnovna fizička veličina i da je u međunarodnom SI sistemu jedinica mase 1 kg. U istom sistemu, jedinica za ubrzanje je 1 m/s<sup>2</sup>. Jedinica za silu mora tako da se izabere da pod njenim dejstvom telo mase 1 kg dobija ubrzanje od 1 m/s<sup>2</sup>. Ta jedinica se naziva 1 Njutn odnosno 1 N. Dakle dimenzije sile su MLT<sup>-2</sup>, a jedinica je 1 N = 1 kgm/s<sup>2</sup>.

### 3.3. Impuls (ili količina kretanja).

Kao osnovnu karakteristiku mehaničkog kretanja tela Njutn je uveo novu fizičku veličinu koja je nazvana impuls ili količina kretanja, a koja je definisana kao proizvod mase i brzine tela:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.6)$$

Impuls je vektor kolinearan sa vektorom brzine tela, a intenzitet mu je jednak proizvodu mase i intenziteta brzine. U opštem slučaju, u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu ovaj vektor ima tri komponente:

$$p_x = mv_x, \quad p_y = mv_y, \quad i \quad p_z = mv_z$$

Ako je  $m = \text{const} > 0$ , što se u klasičnoj mehanici uvek pretpostavlja, tada je promena vektora  $\vec{p}$  prouzrokovana samo promenom vektora brzine  $\vec{v}$ . Promena  $\vec{p}$  ima značajnu ulogu pri određivanju kretanja tela pod dejstvom sile.

Dimenzije i jedinice impulsa mogu se izvesti iz dimenzija mase i brzine, a jedinice nemaju posebne nazive ni u jednom sistemu jedinica.

Na osnovu definicije impulsa II Njutnov zakon se može iskazati na sledeći način: -Promena impulsa nastala u malom intervalu vremena podeljena sa tim intervalom vremena srazmerna je sili koja dejstvuje na telo i dešava se u pravcu i smeru dejstva te sile. Matematički se to može izraziti na sledeći način:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \vec{F} \quad (3.7)$$

Ova jednačina predstavlja početak diferencijalnog računa, što je bio važan činilac u razvoju fizike i matematike toga doba.

Uvodjenjem elementarnog intervala vremena, pri čemu je sila u tom intervalu približno konstantna, jednačina se može pisati u sledećem obliku:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Ako je masa tela konstantna, tada ova jednačina daje ranije navedeni izraz za II Njutnov zakon:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \quad (3.8)$$

što je diferencijalna jednačina kretanja tela. Ovde je  $\vec{F}$  rezultanta svih interakcija tela mase  $m$  sa drugim telima, a  $\vec{a}$  ubrzanje tela u odnosu na dati inercijalni sistem.

Važi i obrnuto, ako je poznato  $\vec{F}$ , promena impulsa se može odrediti integracijom:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt, \text{ odnosno } \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad (3.9)$$

Vratimo se za trenutak na konačne priraštaje impulsa i vremena i njihove odnose:

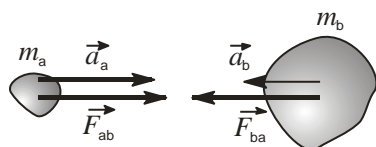
$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \langle \vec{F} \rangle \text{ odakle je } \langle \vec{F} \rangle \Delta t = \Delta \vec{p} \quad (3.10)$$

Veličina  $\langle \vec{F} \rangle \Delta t$ , proizvod srednje vrednosti sile u intervalu vremena  $\Delta t$ , za koji se posmatra njeno dejstvo, naziva se "impuls sile". To je vektorska veličina srazmerna vektorskoj promeni impulsa u određenom vremenskom intervalu.

### 3.4. Treći Njutnov zakon: Zakon akcije i reakcije.

O sili smo govorili kao o uzroku promene stanja kretanja tela, ali nismo vodili računa o izvorima sile, odnosno o drugim telima koja izazivaju tu promenu. Sila u opštem slučaju karakteriše međusobnu interakciju dva tela i njena prava uloga u interakciji je određena **III Njutnovim zakonom**, koji glasi: *Uzajamna dejstva dvaju tela su međusobno jednaka i suprotno usmerena, odnosno sila akcije je po intenzitetu jednaka, a po smeru suprotna sili reakcije.*

I ovaj zakon potiče iz uopštavanja iskustvenih činjenica. Na primer, posmatrajmo uzajamno dejstvo dva tela masa  $m_a$  i  $m_b$  (Zemlja i kamen, Zemlja i mesec, dva tela vezana napregnutom oprugom), kao na priloženoj slici. Sile kojima jedno telo deluje na drugo jednake po intenzitetu, a suprotne po smeru:



Slika 3.2. Akcija i reakcija

$$\vec{F}_{ba} = -\vec{F}_{ab} \quad (3.11)$$

Jedna od ovih sila (recimo  $\vec{F}_{ab}$ ) se naziva akcija, a druga reakcija. Pod dejstvom ovih sila tela će promeniti stanje kretanja (dinamičko dejstvo sila) ili izvršiti deformaciju oblika (statičko dejstvo).

III Njutnov zakon ima izvesna ograničenja. Ne može se primeniti na sile koje zavise od brzine kretanja tela, kakve su Lorenc-ova (Lorentz) sila i inercijalne sile. Takodje se u njemu ne vodi računa o konačnosti brzine prostiranja svakog dejstva (što u Njutnovo vreme nije ni bilo poznato).

Po drugom Njutnovom zakonu, tela iz prethodnog primera dobijaju odgovarajuća ubrzanja:  $a_b = F_{ba}/m_b$  i  $a_a = F_{ab}/m_a$ . Na osnovu jednakosti intenziteta sila,  $m_b a_b = m_a a_a$ , je  $a_b = (m_a/m_b) a_a$  odnosno  $a_a = (m_b/m_a) a_b$ . Dakle, oba tela menjaju istovremeno stanja kretanja, dobijaju ubrzanja, koja su obrnuto proporcionalna njihovim masama.

Treći Njutnov zakon može se ilustrovati i u slučaju statičkog medjudejstva tela, odnosno kada nema kretanja tela. Zamislimo teg na masivnom postolju. Teg na postolje deluje silom svoje težine  $\vec{Q}$ , sila akcije, a postolje na njega silom otpora ili reakcije  $\vec{R}$ . Pri tome je vektorski zbir ovih sila jednak nuli, na osnovu III Njutnovog zakona,  $\vec{R} + \vec{Q} = 0$ . Ovaj izraz medjutim ne predstavlja ravnotežni uslov dejstva dve jednake sile na jedno telo, jer ove sile dejstvuju na različita tela (teg i postolje).

Dakle, sva tri Njutnova zakona predstavljaju jednu celinu, koja se može sažeti na sledeći način: Svako ubrzanje tela uslovljeno je nekom silom. Svaka sila je mera dejstva jednih tela na druga i sve sile imaju karakter uzajamnog dejstva. Ovi zakoni uopštavaju sve iskustvene činjenice i čine osnovu klasične mehanike, koja se često naziva i Njutnova mehanika.

### 3.5. Zakon održanja impulsa. Primeri.

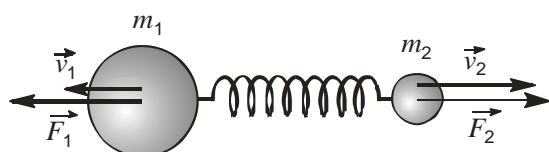
Videli smo da je impuls (ili količina kretanja) proizvod mase čestice i njene brzine:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.12)$$

Prvi Njutnov zakon izražava svojstvo tela da u odsustvu sila imaju konstantnu vrednost brzine, odnosno, kako je  $m = \text{const.}$ , konstantnu vrednost impulsa:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} = \text{const} \quad (3.13)$$

Ovo svojstvo je specijalan slučaj jednog opštijeg fizičkog zakona - zakona o održanju impulsa.



Slika 3.3. Zakon održanja impulsa

Posmatrajmo dva tela vezana elastičnom oprugom koja je u početku posmatranja sabijena, kao na slici 3.3. Pri oslobadjanju tela se razilaze. Na osnovu III Njutnovog zakona razilaženje je izazvano silama akcije i reakcije koje su medjusobno jednake, ali su suprotnog smera,  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , odnosno:

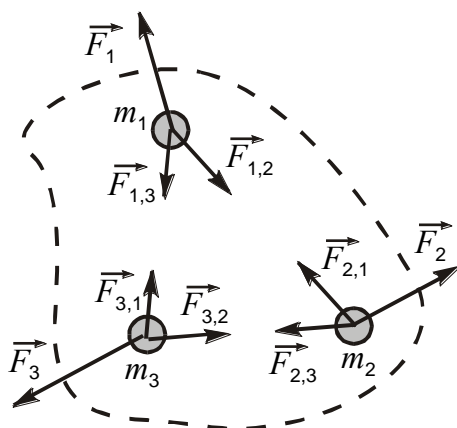
$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$

Kako su mase tela konstantne, možemo pisati:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)}{dt} = 0$$

Ovo je tačno kada je izraz u zagradi konstantan, jer je izvod od konstante nula, pa se može pisati:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const} \quad (3.14)$$



Slika 3.4. Sistem više tela

Dakle, u slučaju kada na sistem ne deluju nikakve spoljašnje sile, odnosno kada je sistem izolovan, impuls sistema od dva tela ne može se promeniti samo pod dejstvom sila njihove uzajamne interakcije.

Ovaj zaključak može se uopštiti na sistem od više tela. Zamislimo sistem od n-čestica koje u opštem slučaju interaguju i medju sobom i sa telima van ovog sistema. Pri tome ćemo sile podeliti na unutrašnje (sa dva) i spoljašnje (sa jednim indeksom), kao na slici 3.4. Prema II Njutnovom zakonu, da bi se opisalo stanje kretanja sistema, za svaku česticu treba napisati odgovarajuću diferencijalnu jednačinu kretanja, uključujući sve sile koje na nju deluju. Na taj način dobićemo sistem od n-jednačina, sledećeg oblika:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \dots + \vec{F}_{1,n} + \vec{F}_1$$

$$\frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \dots + \vec{F}_{2,n} + \vec{F}_2$$

$$\frac{d(m_3\vec{v}_3)}{dt} = \frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \dots + \vec{F}_{3,n} + \vec{F}_3$$

.....

$$\frac{d(m_n\vec{v}_n)}{dt} = \frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{F}_{n,1} + \vec{F}_{n,2} + \dots + \vec{F}_{n,n-1} + \vec{F}_n$$

Sabiranjem ovih jednačina, imajući pri tome u vidu III Njutnov zakon na osnovu koga se odgovarajući parovi unutrašnjih sila izmedju pojedinih čestica poništavaju kao sile akcije i reakcije ( $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$ ), dobijamo:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots + m_n\vec{v}_n)}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Ukoliko je zbir spoljašnjih sila sa desne strane jednačine jednak nuli, za takav sistem kažemo da je zatvoren, odnosno izolovan. Kada, međutim, levu stranu ove jednačine izjednačimo sa nulom proizilazi da je izraz u zagradi konstantan, odnosno da je:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots + m_n \vec{v}_n = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{p} = \text{const} \quad (3.15)$$

Dakle, za zatvoren odnosno izolovan sistem čestica ukupan impuls je konstantna veličina. Ova tvrdnja predstavlja zakon o održanju (očuvanju) impulsa. Ovo je jedan od osnovnih zakona fizike.

Posledice ovog zakona su sledeće:

- Impuls zatvorenog sistema čestica u trenutku  $t$  isti je kao na početku posmatranja u trenutku  $t_0$ ;
- Samo na osnovu ovog zakona se ne mogu odrediti brzine čestica ni za najprostiji sistem od dve čestice (jedna jednačina a dve nepoznate veličine);
- Impuls pojedinih čestica može se menjati sa vremenom, ali ne i impuls sistema u celini;
- Ovaj zakon dozvoljava isključivanje unutrašnjih sila pri razmatranju kretanja sistema, čime se pojednostavljuje praktično rešavanje dinamike sistema.

Jednačina (3.15), koja predstavlja zakon o održanju impulsa, bila je napisana u vektorskom obliku. Njoj, kao i jednačini koja joj je prethodila, odgovaraju po tri skalarnе jednačine:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{xi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{yi} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{zi} = 0$$

odnosno:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{yi} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_{zi} = 0$$

Dakle, ako je zbir komponentata spoljašnjih sila u nekom pravcu jednak nuli, za taj pravac važi zakon o održanju impulsa. Na primer, u blizini Zemljine površine na svako telo deluje sila Zemljine teže u vertikalnom pravcu, ali u horizontalnoj ravni impuls zatvorenog sistema će biti konstantan. Ova činjenica često olakšava razmatranje kretanja tela.

#### PRIMERI:

- Zakon o održanju impulsa se može primeniti za procenu uzmarka oružja (mase  $m_o$ ) pri ispaljivanju zrna ( $m_z$ ). Ako se zna masa i brzina,  $v_z$ , ispaljenog zrna (meri se balističkim klatnom, o čemu ćemo govoriti kasnije uz zakon o održanju energije), impuls oružja ili uzmak nakon ispaljivanja zrna se dobija iz zakona o održanju impulsa sistema zrno-oružje:  $p_o = -m_z v_z$  (ukoliko je oružje pre opaljivanja mirovalo).
- Primena zakona održanja u horizontalnoj ravni objašnjava zašto se javlja uzmak kolica na kojima osoba stoji, pri pokušaju da sidje sa njih. Silazak stvara impuls osobe usmeren na jednu stranu, što izaziva isti impuls kolica, ali usmeren na suprotnu stranu.
- Istovetan je slučaj uzmarka čamca u kome se kreće osoba. Pomeranje osobe na jednu stranu izaziva uzmak čamca na drugu stranu, što često rezultuje neželjenim kupanjem.
- Nuklearni raspad jezgara na dva ili više delova je primer složenijeg sistema u kome važi zakon o održanju impulsa.
- Kretanje raketa se zasniva na ovom zakonu, impuls goriva pri isticanju proizvodi suprotan impuls koji pokreće raketu. Ovaj slučaj je nešto komplikovaniji za opisivanje zbog istovremene promene i mase rakete izazvane isticanjem goriva.
- Svakako da ovaj zakon važi i u slučaju kada je ukupan impuls sistema različit od nule. Tada se promene impulsa pojedinih delova sistema sabiraju sa impulsom celog sistema. Tako se pri eksploziji projektila nastali delovi kreću na sve strane ali i dalje sa ukupnim impulsom jednakim impulsu u trenutku eksplozije.

### 3.6. Zakon nezavisnosti dejstva sila. Slobodno i vezano kretanje.

Njutnovi zakoni mehanike određuju odnose između kinematičkih (ubrzanje, brzina) i dinamičkih veličina (rezultujuća sila). Drugim rečima, način kretanja tela zavisi od prirode sila koje na njega deluju. O tome ćemo ovde govoriti.

**Zakon o nezavisnosti dejstva sila** nastao je na osnovu eksperimentalnog proučavanja kretanja tela i glasi: *"Dejstvo svake sile na uočeno telo ne zavisi od toga da li se ono nalazi u miru ili u kretanju (izuzimaju se Lorenc-ove sile), niti od broja sila koje na telo dejstvuju"*.

Telo se ponaša tako kao da na njega deluje samo jedna sila koja je rezultanta tih sila. Rezultanta je vektorski zbir svih sila koje deluju na jedno telo. Prema tome II Njutnov zakon glasi:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_R \quad (3.16)$$

**Slobodno i prinudno (vezano) kretanje tela** se razlikuju na osnovu eventualnih prostornih ograničenja kretanja. Telo koje pod dejstvom sila može da se kreće u proizvoljnom pravcu i smeru vrši slobodno kretanje. Ukoliko na telo pored aktivnih sila,  $\vec{F}$ , deluju dopunski uslovi koji ograničavaju njegovo kretanje, ono vrši prinudno ili vezano kretanje (kretanje tela na površini stola, klatna obešenog o neistegljivu nit, itd.). Ovi dopunski uslovi se opisuju pomoću tzv. sila reakcije veze,  $\vec{R}$ . Ove sile se takodje moraju uključiti u diferencijalnu jednačinu kretanja, pa je:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{k=1}^m \vec{R}_k \quad (3.17)$$

### 3.7. Odnos kinematičkih i dinamičkih veličina. Diferencijalna jednačina kretanja.

#### Zadaci dinamike.

Odnosi kinematičkih i dinamičkih veličina kretanja dati su II Njutnovim zakonom na već poznat način:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (3.18)$$

Ovo je diferencijalna jednačina kretanja drugog reda u vektorskom obliku. Ova jednačina je polazna tačka za rešavanje svakog dinamičkog problema, bilo da se radi o određivanju jednačine kretanja ili trajektorije uz poznavanje oblika sila ili određivanje oblika sile ako je poznata jednačina kretanja  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

Praktično se to radi preko skalarnih jednačina. Gornjoj vektorskoj jednačini odgovaraju tri skalarnе jednačine:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_x}{m}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{F_y}{m} \quad \text{i} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{F_z}{m} \quad (3.19)$$

Ovo je sistem diferencijalnih jednačina kretanja drugog reda, čije rešavanje predstavlja osnovni zadatak dinamike.

Integracijom jednačina (3.19) mogu se dobiti tri funkcije  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$  i  $z=z(t)$  koje predstavljaju konačne jednačine kretanja tela. One omogućuju da se odredi položaj tela i njegova brzina za svaki trenutak vremena  $t > t_0$ , ako su poznati  $m$ ,  $\vec{F}$  i tzv. početni ili granični uslovi ( $\vec{r}_0$ , i  $\vec{v}_0$  u trenutku  $t_0$ ), u odnosu na dati inercijalni koordinatni sistem. Integracijom (dvostrukom) se u stvari određuju familije krivih kao mogućih rešenja, a na osnovu početnih uslova se određuju integracione

konstante, odnosno određuju konkretne trajektorije za dati slučaj. Pri tome nije potrebno poznavati prirodu sila (gravitaciona, elektromagnetna, itd.), već samo njenu zavisnost od  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  i  $t$ :

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (3.20)$$

Sa druge strane, ako su poznati zakoni kretanja, odnosno konačne jednačine kretanja  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , dvostrukim diferenciranjem mogu se odrediti sile:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (3.21)$$

što je po pravilu jednostavnije u odnosu na prethodni postupak.

Problemi određivanja zakona puta na osnovu poznavanja sila ili sila na osnovu zakona puta predstavljaju osnovne zadatke dinamike. U opštem slučaju ovi problemi mogu biti veoma složeni. Ovde ćemo se zadržati na rešavanju dinamičkih problema za neke jednostavnije slučajeve kretanja.

### 3.8. Pravolinijsko kretanje materijalne tačke.

U ovom slučaju kretanje se vrši duž jedne prave linije i uvek se može odabrati da to bude jedna od koordinatnih osa, recimo neka je to x-osa. Pri tome  $\vec{F}$ ,  $\vec{i}$  i  $\vec{v}_0$  imaju isti smer, te je potrebno rešiti samo jednu diferencijalnu jednačinu oblika:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, \frac{dx}{dt}, t) \quad (3.22)$$

Navešćemo nekoliko primera pravolinijskog kretanja, za različite oblike sila.

#### 3.8.1. Kretanje pod dejstvom konstantne sile: $F = \text{const}$ .

Ovo je najjednostavniji primer kretanja i javlja se recimo pod dejstvom sile Zemljine teže, za mala rastojanja od površine Zemlje. Ako koordinatni sistem izaberemo tako da je x-osa usmerena vertikalno nadole, možemo pisati:

$$F_x = mg = \text{const}, \quad F_y = F_z = 0$$

Diferencijalna jednačina kretanja je oblika

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \quad \text{odnosno} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = g$$

Množenjem ovog izraza sa  $dt$  i jednostavnom integracijom dobijamo:

$$\frac{dx}{dt} = gt + C_1 = v$$

Još jednom integracijom zadnjeg izraza dobijamo:

$$x = \frac{1}{2} gt^2 + C_1 t + C_2 \quad (3.24)$$

Ovo je opšte rešenje diferencijalne jednačine kretanja. U zavisnosti od početnih uslova dobijaju se različite vrednosti za  $C_1$  i  $C_2$ , pa se prema tome mogu razlikovati tri slučaja: slobodan pad, hitac u vis i hitac na dole.

SLOBODAN PAD je slučaj kada telo pada iz mira, sa početnom brzinom jednakom nuli, pa je:

$$t=0: v_x(0)=0 \quad x(0)=x_0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0 \text{ i } C_2=x_0$$

odnosno

$$v_x = \frac{dx}{dt} = gt \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{2}gt^2 + x_0, \quad y=z=0$$

Odavde se eliminisanjem vremena može dobiti vrednost brzine koju telo stekne kada padne iz položaja  $x_0$  u položaj  $x$ , za rastojanje  $h=x-x_0$ :

$$v = \sqrt{2g(x - x_0)} = \sqrt{2gh} \quad (3.25)$$

HITAC U VIS je slučaj kada telo u početku kretanja ima početnu brzinu usmerenu vertikalno nagore (sa negativnim predznakom, jer je usmerena suprotno izabranom smeru x-ose):

$$t=0: v(0)=-v_0 \quad x(0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=-v_0 \text{ i } C_2=0$$

odnosno

$$v_x = \frac{dx}{dt} = gt - v_0, \quad x = \frac{1}{2}gt^2 - v_0t, \quad y=z=0$$

Iz ovih izraza se može dobiti vreme potrebno da telo dostigne maksimalnu visinu, kao i maksimalna visina. Telo se prvo kreće usporeno, zaustavi se i zatim slobodno pada. Vreme penjanja se dobija izjednačavanjem brzine odnosno prvog izvoda puta po vremenu sa nulom, a visina se dobija zamenom tog vremena u izraz za  $x$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = gt - v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\max} = \frac{v_0}{g}$$

$$x_{\max} = \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) = -\frac{v_0^2}{2g}$$

Znak minus označava kretanje nagore, odnosno nasuprot smeru x-ose.

HITAC NA DOLE je slučaj kada je početna brzina usmerena na dole, odnosno u smeru x-ose:

$$t=0: v_x(0)=v_0, \quad x(0)=x_0 \quad \Rightarrow \quad C_1=v_0, \quad C_2=x_0$$

odnosno

$$v_x=gt+v_0 \quad \text{i} \quad x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

Izraz za predjeni put ovde ima tri člana, prvi potiče od sile  $F=mg$  drugi od inercije (po I Njutnovom zakonu), a treći od izbora koordinatnog početka, odnosno početnih uslova.

### 3.8.2. Kretanje pod dejstvom sile koja zavisi od brzine: $F=F(v)$ .

Primer za ovo kretanje bi bilo kretanje tela kroz otpornu, viskoznu sredinu. Sila otpora sredine zavisi od brzine tela. Za male brzine je:

$$\vec{F} = -k\vec{v} \quad (3.26)$$

Primer ovakve sile zapažamo pri vožnji automobilom, ako pružimo ruku kroz prozor. Pri maloj brzini sila kojom vazduh deluje na ruku je mala, dok se sa povećanjem brzine i sila povećava; dakle proporcionalna je brzini kretanja.

Radi jednostavnosti, pretpostavimo da se kretanje vrši duž x-ose. Diferencijalna jednačina kretanja u ovom slučaju je:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k v_x \quad \text{odnosno} \quad \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} v_x = -\alpha v_x, \quad \alpha = \frac{k}{m}$$

Razdvajanjem promenljivih i integriranjem dobijamo:

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = -\alpha \int dt \quad \text{odnosno} \quad \ln(v_x) = -\alpha t + C_1$$

Iz početnih uslova imamo za  $t=0$ :  $v_x(0)=v_0$ ,  $C_1=\ln(v_0)$ , pa je brzina:

$$v_x = v_0 e^{-\alpha t} = v_0 \exp(-\alpha t) \quad (3.27)$$

Kako je  $\alpha > 0$ , to je  $e^{-\alpha t} < 1$  pa je  $v_x < v_0$ , odnosno kretanje je usporeno, brzina opada sa vremenom po eksponencijalnom zakonu. Daljom integracijom dobijamo:

$$x = v_0 \int e^{-\alpha t} dt = -\frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha t} + C_1$$

Iz početnih uslova dalje imamo: iz  $t=0$ ,  $x(0)=0 \Rightarrow C_2=v_0/\alpha$ , pa je:

$$x = \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \quad (3.28)$$

Kako  $t$  raste, drugi član u zagradi teži nuli, pa se za ukupan domet tela do zaustavljanja može uzeti:

$$x_d = \lim_{t \rightarrow \infty} x = \frac{v_0}{\alpha}$$

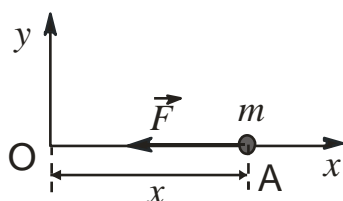
### 3.8.3. Linearno harmonijsko kretanje pod dejstvom sile $F=F(x)$ .

Primer za ovakvo kretanje bi bio kretanje pod dejstvom elastične sile opruge izvedene iz ravnotežnog položaja. Nastala sila je direktno srazmerna udaljenju tela od njegovog ravnotežnog položaja, odnosno

$$\vec{F} = \vec{F}(x) = -k'x\vec{i} \quad (3.29)$$

gde je  $k'=\text{const.}$ , znak (-) označava da je sila usmerena ka ravnotežnom položaju, odnosno nasuprot smeru porasta rastojanja  $x$ .

Diferencijalna jednačina kretanja u ovom slučaju će imati sledeći oblik:



Slika 3.5. Linearno harmonijsko kretanje

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k'x$$

odnosno:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.30)$$

gde je  $\omega_0^2 = k'/m$ . Ovo je obična (ili homogena nepotpuna) diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima i njeno rešavanje ne predstavlja veći matematički problem. Ovu jednačinu treba zapamtiti jer ćemo je kasnije često sretati.

Da bi smo rešili jednačinu (3.30) napišimo je u obliku koji sadrži samo prvi izvod:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega_0^2 x$$

Neposredna integracija je ovde nemoguća jer u jednačini figurišu tri promenljive veličine:  $v_x$ ,  $x$  i  $t$ . Zato ćemo jednu za trenutak eliminisati i to neka bude  $t$ , a nadjimo vezu  $x$  i  $v_x$ . U tu svrhu iskoristimo sledeću transformaciju:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} v_x$$

Tada gornja jednačina dobija sledeći oblik:

$$v_x dv_x = -\omega_0^2 x dx$$

Odavde jednostavnom integracijom dobijamo:

$$\frac{1}{2} v_x^2 = -\frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 + C_1$$

Ako je u trenutku  $t=0$ ,  $x=x_0$  i  $v_{x0}=0$ , za  $C_1$  se dobija:  $C_1 = \omega_0^2 x_0^2 / 2$ . U tom slučaju za brzinu možemo pisati sledeći izraz:

$$v_x = \sqrt{2C_1 - \omega_0^2 x^2} = \omega_0 \sqrt{\frac{2C_1}{\omega_0^2} - x^2} = \omega_0 \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

Kako je  $v_x = dx/dt$  iz ove jednakosti integracijom dobijamo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x_o^2 - x^2}} = \omega_o \int dt \Rightarrow \arcsin\left(\frac{x}{x_o}\right) = \omega_o t + \varphi$$

gde je sa  $\varphi$  označena konstanta integracije. Odavde se može pisati:

$$x = x_o \sin(\omega_o t + \varphi) = x_o \sin\left\{\omega_o \left(t + \frac{2k\pi}{\omega_o}\right) + \varphi\right\} \quad (3.31)$$

gde je  $k=0,1,2,\dots$  Ovakvo kretanje materijalne tačke je harmonijsko oscilovanje čija je amplituda  $x_o$  i kružna frekvencija  $\omega_o$ . Veličina  $(\omega_o t + \varphi)$  ja faza oscilovanja, a  $\varphi$  početna faza. Kretanje je periodično, ponavlja se na identičan način posle određenog vremenskog intervala,  $T$ , koji se naziva period oscilovanja. Iz izraza (3.31), period oscilovanja se može prikazati na sledeći način:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k'}} \quad (3.32)$$

Sledi da  $T$  ne zavisi od početnih uslova kretanja, niti od amplitude. Takvo kretanje je IZOHRONO.

Brzina i ubrzanje za ovaj slučaj se dobijaju diferenciranjem gornje jednačine:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x_o \omega_o \cos(\omega_o t + \varphi) \quad (3.33)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -x_o \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi) \quad (3.34)$$

Materijalna tačka koja vrši ovakvo kretanje naziva se LINEARNI HARMONIJSKI OSCILATOR.

### 3.8.4. Kretanje pod dejstvom sile koja zavisi od vremena: $F=F(t)$ .

U opštem slučaju zavisnosti sile samo od vremena u diferencijalnoj jednačini je jednostavno moguće razdvojiti promenljive ( $x$  i  $t$ ) i izvršiti integraciju. Postojeće u principu tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t), \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(t) \quad i \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(t)$$

Integracijom i uključivanjem početnih uslova odavde se mogu dobiti funkcije brzine i puta:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{1}{m} \int F_x(t) dt + v_{x0} \quad (3.35)$$

$$x = \frac{1}{m} \int \{F_x(t) dt\} dt + v_{x0} t + x_o \quad (3.36)$$

i analogno ovome za  $y$  i  $z$  komponente, ukoliko postoje.

Kao primer sile koja zavisi od vremena možemo navesti silu koja deluje na telo male mase obešeno o masivan linearni harmonijski oscilator (tako da ono ne utiče bitno na kretanje samog oscilatora). Prema izrazu za ubrzanje oscilatora (3.34) sila koja deluje na posmatrano telo bila bi harmonijska funkcija vremena. Pogodniji primer za ovakvu silu, bez ikakvih ograničenja, bilo bi kretanje naelektrisane čestice u promenljivom električnom polju.

Predpostavimo, dakle, da na materijalnu tačku deluje sila oblika:

$$\vec{F} = \vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega t$$

Neka je sila usmerena duž x-ose, koja je vertikalna, i neka je u trenutku  $t=0$ ,  $x=x_0$  i  $v=v_{x0}$ . Sila Zemljine teže i otpora sredine se zanemaruju.

Diferencijalna jednačina kretanja, odnosno njena jedina projekcija na x-osu, ima sledeći oblik:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_0 \cos \omega t \quad \text{odnosno} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Iz ovog izraza se integracijom za brzinu dobija sledeći izraz:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{F_0}{m} \int \cos \omega t dt = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + C_1$$

a ponovnom integracijom konačno dobijamo:

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t + C_1 t + C_2$$

Uključivanjem početnih uslova dobijamo za brzinu i predjeni put sledeće izraze:

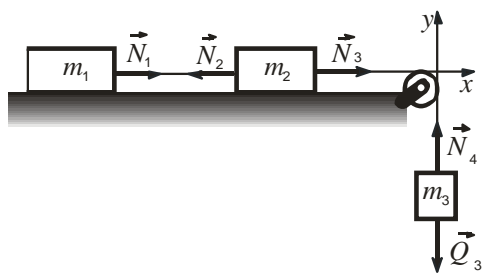
$$v_x = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + v_{ox}$$

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + v_{ox} t + x_0$$

Dakle, čestica se kreće po pravoj duž x-ose i ima dve komponente kretanja: po inerciji brzinom  $v_{ox}$  i istovremeno osciluje sa frekvencijom  $\omega$  pod dejstvom promenljive sile  $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t$ .

### 3.9. Pravolinijsko kretanje medjusobno vezanih tela.

Za kretanje medjusobno vezanih tela samo uslovno možemo tvrditi da je to kretanje neslobodnih tela odnosno kretanje pod dejstvom mehaničkih veza, o čemu ćemo kasnije govoriti, jer ceo sistem ovde može slobodno da se kreće.



Slika 3.6. Kretanje tri vezana tela

Razmotrimo kretanje tela koja su međusobno povezana neistegljivom niti dužine  $l$ , kao na slici 3.6. Zanemarimo pri tome sile trenja i masu niti i kotura. Sile teže i reakcije podloge za tela masa  $m_1$  i  $m_2$  su uravnotežene, a i inače su normalne na pravac kretanja i ne utiču na kretanje tela. Jedina aktivna sila je  $\vec{Q}_3$ . Pošto je kanap neistegljiv, sva tela će imati iste brojne vrednosti brzine i ubrzanja. Ovaj uslov se može izraziti tzv. jednačinama veze:

$$y_1 = y_2 = 0, x_3 = 0$$

i

$$|x_1 - x_2| + |x_2| + |y_3| = l = x_1 + y_3$$

Jednačine kretanja za pojedina tela imaće sledeći oblik:

$$m_1 \frac{dv}{dt} = N_1$$

$$m_2 \frac{dv}{dt} = N_3 - N_2$$

$$m_3 \frac{dv}{dt} = Q_3 - N_4$$

gde su sa  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  i  $N_4$  označene sile zatezanja niti. S obzirom na jednačine veze i jednakost intenziteta sila akcije i reakcije, sabiranjem ovih jednačina, kretanje celog sistema se može predstaviti u sledećem obliku:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \frac{dv}{dt} = Q_3 = mg$$

odnosno odavde je ubrzanje,  $a = dv/dt$ :

$$a = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = \text{const.}$$

Pri tome sile zatezanja niti  $N$  i  $N_1$  imaju ulogu unutrašnjih sila i ne utiču na kretanje sistema. One se mogu naknadno odrediti iz diferencijalnih jednačina kretanja, pošto je prethodno određeno ubrzanje. Takođe je odavde jednostavno odrediti brzinu i predjeni put tela.

### 3.10. Krivolinijsko kretanje materijalne tačke.

Do sada je bila razmatrana dinamika pravolinijskog kretanja. Kretanje po krivoj liniji, odnosno krivolinijsko kretanje je u opštem slučaju složenije jer se odvija u prostoru, odnosno u specijalnom slučaju u ravni. Veličine kojima se kretanje opisuje mogu se u tom slučaju razložiti na svoje komponente duž koordinatnih osa (tri pri kretanju u prostoru i dve pri kretanju u ravni). Razmotrimo neke jednostavnije slučajeve krivolinijskog kretanja.

### 3.10.1. Kos hitac u vakuumu.

Kos hitac u vakuumu predstavlja kretanje materijalne tačke pod dejstvom sile Zemljine teže,  $F=mg=const$ , sa datom početnom brzinom koja zaklapa neki ugao sa horizontalnom ravni. Izaberimo koordinatni sistem tako da se kretanje vrši u xOz ravni, kao na slici 3.7.

Diferencijalne jednačine kretanja duž pojedinih koordinatnih osa imaće sledeći oblik:

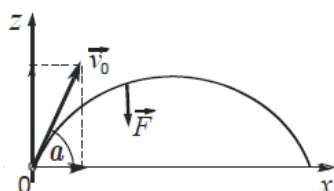
$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad \text{i} \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg$$

Jednostavnom integracijom ovih jednačina dobijamo:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = C_1, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = C_2 \quad \text{i} \quad \frac{dz}{dt} = v_z = -gt + C_3$$

Ponovnom integracijom ovih izraza biće:

$$x = C_1 t + C_4, \quad y = C_2 t + C_5 \quad \text{i} \quad z = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_6$$



Slika 3.7. Kos hitac

gde su  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  i  $C_6$  integracione konstante koje se određuju iz početnih uslova kretanja:  $t=0 \Rightarrow x=y=z=0$  i  $v=v_0$ . Sledi

$$C_1 = v_0 \cos \alpha \quad C_3 = v_0 \sin \alpha \quad C_2 = 0 \quad \text{i} \quad C_4 = C_5 = C_6 = 0$$

Konačno, parametarske jednačine brzine će biti:

$$v_x = v_0 \cos \alpha \quad v_y = 0 \quad v_z = v_0 \sin \alpha - gt$$

i puta:

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad y = 0 \quad z = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

Eliminisanjem vremena  $t$  iz ovih jednačina možemo dobiti jednačinu putanje kosog hitca u eksplicitnom obliku (ako  $t$  izrazimo iz  $x$  i zamenimo u  $z$ ):

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (3.37)$$

Ovo je jednačina parabole okrenute nadole i temena pomenog u odnosu na koordinatni početak, sa osom simetrije paralelnom z-osi. Teme parabole  $T(x_T, z_T)$  određuje se iz uslova maksimuma funkcije, odnosno izjednačavanjem njenog prvog izvoda sa nulom:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x$$

$$x_T = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \quad \text{i} \quad z_T = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

Domet  $x_d$  kosog hitca se dobija iz uslova da je  $z=0$ :

$$0 = x \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right), \quad \text{odakle je}$$

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = x_d = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Dakle, domet zavisi od  $v_0$  i od ugla  $\alpha$ . Za dato  $v_0$  domet je najveći za  $\sin 2\alpha = 1$ , tj. za  $\alpha = 45^\circ$ .

Vreme potrebno da telo dostigne maksimalnu visinu sledi iz uslova:

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt = 0 \quad \text{odakle je} \quad t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Ukupno vreme leta tela do njegovog pada na horizont sledi iz uslova da je  $x = x_d$ , odnosno:

$$v_0 t_2 \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha, \quad \text{te je} \quad t_2 = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha = 2t_1$$

Ako je  $v_0$  dato, kako je  $0 < \alpha < 180$ , tada jednačina kosog hitca daje za različito  $\alpha$  porodicu parabola, pa čak i pravih u specijalnim slučajevima. Tako se za  $\alpha = 90^\circ$  i  $\alpha = -90^\circ$  mogu dobiti iz gornjih jednačina direktno izrazi koji opisuju hitac u vis i hitac na dole koje smo već sreli govoreći o pravolinijskom kretanju. Poseban slučaj kosog hitca je kada je ugao  $\alpha = 0$  i naziva se horizontalan hitac. Za taj slučaj parametarske jednačine kretanja se dobijaju direktno iz gornjih zamenom ugla  $\alpha$ , odnosno njegovog sinusa i kosinusa, pa je:

$$x = v_0 t, \quad y = 0 \quad \text{i} \quad z = -\frac{gt^2}{2}.$$

Odavde se eliminisanjem vremena dobija jednačina trajektorije:

$$z = -\frac{x^2 g}{2v_0^2} \quad (3.38)$$

što je opet parabola, ali sa temenom u koordinatnom početku i okrenuta nadole.

Za sve druge vrednosti  $\alpha$  dobija se porodica parabola koja je ograničena - obavijena jednom posebnom parabolom koja se naziva obvojnica i ima sledeći oblik:

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (\text{V.I.Smirnov, Kurs više matematike, T-II, str.40, 1948})$$

Ova obvojnica se još naziva i parabolom sigurnosti jer ograničava prostor u kome se, za dato  $v_0$ , kos hitac može kretati. Ovo je posebno važno u vojnoj tehnici, obzirom da kos hitac opisuje kretanje projektila iz oružja. Dakle domet projektila je najveći ako je ispaljen pod uglom od  $45^\circ$ . U realnosti, zbog otpora vazduha, putanje projektila nisu pravilne parabole, već takozvane balističke krive.

### 3.10.2. Prostorni harmonijski oscilator.

Za razliku od linearnog harmonijskog oscilatora razmotrimo kretanje materijalne tačke u prostoru pod dejstvom sile proporcionalne rastojanju od ravnotežnog položaja,  $\vec{F} = -k\vec{r}$ , pri početnim uslovima

$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$  i  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ . Diferencijalna jednačina kretanja u sistemu čiji se koordinatni početak poklapa sa ravnotežnim položajem materijalne tačke biće:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r} \quad (3.39)$$

Prema ovoj jednačini vektor ubrzanja  $\vec{a}$  je kolinearan sa  $\vec{r}$ , pa će se kretanje odvijati u ravni određenoj sa  $\vec{r}$  i  $\vec{v}_0$ . Neka je to xOy ravan. Diferencijalne jednačine kretanja duž x- i y-ose biće:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \quad \text{i} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 y \quad \text{gde je} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

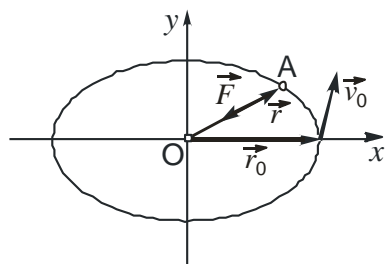
Svaka od ovih jednačina predstavlja linearno harmonijsko kretanje pod dejstvom sile koja zavisi od rastojanja, pa su nam i njihova rešenja od ranije poznata, odnosno možemo pisati:

$$x = a_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$y = a_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

gde su  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  integracione konstante, koje se mogu odrediti iz početnih uslova. Dakle, kretanje predstavlja superpoziciju dva uzajamno normalna harmonijska kretanja iste kružne frekvencije  $\omega_0$ .

Eliminisanjem vremena  $t$  iz ovih jednačina, dizanjem na kvadrat i sabiranjem, dobija se jednačina trajektorije oscilatora u ravni u sledećem obliku:

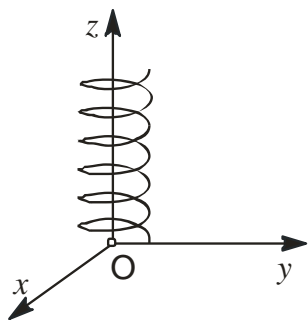


Slika 3.8. Trajektorija oscilatora u ravni

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.40)$$

Ova jednačina u opštem slučaju predstavlja jednačinu elipse, slika 3.8. Centar elipse se nalazi u koordinatnom početku O i prema njemu je u svakom trenutku usmerena sila  $\vec{F}$ . Ravan elipse, veličina njenih poluosa, njena orijentacija u prostoru i smer kretanja oscilatora po putanji određeni su iz početnih uslova kretanja, odnosno veličine i smera početne brzine  $\vec{v}_0$  i početnog položaja  $\vec{r}_0$ .

### 3.11. Određivanje sile po obliku trajektorije.



Slika 3.9. Spiralna trajektorija

Razmotrićemo primer kretanja materijalne tačke mase  $m$  po spiralnoj trajektoriji, prikazanoj na priloženoj slici 3.9, čija jednačina, u parametarskom obliku, glasi:

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = a \sin \omega t$$

$$z = v_0 t$$

gde su  $a$ ,  $\omega$  i  $v_0$  odgovarajuće konstante. Potrebno je odrediti silu koja izaziva ovo kretanje, njen intenzitet i pravac. Na osnovu diferencijalne jednačine kretanja, komponente sile su sledećeg oblika:

$$F_x = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -m\omega^2\cos\omega t = -m\omega^2x$$

$$F_y = m\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = -m\omega^2\sin\omega t = -m\omega^2y$$

$$F_z = m\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0$$

Prema tome intenzitet sile je:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2} = m\omega^2a = ka$$

a pravac sile u odnosu na koordinatne ose dat je sledećim izrazima

$$\cos(F,i) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{a}$$

$$\cos(F,j) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{a}$$

$$\cos(F,k) = \frac{F_z}{F} = 0$$

Dakle, sila ima konstantan intenzitet jer su  $m$ ,  $\omega$  i  $a$  konstante, i normalna je na z-osu jer je  $\cos(F,k)=0$ .

Operacije diferenciranja su jednostavnije od integriranja, pa je obično lakše naći silu iz jednačina kretanja, nego obrnuto naći jednačine kretanja iz sile.

### 3.12. Dinamika vezanog kretanja materijalne tačke. Klasifikacija mehaničkih veza.

Kretanje materijalne tačke pod dejstvom aktivne sile sa unapred datim ograničenjima na njen položaj i/ili brzinu naziva se prinudno ili ograničeno kretanje (kretanje niz strmu ravan, voza po šinama, matematičkog klatna, itd.).

Uslovi (koji potiču od drugih tela) koji ograničavaju slobodno kretanje materijalne tačke nazivaju se u mehanici vezama. Mehaničke veze koje ograničavaju samo položaj materijalne tačke nazivaju se HOLONOMNE ili konačne. Takvo je na primer kretanje materijalne tačke u ravni definisanoj jednačinom  $\varphi(x,y,z)=0$ . Mehaničke veze koje ograničavaju i položaj i brzinu nazivaju se NEHOLONOMNE ili kinematičke veze.

Ukoliko se mehaničke veze ne menjaju u toku kretanja, tj. eksplicitno ne zavise od vremena, nazivaju se STACIONARNIM, u protivnom su nestacionarne.

Mehaničke veze, očigledno, unose promene u kretanju tela u odnosu na slučaj da se telo slobodno kreće, pa se manifestuju dopunskim silama. Te sile se nazivaju sile reakcije veza,  $N$ . Ove sile se principijelno ne razlikuju od drugih mehaničkih sila, te ulaze i u diferencijalnu jednačinu kretanja:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{N} \quad (3.41)$$

Sila  $\vec{N}$  nije unapred poznata, jer zavisi i od aktivnih sila  $\vec{F}$ , pa se obično mora posebno odredjivati, iz dopunskih uslova.

### 3.12.1. Kretanje matematičkog klatna.

Navešćemo neke karakteristične primere kretanja neslobodne materijalne tačke, vezanog kretanja. Matematičko klatno je materijalna tačka, mase  $m$ , obešena o neistegljivu nit dužine  $R$  (čija se masa zanemaruje). Kretanje ove tačke se odvija po luku kruga poluprečnika  $R$  u vertikalnoj ravni, kao što je prikazano na slici 3.10. U prirodnom trijedru diferencijalne jednačine kretanja duž tangente i normale imaju sledeći oblik:

$$\vec{\tau}_0: \quad m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \alpha \quad (3.42)$$

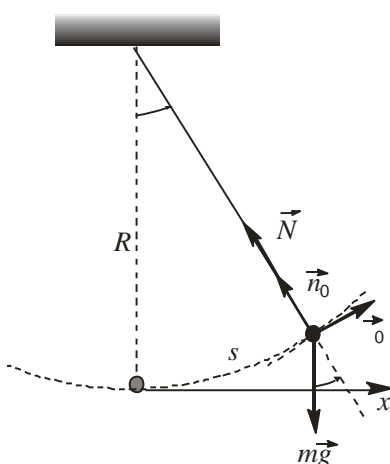
$$\vec{n}_0: \quad m \frac{v^2}{R} = N - mg \cos \alpha = 0 \quad (3.43)$$

Pri tome je sa  $N$  označen intenzitet sile zatezanja niti, odnosno sila reakcije veze.

Kretanje duž binormale u ovom slučaju ne postoji jer u pravcu normalnom na ravan slike nema sila,  $F_{b_0} = 0$ . Da bi pojednostavili postupak rešavanja posmatračemo slučaj kretanja pri malim uglovima,  $\alpha \rightarrow 0$ . Tada je:

$$\sin \alpha \cong \alpha, \quad \alpha = \frac{x}{R}, \quad \text{odnosno} \quad s \cong x$$

pa se kretanje može posmatrati duž x-ose. Diferencijalna jednačina kretanja po x-osi, odnosno ranije po tangenti imaće sledeći oblik:



Slika 3.10. Primer vezanog kretanja

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{g}{R} x = -\omega_0^2 x \quad \text{uz} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{R}$$

Ova jednačina ima oblik jednačine kretanja pod dejstvom sile  $F = -kx$  odnosno predstavlja jednačinu linearnog harmonijskog oscilatora, koju smo već rešavali. Rešenje ove jednačine je:

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.44)$$

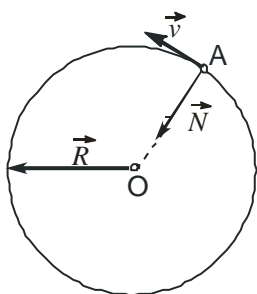
sa periodom  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(R/g)^{1/2}$ . Iz ovih relacija vidimo da period malih oscilacija ne zavisi od početnih uslova oscilovanja.

Iz jednačine (3.43) možemo odrediti intenzitet sile zatezanja niti  $N$ , za male uglove ( $\cos \alpha \cong 1$ )

$$N = m \frac{v^2}{R} + mg = m \left( \frac{v^2}{R} + g \right)$$

Ovde treba istaći da se  $N$  menja sa vremenom, obzirom da je  $v$  promenljivo i ima najveće vrednosti pri prolasku tela kroz ravnotežni položaj ( $A_0$ ).

### 3.12.2. Dinamika jednakog kružnog kretanje materijalne tačke.



Neka materijalna tačka, vezana za nit dužine  $R$ , vrši u horizontalnoj ravni kretanje bez trenja po krugu, slika 3.11. U tom slučaju se ne razmatra sila zemljine teže, jer ne utiče na kretanje tela, pa prema prethodnom primeru jednačina kretanja (3.43) ima oblik:

$$N = m \frac{v^2}{R}$$

Slika 3.11. Sila kod kružnog kretanja

Pravac i smer ove sile su određeni na sledeći način:

$$\vec{N} = m\vec{a}_n = m(\vec{\omega} \times \vec{v}) = m(\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{R}) = m\{\vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{R}) - \vec{R}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\}$$

Kako je  $\vec{\omega}$  normalno na  $\vec{R}$ , prvi član u zagradi je jednak nuli, pa ostaje:

$$\vec{N} = m\vec{a}_n = -m\omega^2 \vec{R} = \vec{F}_{cp} \quad (3.45)$$

Znači, sila zatezanja niti  $\vec{N}$  je centripetalna sila. Pod njenim dejstvom telo se kreće po kružnoj putanji.

### 3.13. Sile trenja.

Trenje je fizička pojava izazvana (medjupovršinskim) molekulatonskim interakcijama između različitih tela ili različitih delova istog tela koji se na neki način dodiruju ili se relativno pomeraju.

Trenje se izražava silom trenja,  $\vec{F}_\tau$ , koja se javlja u dodirnim tačkama tela. Ova sila zavisi od:

- prirode tela i agregatnog stanja,
- uglačanosti površine dodira,
- sila kohezije i adhezije dodirnih tela
- relativne brzine kretanja, itd.

Uticaj sile trenja na kretanje tela odvija se po principu nezavisnosti dejstva sile, diferencijalna jednačina kretanja je, dakle:

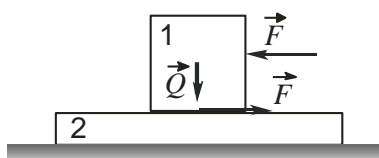
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{F}_\tau$$

Sile trenja se mere kao i ostale sile u mehanici. Istezanje elastične opruge je mera intenziteta sile. Pri ravnomernom pravolinijskom kretanju tela po nekoj podlozi, prema navedenoj diferencijalnoj jednačini, sile trenja jednake su po intenzitetu, a suprotne po smeru od aktivnih sila koje pokreću telo (jer je rezultujuća sila jednaka nuli). Sprava za merenje intenziteta sile trenja zasnovana na ovom principu naziva se tribometar.

Suvo i viskozno trenje definiše se prema zavisnosti sile trenja od toga da li su u dodiru dva čvrsta tela ili čvrsto telo sa tečnostima i gasovima. Pri dodiru dva čvrsta tela sile trenja uvek imaju konačnu vrednost (nikada nisu jednake nuli), čak i kada je relativna brzina jednaka nuli, ako na njih deluje neka spoljašnja sila. Intenzitet  $F_\tau$  zavisi od te spoljašnje sile. U pitanju je tzv. statičko trenje.

Za razliku od ovog slučaja, međutim, pri dodiru čvrstog tela sa fluidom, sile trenja zavise od relativne brzine kretanja (kao i od debljine dodirnog sloja fluida) i nestaju kada su dodirne faze u relativnom mirovanju. Takva vrsta trenja naziva se viskozno trenje. O tome ćemo govoriti nešto kasnije.

**SILE SUVOG TRENJA.** Suvo trenje je eksperimentalno proučavao Coulomb oko 1781. godine. Rezultat tog izučavanja su takozvani zakoni suvog trenja. Da bismo ih razmotrili zamislimo dva čvrsta tela koja se dodiruju kao na slici 3.12. Ako spoljašnjom silom  $\vec{F}$  pokušamo da pomerimo telo 1 po telu 2, pomeranje se neće dogoditi pod dejstvom svake (male) sile  $\vec{F}$ , već samo kada njena vrednost premaši određenu graničnu vrednost  $\vec{F}_o$ . Veličina ove granične sile zavisi od prirode tela i od vrednosti normalne sile na podlogu  $\vec{N}$  ( $=\vec{Q}$  u ovom slučaju). Sila koja se suprotstavlja kretanju naziva se sila trenja,  $\vec{F}_\tau$ , i po II Njutnovom zakonu jednaka je sili  $-\vec{F}$ , odnosno  $-\vec{F}_o$  (suprotnog je smera). Sila  $\vec{F}_\tau$  raste istovremeno sa povećanjem sile  $\vec{F}$  od nule do njene granične vrednosti  $\vec{F}_o$ . Granična vrednost sile  $\vec{F}$  u momentu pokretanja tela 1 po telu 2 je i maksimalna vrednost sile statičkog odnosno suvog trenja, tj.:



Slika 3.12. Sile suvog trenja

$$\vec{F}_{\tau\max} = -\vec{F}_o \quad (3.46)$$

U slučaju da je  $\vec{F} > \vec{F}_o$ , telo 1 će se kretati (klizati) po telu 2 sa ubrzanjem koje zavisi od razlike  $\vec{F} - \vec{F}_\tau$ . U ovom slučaju, dakle pri kretanju, sila  $\vec{F}_\tau$  se naziva sila dinamičkog trenja i zavisi od relativne brzine kretanja. Eksperimentalna merenja pokazuju da su sile dinamičkog trenja manje od granične

vrednosti sile statičkog trenja.

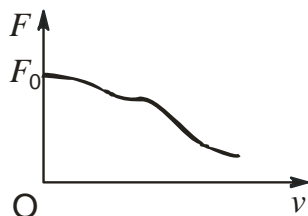
Pošto statičko trenje zavisi od spoljašnje sile  $\vec{F}$  (od nule do  $\vec{F}_{\tau\max}$ ), to je neophodno razmotriti samo zakone dinamičkog trenja i graničnu vrednost sile statičkog trenja. Coulomb-ovi zakoni suvog trenja glase:

1. Statička sila trenja  $\vec{F}_{\tau\max}$  proporcionalna je normalnoj sili na dodirnu površinu:  $F_{\tau\max} = \mu_s N$ , gde je  $\mu_s$  - koeficijent statičkog trenja. To je neimenovan broj koji karakteriše prirodu i stanje dodirnih površina.
2. Statička sila trenja (opet granična)  $\vec{F}_{\tau\max}$  u velikim granicama ne zavisi od veličine dodirne površine tela. U slučaju malih površina sile trenja se povećavaju usled deformisanja površine.
3. Sila trenja ima pri kretanju smer suprotan relativnoj brzini kretanja.
4. Sila dinamičkog trenja (a time i odgovarajući dinamički koeficijent trenja) zavisi od brzine kretanja i ima oblik ilustrovan na slici 3.13. Koeficijent statičkog trenja je veći od koeficijenta dinamičkog trenja.

Trenje je pojava koja je nekada korisna (kretanje na Zemlji-hodanje) a često i nepoželjna.

Nepoželjno trenje se može smanjiti prevodjenjem u viskozno trenje ili u dinamičko trenje (sa manjim koeficijentom).

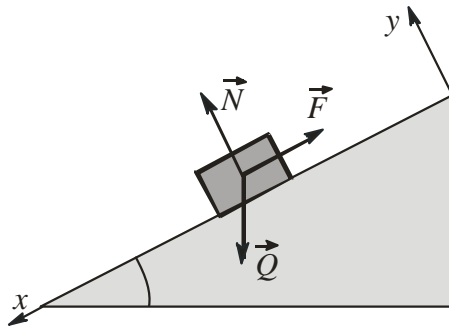
Navešćemo ovde primer kretanja tela niz strmu ravan, u prisustvu sile trenja. Neka se telo nalazi na strmoj ravni i neka klizi niz nju, slika 3.14. Sile duž y-ose su uravnotežene. Diferencijalna jednačina kretanja duž x-ose, usmerene niz strmu ravan, biće:



Slika 3.13. Zavisnost sile dinamičkog trenja od brzine

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} = \vec{F} - \vec{F}_\tau$$

pri čemu su sile date sa:



Slika 3.14. Sile na strmoj ravni

$$F = Q \sin \alpha = mg \sin \alpha$$

$$F_{\tau} = \mu_s N = \mu_s Q \cos \alpha = \mu_s mg \cos \alpha$$

pa diferencijalna jednačina konačno ima sledeći oblik:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a = g(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha)$$

Karakter kretanja zavisi od vrednosti izraza u zagradi i razlikuju se sledeći slučajevi:

- Kada je  $\mu_s=0$ , ubrzanje  $a$  zavisi od  $\alpha$ , odnosno  $a=g \sin \alpha$  ( $a=g$  za  $\alpha=90^\circ$  i  $a=0$  za  $\alpha=0^\circ$ ).
- Ako je  $\mu_s>0$  i pri tome  $\sin \alpha > \mu_s \cos \alpha$ , ubrzanje je pozitivno,  $a>0$ , i telo se kreće jednako ubrzano duž x-ose.
- Ako je  $\mu_s>0$  i  $\sin \alpha = \mu_s \cos \alpha$ , tada je ubrzanje jednako nuli,  $a=0$ , i  $\mu_s = \tan \alpha$ . Telo se kreće niz strmu ravan konstantnom (početnom) brzinom  $v \geq 0$ . Merenjem ugla  $\alpha$  može se odrediti koeficijent statičkog ili dinamičkog trenja.
- Ako je  $\mu_s>0$  i  $\sin \alpha < \mu_s \cos \alpha$ , telo će se kretati jednako usporeno, tj. brzina će mu se smanjivati jer je  $a<0$ . Ako je u početku mirovalo, telo se neće kretati.

## IV

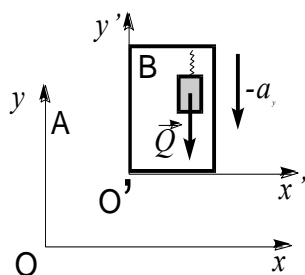
### DINAMIKA RELATIVNOG KRETANJA MATERIJALNE TAČKE

#### 4.1. Relativnost kretanja.

Razmotrićemo sada dinamiku relativnog kretanja materijalne tačke. Postavlja se pitanje kako se kretanje može opisati u neinercijalnim referentnim sistemima. Ovo je važno jer su praktično svi sistemi na Zemlji, zbog njenog kretanja, koje je po prirodi kružno, bilo da se radi o rotaciji oko Sunca ili revoluciji oko sopstvene ose, neinercijalni.

Posmatrajmo kretanje tela mase  $m$  okačenog o elastičnu oprugu za tavanicu lifta, ilustrovano na slici 4.1. Kada lift miruje telo isteže oprugu dok se elastične sile opruge ne izjednače sa silom Zemljine teže:

$$\vec{F}_{el} = \vec{Q} (= m\vec{g})$$



Slika 4.1. Kretanje tela u liftu

Trivijalno je rešavanje diferencijalne jednačine kretanja u slučaju ravnomernog kretanja lifta i daje  $\vec{v} = \text{const}$ . Kretanje je jednako za oba posmatrača, i onog u liftu (A) i onog van njega (B), koji predstavljaju pokretni i nepokretni referentni sistem.

Ako lift međutim počne da se kreće ubrzano nadole, sa ubrzanjem  $-\vec{a}_y$ , i telo će se kretati ubrzano, a njegovo kretanje će, u nepokretnom sistemu, biti opisano II Njutnovim zakonom:

$$-m\vec{a}_y = -\vec{Q} + \vec{F}_1$$

gde je  $\vec{F}_1$  nova vrednost sile elastične opruge. Zbog pravolinijskog kretanja tela i lifta vertikalno duž y-ose, vektorske oznake možemo zanemariti. Intenzitet nove vrednosti sile je određen sa:

$$F_1 = mg - ma_y = m(g - a_y) < F_{el} \quad (4.1)$$

U specijalnom slučaju  $a_y = g$  je  $F_1 = 0$ , telo prividno gubi težinu. Dakle, možemo zaključiti da:

- a) Dinamički zakoni kretanja zavise od vrste koordinatnog referentnog sistema.
- b) Težinu tela treba razlikovati od sile teže. Težina tela je normalna komponenta sile kojom telo deluje na podlogu i zavisi od kretanja podloge, a teža je sila gravitacije između posmatranog tela i Zemlje.

#### 4.2. Inercijalni koordinatni sistemi. Galilejeve transformacije.

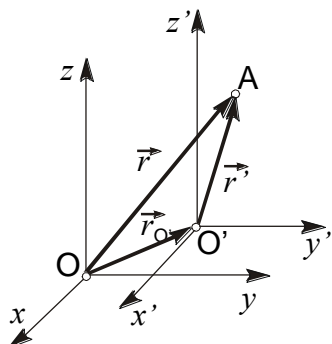
##### Galilejev princip relativnosti.

Predpostavimo da imamo dva inercijalna koordinatna sistema O i O', kao na priloženoj slici 4.2. Neka se sistem O' kreće pravolinijski u odnosu na sistem O, brzinom  $v_o = \text{const}$ . Odredimo kretanje tačke A u odnosu na oba ova sistema. Pri tome se uvodi sledeća nomenklatura. Kretanje tačke A u odnosu na sistem O je **apsolutno**, a u odnosu na O' je **relativno**. Kretanje O' u odnosu na O je **prenosno** kretanje. Ove definicije su uslovne i sisteme je moguće zameniti.

Medju vektorima položaja tačke A u različitim sistemima, na osnovu vektorske algebre, važi sledeća relacija:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o(t) + \vec{r}'(t) \quad (4.2)$$

odnosno



Slika 4.2. Galilejeve transformacije

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o(t) + x'(t) \\ y(t) &= y_o(t) + y'(t) \\ z(t) &= z_o(t) + z'(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Predpostavimo da se intervali vremena izmedju dva ista događaja u sistemima O i O' poklapaju, tj. da je  $\Delta t = \Delta t'$  odnosno  $t = t'$ . Tada se gornje relacije mogu pisati na sledeći način:

$$\vec{r} = \vec{v}_o t + \vec{r}' \quad \text{i} \quad t = t' \quad (4.4)$$

Ovo su GALILEJEVE TRANSFORMACIJE. One omogućavaju određivanje koordinata pokretanog tela u proizvoljnom inercijalnom sistemu, ako su poznate u jednom od njih u odnosu na koji se izabrani sistem kreće brzinom  $v_o = \text{const}$ . Pri tome je vreme jednako u svim inercijalnim sistemima.

Diferenciranjem prve jednačine dobijamo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_o}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad \text{odnosno} \quad \vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}' \quad (4.5)$$

Još jednim diferenciranjem dobijamo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} \quad \text{ili} \quad \vec{a} = \vec{a}' \quad (4.6)$$

jer je izvod od  $v_o$  jednak nuli, pošto je konstanta. Dakle, ubrzanja u oba sistema biće ista. U klasičnoj mehanici (gde su rastojanja u različitim sistemima ista, mase iste i signali posmatranja se prostiru beskonačnom brzinom) i sile će biti iste u svim inercijalnim sistemima:

$$\vec{F} = \vec{F}' \quad (4.7)$$

U svim inercijalnim sistemima zakoni dinamike su jednaki, bilo da sistem miruje ili se kreće konstantnom brzinom. Nikakvim ogledima unutar sistema nije moguće utvrditi da li se posmatrani sistem kreće ili miruje, svi sistemi su ekvivalentni. Ovaj zaključak se naziva Galilejev princip relativnosti.

### 4.3. Neinercijalni koordinatni sistemi. Inercijalne sile.

Neka su dati koordinatni sistemi O i O' i uočena tačka A kao na slici 4.2. Predpostavimo da je sistem O' neinercijalan, tj. da se može proizvoljno kretati u odnosu na nepokretni sistem O. Dakle brzina kretanja O' u odnosu na O nije konstantna, promenljiva je, postoji ubrzanje. Predpostavimo, za sada, da se sistem O' kreće samo translaciono u odnosu na O, bez rotacije. Treba naći karakteristike kretanja tačke A u odnosu na oba sistema.

Položaj tačke A u ova dva sistema povezan je relacijom (4.2) medju odgovarajućim vektorima položaja:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}' \quad (4.8)$$

Brzina tačke u nepokretnom sistemu je  $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}'$ , a kako  $\vec{v}_o$  nije konstantno, za ubrzanje diferenciranjem dobijamo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} \quad \text{ili} \quad \vec{a} = \vec{a}_o + \vec{a}' \quad (4.9)$$

Kretanje materijalne tačke u odnosu na neinercijalni sistem  $O'$  je određeno jednačinom  $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$ . Diferencijalnu jednačinu kretanja koja određuje vektor položaja  $\vec{r}'$  možemo dobiti iz osnovne jednačine dinamike, II Njutnovog zakona za kretanje u inercijalnom sistemu:

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (4.10)$$

Ako u ovoj jednačini zamenimo  $\vec{a}$  sa  $(\vec{a}_o + \vec{a}')$  dobijamo:

$$m(\vec{a}_o + \vec{a}') = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

odnosno:

$$m\vec{a}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i - m\vec{a}_o \quad (4.11)$$

Analizom ove jednačine možemo zaključiti sledeće. Član  $\sum \vec{F}_i$  predstavlja rezultantu svih sila koje potiču od uzajamnog dejstva uočenog tela sa drugim telima. Posmatrač u inercijalnom sistemu-O može da objasni kretanje tela pod dejstvom samo ovih sila, a na osnovu II Njutnovog zakona. Za njega druge sile ne postoje.

Međutim, posmatrač u neinercijalnom sistemu  $O'$ , za koga je kretanje materijalne tačke drugačije, ne može da objasni kretanje samo pod dejstvom ovih sila. Za njega na telo deluje i dodatna sila  $(-m\vec{a}_o)$ , čija veličina zavisi od mase tela ali i od zakona kretanja neinercijalnog sistema  $O'$  u odnosu na sistem  $O$ . Ovakve sile, koje zavise od kretanja koordinatnog sistema nazivaju se SILE INERCIJE ili INERCIJALNE SILE.

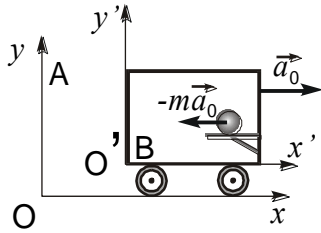
Čak i u slučaju da je  $\sum \vec{F}_i = 0$ , odnosno da na telo ne deluju nikakve spoljašnje sile, i mada se u inercijalnom sistemu kreće ravnomerno, ono će se u neinercijalnom sistemu kretati ubrzano. Uzrok za to su inercijalne sile.

Sile inercije razlikuju se od sila uzajamnog dejstva (mehaničke, elastične, gravitacione, električne). Za njih važi sledeće:

- a) Sile inercije nastaju kao posledica ubrzanog kretanja sistema i za njih ne važi III Njutnov zakon.
- b) Javljaju se samo u neinercijalnim sistemima, u inercijalnim ih nema.
- c) Za svako telo u neinercijalnom sistemu ove sile su spoljašnje, za njih važi II Njutnov zakon.
- d) Sile inercije su proporcionalne masi tela.

Razmotrićemo kao primer pravolinijsko jednako promenljivo kretanje. Neka je  $\sum \vec{F}_i = 0$  i neka nema rotacije sistema  $O'$  ( $\vec{\omega} = 0$ ). Tada se kretanje opisano zadnjom jednačinom svodi na:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m \vec{a}_0$$



Slika 4.3. Inercijalna sila kod translatornog kretanja

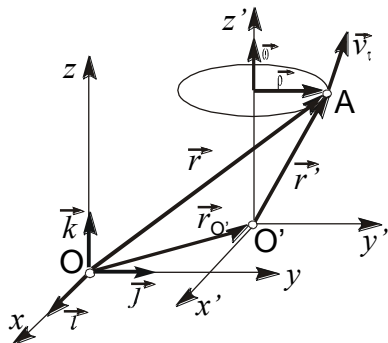
a) Posmatrajmo vagon na pravim šinama i neka se u njemu na horizontalnoj glatkoj ( $\mu_s=0$ ) ploči nalazi kugla A, kao na slici 4.3. Ako u jednom trenutku vagon dobije ubrzanje  $\vec{a}_0$  u smeru x-ose, kako će izgledati kretanje kugle? Za posmatrača na šinama, A, kuglica će mirovati, a za posmatrača u vagonu, B, izgledaće kao da na nju deluje sila  $-m\vec{a}_0$ , jer se kuglica kreće unazad, nasuprot x-ose. Posmatrač u vagonu kretanje kuglice objašnjava dejstvom sile  $\vec{F}_{in}$

koja joj saopštava ubrzanje  $-\vec{a}_0$  u odnosu na vagon, dakle sile inercije. Na osnovu II Njutnovog zakona on pomoću ove sile može da izračuna zakon puta kuglice.

b) Neka je u posmatranom slučaju kuglica vezana elastičnom oprugom za zid vagona. Usled dejstva inercione sile  $-m\vec{a}_0$ , opruga će se istegnuti dok se njena elastična sila ne izjednači sa ovom silom tj.  $\vec{F}_{el} = -\vec{F}_{in}$ . Ovaj eksperiment je ujedno i način za merenje sila inercije.

#### 4.4. Sile inercije u rotirajućim sistemima.

U slučaju kada sistem  $O'$  u odnosu na sistem  $O$  može proizvoljno da se kreće, uključujući i rotaciju, opisivanje kretanja će biti složenije nego do sada. Razložimo kretanje sistema  $O'$ , kao na sl. 4.4, na translaciono i rotaciono i to tako da se translaciono kretanje opisuje vektorom  $\vec{r}_0$ , a rotacija ugaonom brzinom  $\vec{\omega}$  oko  $z'$  ose. Vektor položaja uočene tačke A, za sve vreme kretanja, kao i ranije, biće dat sledećom relacijom:



Slika 4.4. Rotirajući neinercijalni sistem

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \quad (4.12)$$

Pri proizvoljnom kretanju vektor  $\vec{r}'$  će se menjati i po intenzitetu i po pravcu, dakle i njegove komponente i orijentacije tih komponenta u prostoru (sistem  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  se takodje kreće), pa relaciju (4.12) treba pisati u sledećem obliku:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x' \vec{i}' + y' \vec{j}' + z' \vec{k}' \quad (4.13)$$

Na osnovu ovog izraza za brzinu materijalne tačke A diferenciranjem dobijamo:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \left\{ \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right\} + \left\{ x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right\} \quad (4.14)$$

Ovde je  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$  - apsolutna brzina tačke A u odnosu na sistem O,  $d\vec{r}_0/dt = \vec{v}_0$  - apsolutna brzina tačke  $O'$  u odnosu na O ili prenosna brzina translacije. Ostali članovi se mogu predstaviti kao:

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \quad (4.15)$$

što je brzina tačke A u odnosu na sistem  $O'$  odnosno relativna brzina, i kao prenosna brzina rotacije samog sistema  $O'$  data sa:

$$\vec{v}_t = x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (4.16)$$

Ako se potsetimo Poasonovih transformacija, poslednji izraz možemo pisati u sledećem obliku:

$$\vec{v}_t = x'(\vec{\omega} \times \vec{i}') + y'(\vec{\omega} \times \vec{j}') + z'(\vec{\omega} \times \vec{k}') \quad (4.17)$$

a iznoseći vektor  $\vec{\omega}$  ispred zagrade, dobijamo:

$$\vec{v}_t = \vec{\omega} \times (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') = \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4.18)$$

što na osnovu odnosa vektora sa priložene slike dalje daje:

$$\vec{v}_t = \vec{\omega} \times (\vec{r}'_z + \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (4.19)$$

jer je  $\vec{r}'_z \perp \vec{\omega}$ . Ovo je očigledno tangenciona brzina i to brzina tačke A u odnosu na sistem O, koja je posledica rotacije neineracionalnog-pokretnog sistema O'.

Konačno dobijamo:

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}_t + \vec{v}' \quad (4.20)$$

Vektorski zbir  $\vec{v}_o + \vec{v}_t = \vec{v}_p$  naziva se prenosnom brzinom, pa se na kraju može za brzinu pisati:

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{v}' \quad (4.21)$$

#### IZVOD RELATIVNOG VEKTORA U ODNOSU NA NEPOKRETNI SISTEM:

Kako smo već videli, ovaj izvod je predstavljen izrazima u velikim zagradama izraza (4.14) i ima dve komponente i to izvod u neineracionalnom sistemu i član  $\vec{\omega} \times \vec{r}'$ . Dakle izvod vektora  $\vec{r}'$  u odnosu na nepokretni sistem je:

$$\left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_O = \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4.22)$$

Takodje za proizvoljan relativni vektor  $\vec{q}$  možemo pisati:

$$\left( \frac{d\vec{q}'}{dt} \right)_O = \left( \frac{d\vec{q}'}{dt} \right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{q}' \quad (4.23)$$

Ovo je u opštem slučaju izvod relativnog vektora u nepokretnom sistemu i daje vezu između apsolutnog i relativnog izvoda proizvoljnog vektora.

Naš sledeći zadatak bi bio da nadjemo ubrzanje materijalne tačke pri relativnom kretanju. Ubrzanje ćemo dobiti diferenciranjem izraza za brzinu (4.20) vodeći računa o relaciji (4.18):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_O + \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_O \quad (4.24)$$

Ovaj izraz se dalje, na osnovu izvoda relativnog vektora u odnosu na nepokretni sistem datog relacijom (4.23), može pisati kao:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left\{ \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right\} + \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.25)$$

odnosno:

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.26)$$

i konačno:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_o + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.27)$$

Ovde član  $\vec{a}_{pr} = \vec{a}_o + \vec{\alpha} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  predstavlja prenosno ubrzanje. Ono ima dve komponente i to  $\vec{a}_o$  koja predstavlja ubrzanje translatornog kretanja i ostatak koji proističe iz rotacije sistema  $O'$  a sastoji se iz tangencionog  $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}'$  i normalnog ili centrifugalnog ubrzanja  $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ . Izraz  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  naziva se Koriolisovo ubrzanje, koje je prouzrokovano istovremenim relativnim kretanjem uočene tačke i obrtnim kretanjem sistema  $O'$ .

Dakle, ukupno ubrzanje materijalne tačke  $A$  u sistemu  $O$  jednako je vektorskom zbiru relativnog  $\vec{a}'$ , prenosnog  $\vec{a}_{pr}$  i Koriolisovog  $\vec{a}_c$  ubrzanja:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{pr} + \vec{a}_c \quad (4.28)$$

Na osnovu jednačine (4.28) možemo napisati i diferencijalnu jednačinu kretanja materijalne tačke u neinercijalnom sistemu. Pri tome podjimo od diferencijalne jednačine u nepokretnom sistemu što je II Njutnov zakon:

$$m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{a}_{pr} + \vec{a}_c) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (4.29)$$

Odavde se jednostavno dobija diferencijalna jednačina za kretanje u neinercijalnom sistemu odnosno određivanje funkcije  $\vec{r}' = \vec{r}'(t)$  koja opisuje relativno kretanje:

$$m\vec{a}' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i - m\vec{a}_{pr} - m\vec{a}_c \quad (4.30)$$

ili u eksplicitnom obliku:

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i - m \frac{d^2 \vec{r}_o}{dt^2} - m\vec{\alpha} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.31)$$

U odsustvu spoljašnjih sila,  $\sum \vec{F}_i = 0$ , kretanje tela u inercijalnom sistemu će biti inercijalno odnosno ravnomerno pravolinijsko, a u neinercijalnom složeno. Razlog za to su inercijalne sile izražene sa poslednja četiri člana u jednačin (4.31).

Prva tri člana zavise isključivo od zakona kretanja neinercijalnog sistema u odnosu na inercijalni  $(\vec{a}_o, \vec{\alpha}, \vec{\omega})$ , pa se zajedno nazivaju prenosna sila inercije:

$$\vec{F}_{pr} = -m\vec{a}_o - m\vec{\alpha} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.32)$$

Ovde prvi član  $-m\vec{a}_o$  potiče od translatornog kretanja pokretnog sistema, drugi član  $-m\vec{\alpha} \times \vec{r}'$  potiče od promenljivog rotacionog kretanja sistema  $O'$  u odnosu na osu rotacije (tangencioni), a treći član  $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  od rotacionog kretanja sistema  $O'$  oko ose rotacije i naziva se centrifugalna sila inercije.

Četvrti član potiče od istovremenog kretanja neinercijalnog sistema  $O'$  (rotacije ugaonom brzinom  $\vec{\omega}$ ) i relativnog kretanja materijalne tačke u njemu i naziva se Koriolisova sila inercije,  $\vec{F}_c$ .

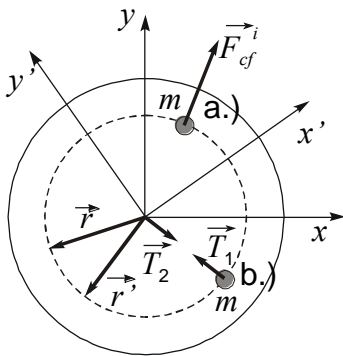
#### 4.5. Centrifugalna sila inercije.

Razmotrimo prvo neke primere centrifugalne sile inercije. Neka je materijalna tačka  $A$  vezana za osu stola koji može da rotira i po kome se tačka kreće bez trenja. Pri tome se tačka nalazi u žljebu ili je vezana kanapom koji je prisiljava da rotira, na stalnom rastojanju, zajedno sa stolom oko nepokretne ose  $z'$  koja se poklapa sa  $z$ , kao na slici 4.5. Ako je rotacija ravnomerna,  $\vec{\omega} = \text{const}$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\vec{v}_o = 0$ ,  $\vec{v}' = 0$  i  $\vec{r}' \perp \vec{\omega}$ , diferencijalna jednačina relativnog kretanja imaće sledeći oblik:

$$0 = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (4.33)$$

jer je  $\vec{v}' = 0$  i  $\vec{a}' = d^2 \vec{r}' / dt^2 = 0$ . Pošto je, zbog  $\vec{r}' \perp \vec{\omega}$ ,  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\omega^2 \vec{r}'$  diferencijalna jednačina kretanja će biti:

$$\vec{F} + m\omega^2 \vec{r}' = 0 \quad (4.34)$$



Slika 4.5. Centrifugalna sila inercije

a) U odnosu na pokretni sistem  $O'$ , materijalna tačka, kanap i posmatrač se nalaze u miru, pa jednačina (4.34) predstavlja uslov za ravnotežu materijalne tačke u neinercijalnom sistemu. Po zatezanju veze (kanapa) konstatuje se težnja tačke  $m$  da se udalji od ose rotacije pod dejstvom sile  $\vec{F}_{cf}^i$  u pravcu i smeru vektora  $\vec{r}'$  sa napadnom tačkom u  $m$ . Ovo je centrifugalna sila inercije, za koju ne postoji neposredan uzrok u drugom telu, već je kako smo već istakli rezultat kružnog kretanja neinercijalnog sistema.

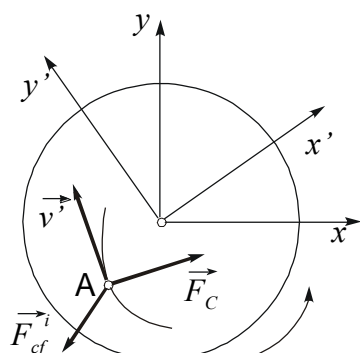
b) U odnosu na nepokretni sistem  $O$ , tačka vrši jednako kružno kretanje pod dejstvom centripetalne sile  $\vec{F}_{cp} = \vec{T}_1$ . Sila  $\vec{F}_{cp}$  deluje na tačku u smeru suprotnom od  $\vec{r}$ , a diferencijalna jednačina kretanja je  $m\vec{a}_n = \vec{F}_{cp} = -m\omega^2 \vec{r}$ . Osovina ( $O$ ) preko

sile zatezanja kanapa  $\vec{T}_1$ , dakle, deluje na materijalnu tačku m primoravajući je da se kreće po krugu poluprečnika  $\vec{r}$ . Materijalna tačka, preko sile zatezanja kanapa,  $\vec{T}_2$ , deluje na osovinu ( $O$ ) silom istog intenziteta, ali suprotnog smera (sila reakcije  $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$ ). Sila reakcije  $\vec{T}_2$  usmerena je od centra kružne putanje. Obe ove sile su aktivne sile i deluju kao akcija i reakcija.

Napomena: Pošto su  $m$  i  $\vec{\omega}$  konstantni,  $\vec{F}_{cf}^i$  zavisi samo od položaja tačke ili tela u obrtnom sistemu-proporcionalna je sa  $\vec{r}'$ . U krutom telu koje vrši rotaciono kretanje, u različitim tačkama, odnosno delićima tela javljaju se različite sile. Zbog njihove razlike u telu se javljaju mehanička naprezanja koja pri velikim ugaonim brzinama mogu da dovedu i do raspadanja tela.

#### 4.6. Koriolisova sila inercije.

Već smo istakli da Koriolisovo ubrzanje i Koriolisova sila potiču od istovremenog kretanja neinercijalnog sistema  $O'$  i relativnog kretanja materijalne tačke u njemu, brzinom  $\vec{v}'$ .



Slika 4.6. Koriolisova sila inercije

Razmotrimo slučaj kretanja sličan prethodnom primeru, ali sa  $\vec{v}' \neq 0$ , kao na priloženoj slici 4.6. Neka je  $\vec{\omega} = \text{const}$ ,  $\vec{v}_0 = 0$ ,  $\vec{v}' > 0$  i  $\vec{\omega} \perp \vec{r}'$ . Uočena tačka će se zbog  $\vec{\omega} \perp \vec{v}'$  kretati u  $x'O'y'$  ravni obrtnog sistema, pa će se i relativna brzina nalaziti u toj ravni. Diferencijalna jednačina kretanja u pokretnom sistemu će u tom slučaju biti:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \quad (4.35)$$

odnosno zbog uslova  $\vec{\omega} \perp \vec{r}'$  ovaj izraz možemo pisati u obliku:

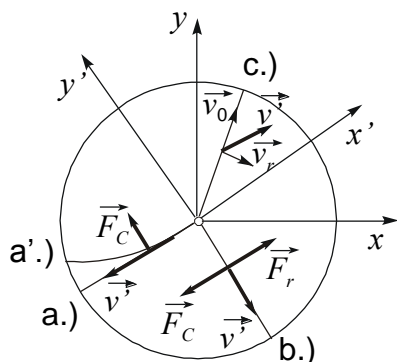
$$m\vec{a}' = \vec{F} + m\omega^2 \vec{r}' + 2m\vec{v}' \times \vec{\omega} \quad (4.36)$$

Dakle, posmatrač koji se nalazi na obrtnoj ploči,  $O'$ , uočava da se tačka A kreće pod dejstvom tri sile:

- sile uzajamnog dejstva,  $\vec{F}$ , sa drugim telima, koja ne zavisi od koordinatnog sistema,
- centrifugalne sile inercije  $\vec{F}_{cf}^i = m\omega^2 \vec{r}'$ , koja dejstvuje radijalno, u smeru vektora  $\vec{r}'$ ,
- Koriolisove sile inercije  $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ , koja potiče od relativnog kretanja tačke A u obrtnom sistemu  $O'$  brzinom  $\vec{v}'$  (istaknimo da za  $\vec{v}' = 0$  ova sila ne bi postojala, dok centrifugalna sila inercije postoji nezavisno od  $\vec{v}'$ ).

Pod dejstvom rezultante ove tri sile tačka A će se kretati po određenoj putanji u sistemu  $O'$ , a u nepokretnom sistemu kretaće se samo pod dejstvom sile  $\vec{F}$  ( $\vec{F}_{cf}^i$  i  $\vec{F}_C$  ne postoje), dakle i po drugačijoj putanji.

Koriolisova sila inercije se predstavlja vektorom normalnim na  $\vec{\omega}$  i na  $\vec{v}'$ , dakle leži u ravni kretanja materijalne tačke. Njen intenzitet iznosi  $2m\omega v' \sin(\vec{\omega}, \vec{v}')$  i biće jednak nuli kada je  $\vec{\omega} = 0$ ,  $\vec{v}' = 0$  ili ako su ova dva vektora međusobno kolinearna.



Slika 4.7. Koriolisova sila u slučaju kretanja kuglice po ploči koja rotira

Razmotrimo sada dejstvo Koriolisove sile na primeru kretanja kuglice po horizontalnoj ploči koja rotira oko  $z'$  ose. Neka se kuglica kreće bez trenja brzinom  $\vec{v}'$  u pravcu i smeru vektora  $\vec{r}'$ , kao u slučaju a) na priloženoj slici 4.7. U odnosu na nepokretni-inercijalni sistem kretanje će biti ravnomerno, po inerciji, duž pravca OA, jer obrtna ploča zbog odsustva trenja ne utiče na kretanje kuglice.

Medjutim, u odnosu na pokretni sistem, s obzirom da ploča "izmiče" kuglici u smeru kretanju kazaljke na satu, kuglica se kreće složeno po krivoj liniji-slučaj označen sa a'). Ovo skretanje sa prvobitnog pravca pripisuje se dejstvu Coriolisove

sile. Da bi se kuglica prinudila da se kreće duž radijusa potrebno je na nju delovati dopunskom silom  $\vec{F}_r$ , kao u slučaju b). To može da se postigne pomoću žljeba (ili šuplje kuglice na šipki).

Razmotrimo i slučaj c) sa slike kada se kuglica ne kreće po radijusu  $\vec{r}'$ , već sa njim zaklapa ugao  $\alpha$ . Relativna brzina kuglice se u tom slučaju može razložiti na radijalnu,  $\vec{v}'_r$ , i tangencionu komponentu,  $\vec{v}'_t$ :

$$\vec{v}' = \vec{v}'_r + \vec{v}'_t$$

Ovim komponentama brzine odgovaraju sledeće komponente Koriolisove sile:  $\vec{F}_{Cr} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_{rt}$  i  $\vec{F}_{Ct} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_t$ , pri čemu je lako zaključiti da je  $\vec{F}_{Cr}$  normalno na radijus, a  $\vec{F}_{Ct}$  usmereno duž radijusa. Pri tome je:  $\vec{F}_C = \vec{F}_{Cr} + \vec{F}_{Ct}$ .

#### 4.7. Uticaj obrtanja Zemlje na tela na njenoj površini.

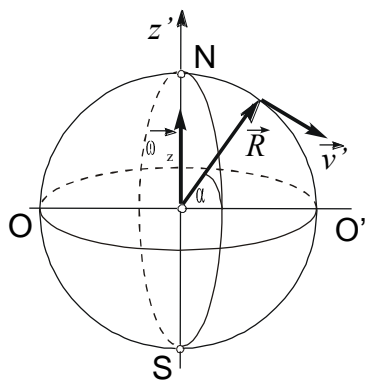
Zemlja predstavlja neinercijalan sistem jer se kreće ubrzano; kreće se po krivolinijskoj putanji (elipsi) oko Sunca što je revolucija i istovremeno vrši rotaciono kretanje oko sopstvene ose. To ima odgovarajuće posledice na tela koja se nalaze na njenoj površini. Od većeg interesa je rotacija oko sopstvene ose zbog veće ugaone brzine.

Pretpostavimo da je Zemlja sfera poluprečnika R i da se obrće konstantnom brzinom  $\vec{\omega}_z$  usmerenom od juga ka severu. Intenzitet ove ugaone brzine je:

$$\omega_z = \frac{2\pi}{T_z} = \frac{6.28}{24 \cdot 60 \cdot 60s} = 7,29 \times 10^{-5} s^{-1} \quad (4.37)$$

Ova ugaona brzina izaziva centrifugalno ubrzanje koje u tački na ekvatoru iznosi:

$$a_{cf} = \omega_z^2 R = 5^{-9} (s^{-2}) \times 6360 \times 10^3 (m) = 0,0337 (m/s^2) \quad (4.38)$$



Slika 4.8. Zemlja kao neinercijalni sistem

Ovo ubrzanje je relativno malo i predstavlja svega 0,32% od ubrzanja sile Zemljine teže ( $9,81 m/s^2$ ).

Intenzitet ubrzanja Koriolisove sile je  $a_c = 2\omega_z v' \sin \alpha$ , gde je  $\alpha$ -geografska širina mesta, a  $v'$  intenzitet relativne brzine posmatranog tela pri kretanju po meridijanu Zemlje. Za  $v' = 100 km/h$  ili  $28 m/s$ , po horizontalnom putu na  $\alpha = 60^\circ$  širine, biće:

$$a_c = 2 \times 7,3 \times 10^{-5} (s^{-1}) \times 28 (m/s) \times 0,87 = 3,6 \times 10^{-9} (m/s^2) \quad (4.39)$$

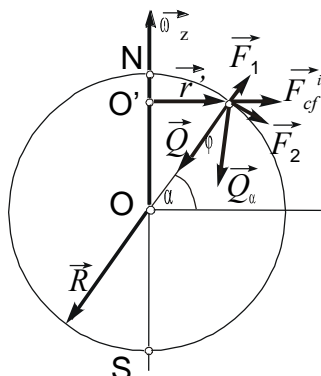
ili svega 0,03% od g. Ovo jeste mali uticaj, ali se može znatno manifestovati pri kretanju većim brzinama ili pri dugotrajnom uticaju na kretanje.

##### 4.7.1. Zavisnost težine tela od geografske širine.

Centrifugalna sila inercije može, u zavisnosti od geografske širine, različito da utiče na težinu tela na Zemljinoj površini. Na priloženoj slici 4.9 prikazani su vektori sile teže  $\vec{Q}$  i centrifugalne sile inercije na materijalnu tačku A. Neka je u ovom slučaju  $\vec{\omega}_z = \text{const}$ ,  $\vec{v}' = 0$ ,  $\vec{a}' = 0$  i  $\vec{a}_o = 0$ . Dakle, jednačina kretanja tela u neinercijalnom sistemu se svodi na:

$$\vec{Q} + m\omega_z^2 \vec{r}' = 0 \quad (4.40)$$

Rezultanta ove dve sile označena je sa  $\vec{Q}_\alpha$ , određuje efektivnu težinu tela i usmerena je izvan centra Zemlje. Ovo, izmedju ostalog, uzrokuje i skretanje viska na površini Zemlje od pravca normale na površinu.



Slika 4.9. Zavisnost težine tela od geografske širine

Centrifugalna sila inercije se može razložiti na dve komponente, jednu u pravcu radijusa odnosno normale na površinu,  $F_1$ , i druge u smeru tangente,  $F_2$ . Njihovi intenziteti su:

$$F_1 = F_{cf}^i \cos \alpha = m\omega_z^2 r' \cos \alpha = m\omega_z^2 R \cos^2 \alpha$$

$$i \quad F_2 = F_{cf}^i \sin \alpha = m\omega_z^2 R \cos \alpha \sin \alpha = m\omega_z^2 R \sin 2\alpha / 2$$

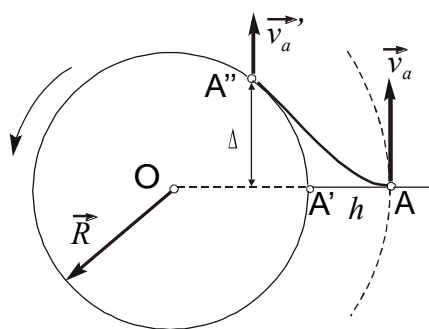
Komponenta  $F_1$  ima isti pravac a suprotan smer od  $\vec{Q}$  te smanjuje težinu tela i to na sledeći način:

$$Q'_\alpha = Q - F_1 = mg - m\omega_z^2 R \cos^2 \alpha = mg(1 - \omega_z^2 R \cos^2 \alpha / g) \quad (4.41)$$

odnosno posle zamene odgovarajućih veličina je:  $Q'_\alpha = mg(1 - 0,004 \cos^2 \alpha)$  što pokazuje da se težina tela može menjati za oko 4 promila, pri promeni geografske širine  $\alpha$  od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ . Ova sila je najveća na polovima, a telo je najlakše na ekvatoru.

Komponenta  $F_2$  deluje tangenciono u odnosu na površinu Zemlje i izaziva skretanje "viska" od normale. Intenzitet ove komponente takodje zavisi od geografske širine i najveći je za ugao  $2\alpha = \pi/2$ , odnosno  $\alpha = 45^\circ$ . Odstupanje sile  $Q'_\alpha$  od normale, izazvano silom  $F_2$ , je medjutim veoma malo i iznosi  $0,2^\circ$  na geografskoj širini od  $45^\circ$ .

#### 4.7.2. Uticaj Koriolisove sile na slobodno padanje tela.



Slika 4.10. Uticaj Koriolisove sile na slobodno padanje gledano iz nepokretnog sistema

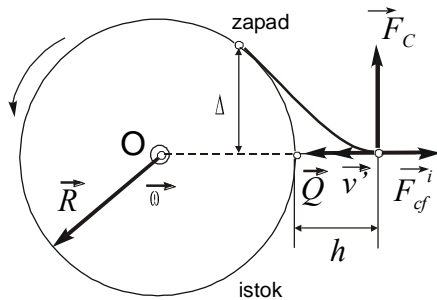
Eksperimenti pokazuju da telo koje slobodno pada skreće od vertikalnog pravca ka istoku i da to skretanje ( $\Delta$ ) zavisi od visine ( $h$ ) i geografske širine ( $\alpha$ ) mesta posmatranja. Predstavimo Zemlju sferom koja rotira oko ose,  $O$ , normalne na ravan papira, kao na slici 4.10. Posmatrač u nepokretnom sistemu tumačiće skretanje razlikom linijske brzine  $v_a$  koju telo ima i zadržava tokom padanja, a dolazi u tačku  $A'$  sa manjim radiusom odnosno manjom linijskom brzinom,  $v_a'$ . Ta razlika brzina je:

$$v_a - v_a' = \omega_z(R+h) - \omega_z R = \omega_z h$$

i izaziva pomeranje tačke  $A'$  u položaj  $A''$ , za rastojanje  $\Delta$  u odnosu na radius odnosno vertikalnu tačku  $A$ .

Medjutim u pokretnom sistemu  $O'$  vezanom za Zemlju, posmatrač konstatuje da na telo deluju i inercione sile i to centrifugalna sila inercije  $F_{cf}^i$  i Koriolisova sila  $F_C$ , kao što je to prikazano na slici 4.11.

Razlika  $Q - F_{cf}^i$  izaziva vertikalni pad sa ubrzanjem  $g' < g$ . Koriolisova sila je normalna na relativnu brzinu padanja tela,  $v'$ , i izaziva pomak ka istoku. Na polovima ovog efekta nema. Izračunaćemo ovaj pomak pri slobodnom padu tela. Diferencijalna jednačina kretanja u neinercijalnom sistemu  $O'$  biće:



Slika 4.11. Uticaj Koriolisove sile na slobodno padanje gledano sa Zemlje

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = m \vec{g} - m \vec{\omega}_z \times (\vec{\omega}_z \times \vec{r}') - 2m(\vec{\omega}_z \times \vec{v}') \quad (4.42)$$

Prva dva člana ove jednačine sa desne strane ne zavise od relativne brzine  $\vec{v}'$  i obzirom da se i  $\vec{r}'$  malo menja može se uzeti da je:

$$m \vec{g} - m \vec{\omega}_z \times (\vec{\omega}_z \times \vec{r}') = m \vec{g}' \quad (g < g') \quad (4.43)$$

Na taj način diferencijalna jednačina (4.42) prelazi, posle inverzije vektora u Koriolisovoj sili u sledeći oblik:

$$m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = m \vec{g}' + 2m \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \times \vec{\omega}_z \right) \quad (4.44)$$

Skraćivanjem sa  $m$  i integracijom ove jednačine dobijamo, sa tačnošću do na integracionu konstantu:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{g}' t + 2\vec{r}' \times \vec{\omega}_z \quad (4.45)$$

Ako ovaj izraz uvrstimo u poslednji član jednačine (4.44) dobijamo:

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \vec{g}' + 2t(\vec{g}' \times \vec{\omega}_z) + 4(\vec{r}' \times \vec{\omega}_z) \times \vec{\omega}_z \quad (4.46)$$

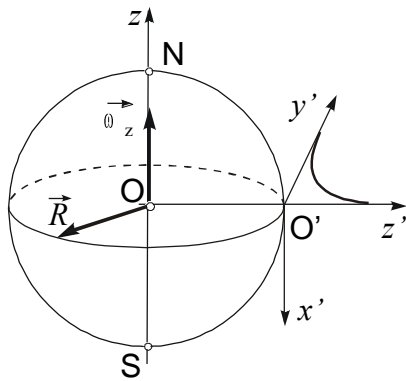
Kako je zadnji član srazmeran sa kvadratom  $\omega_z$ , a  $\omega_z$  je malo, možemo ga zanemariti, pa integracijom preostale jednačine dobijamo:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{g}' \cdot t + (\vec{g}' \times \vec{\omega}_z) \cdot t^2 + C_1 \quad (4.47)$$

Ovde u  $C_1$  ulazi i konstanta iz prethodne integracije. Iz početnih uslova za  $t=0$  je  $v_o'=0$  i  $C_1=0$ . Još jednom integracijom ovog izraza konačno dobijamo:

$$\vec{r}' = \vec{g}' \frac{t^2}{2} + (\vec{g}' \times \vec{\omega}_z) \frac{t^3}{3} + C_2 \quad (4.48)$$

Ovo je vektorska jednačina i da bi smo videli šta ona predstavlja uvedimo pokretni sistem kao na slici 4.12. Kako su za ovaj sistem početni uslovi sledeći:  $v_o'=0$ ,  $x_o'=0$ ,  $y_o'=0$  i  $z_o'=h$ , vektorska jednačina (4.48) prelazi u sledeće tri skalarne:



Slika 4.12. Skretanje tela pri slobodnom padanju

$$\begin{aligned}
 x' &= 0 \\
 y' &= g' \cdot \omega_z \frac{t^3}{3} \\
 z' &= h - g' \cdot \frac{t^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.49}$$

jer je vektorski proizvod  $(\vec{g}' \times \vec{\omega}_z)$ , prema priloženoj slici, usmeren duž  $y'$ -ose i određuje skretanje tela ka istoku (za severne geografske širine).

Može se takođe jednostavno pokazati da je, za telo na geografskoj širini  $\alpha$ , ovo skretanje proporcionalno još i sa  $\cos \alpha$ . Eliminisanjem vremena  $t$  iz skalarnih parametarskih jednačina dobija se, jednostavno,

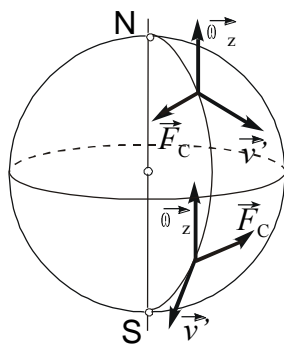
eksplicitna jednačina trajektorije tela u sledećem obliku:

$$z' = h - \frac{1}{2} g' \left( \frac{3y'}{g' \omega_z} \right)^{3/2}
 \tag{4.50}$$

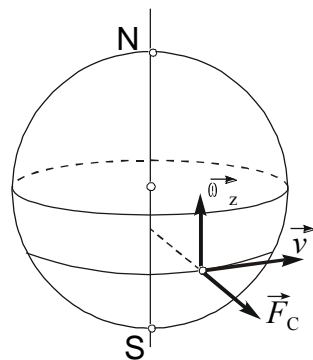
što predstavlja takozvanu polukubnu parabolu.

#### 4.7.3. Uticaj Koriolisove sile na kretanje na Zemljinoj površini.

Na Zemlji, zbog rotacije, deluju inercione sile  $\vec{F}_{cf}^i$  i  $\vec{F}_C$ . Kao što smo već istakli Koriolisova sila posebno utiče na oblik trajektorije kretanja i kao takva se manifestuje u raznim prirodnim pojavama. Na primer reke koje teku duž meridijana od severa ka jugu, potkopavaju više desnu obalu na severnoj hemisferi, a levu na južnoj. Ovo se lako da zaključiti sa slike 4.13. jer je  $\vec{F}_C$  data vektorskim proizvodom  $\vec{v}'$  i  $\vec{\omega}_z$  te je normalna na oba ova vektora. Isto se dešava i sa železničkim šinama.



Slika 4.13. Koriolisova sila na severnoj i južnoj hemisferi

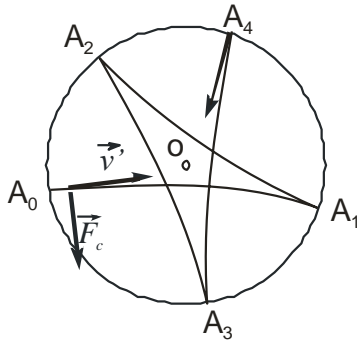


Slika 4.14. Uticaj Koriolisove sile na kretanje po Zemljinoj površini

Unutrašnjost šina je, zbog dugotrajnog dejstva Koriolisovih sila, ispravljena. Takođe, promene pravca vetrova i morskih struja nastaju kao posledica delovanja Koriolisovih sila, slike 4.13. i 4.14.

#### 4.7.4. Fukoovo (Foucault) klatno.

Francuz Fuko (Foucault) je obrtanje Zemlje eksperimentalno dokazao pomoću klatna, i to na sledeći način. Telo u obliku kupe obešeno je o dugačak kanap (za vrh crkvene kupole, iznutra) čime je postignut veliki period oscilovanja, kao i velika brzina  $\vec{v}'$  pri prolasku kroz ravnotežni položaj. Dužim posmatranjem je ustanovljeno da se ravan oscilovanja klatna obrće u smeru kretanja kazaljke na satu (gledano odozgo, kao na slici 4.15.). Ugaona brzina obrtanja ravni oscilovanja zavisi od geografske širine po relaciji:  $\omega_k = \omega_z \sin \alpha$ .



Slika 4.15. Uticaj Koriolisove sile na Fukoovo klatno

Iz nepokretnog sistema (Sunce) obrtanje ravni oscilovanja klatna se objašnjava rotacijom Zemlje u suprotnom smeru. U pokretnom sistemu, međutim, rotaciju Zemlje je nemoguće konstatovati pa se obrtanje ravni oscilovanja objašnjava dejstvom Koriolisove sile  $\vec{F}_C = 2m(\vec{v}' \times \vec{\omega}_z)$ . Gde je skretanje najveće? U blizini centra odnosno ravnotežnog položaja, jer je tu relativna brzina tela,  $\vec{v}'$ , najveća.

Dakle, II Njutnov zakon se u neinercijalnim sistemima ne može primeniti bez uvođenja inercijalnih sila.

## V

### ZAKONI ODRŽANJA U PRIRODI

Njutnovim zakonima mehanike mogu da se opišu najraznovrsniji oblici kretanja. Medjutim javljaju se i poteškoće, kao na primer:

a) Kod nedovoljno poznatih zakonitosti i oblika sila, kao kod neelastičnog sudara.

b) Sile su često složene funkcije,  $\vec{F} = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , pa je rešavanje diferencijalne jednačine ponekad ograničeno, čak i kada znamo oblik funkcija, mada često ni to ne znamo.

Postavlja se pitanje, da li je kretanje moguće odrediti i na osnovu drugih prirodnih zakonitosti. Jedna mogućnost je primena zakona održanja impulsa i energije. U prirodi postoji nekoliko zakona održanja: impulsa, energije, momenta impulsa, broja bariona, naelektrisanja itd. Ovi zakoni su obično posledica svojstava simetrije pa imaju i niz prednosti u odnosu na Njutnove zakone. Te se prednosti izmedju ostalog ogledaju u sledećem:

- 1) Zakoni održanja ne zavise od oblika putanje niti oblika sila, pa često mogu da dovedu do opštijih i potpunijih zaključaka o procesu, nego diferencijalne jednačine kretanja. (Na primer zakon održanja energije daje zaključak o nemogućnosti realizacije "perpetuum mobile" prve vrste).
- 2) Pošto ne zavise od karakteristika sila mogu se primeniti i na prirodne pojave gde sile nisu poznate. Primer su elastični i neelastični sudari.
- 3) Zakoni održanja su invarijantni-nezavisni u odnosu na transformacije koordinata pa su posebno važni za ispitivanje novih, nepoznatih pojava.
- 4) Na osnovu zakona održanja mogu se rešavati izvesni problemi kretanja čestica jednostavnije nego na osnovu Njutnovih jednačina kretanja.

Dakle, mehanika se može postaviti i drugačije nego što je to Njutn učinio, preko energije i impulsa, kao što su to učinili Hamilton i Lagrange.

Njutnova mehanika se ipak i dalje koristi i to iz nekoliko razloga:

- pojmovi impulsa i energije su složeniji od pojmova sile i ubrzanja,
- matematički aparat analitičke mehanike je, u principu, daleko složeniji nego u Njutnovoju vektorskoju mehanici,
- dobro opisuje veliki broj primera kretanja.

#### 5.1. Rad sile. Konzervativne i nekonzervativne sile.

Na isto telo mogu da deluju istovremeno različite sile. Ono se kreće pod dejstvom njihove rezultante. Koliki je pri tome uticaj ili učinak pojedinih sila može se utvrditi uvodjenjem pojma mehaničkog rada.

Kada se materijalna tačka ili telo kreće pod dejstvom sile  $\vec{F} = \text{const}$  po pravoj liniji i pri tome predje rastojanje  $\vec{s}$ , učinak sile ili rad na tom rastojanju predstavlja skalarni proizvod sile i rastojanja i izražava se na sledeći način:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\vec{F}, \vec{s}) = F \cdot s \cdot \cos \alpha \quad (5.1)$$

gde je  $\alpha$  ugao izmedju pravca kretanja i pravca dejstva sile. Rad sile dakle može biti pozitivan,  $A > 0$  za  $\alpha < \pi/2$ , jednak nuli,  $A = 0$  za  $\alpha = \pi/2$  ili negativan (za sile otpora),  $A < 0$  za  $\alpha > \pi/2$ . Rad je skalarna veličina.

Ukoliko je sila promenljiva i zavisi od položaja tela,  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s})$ , a pomeranje se vrši duž krive linije, tada se ukupni rad, u prvoj aproksimaciji, može izraziti kao zbir elementarnih radova  $\Delta A_i$  na konačnom broju delova puta  $\Delta \vec{s}_i$  na koje se podeli  $\vec{s}$

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \Delta s_i \cdot \cos(\vec{F}_i, \Delta \vec{s}_i) \quad (5.2)$$

pri čemu su  $\Delta s_i$  dovoljno mali da se mogu smatrati pravolinijskim rastojanjima,  $F_i$  predstavlja srednju vrednost sile na  $i$ -tom delu puta, a  $n$  predstavlja ukupan broj tih delova,  $\Delta s_i$ .

Prava vrednost izvršenog rada dobija se odavde kao granični slučaj kada  $\Delta s_i \rightarrow 0$ , a  $n \rightarrow \infty$  (jer se kriva linija ne može podeliti na konačan broj pravolinijskih delova), pa je:

$$A = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}_i = \int_{s_1}^{s_2} \delta A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (5.3)$$

gde je sila  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s})$  poznata funkcija položaja. Oznaka  $\delta A$  označava da  $\vec{F} \cdot d\vec{s}$  nije u opštem slučaju totalni diferencijal neke funkcije koordinata,  $\delta A \neq d(\vec{F} \cdot \vec{s})$ . Oznake  $s_1$  i  $s_2$  su početna i krajnja tačka putanje  $\vec{s}$ .

Neka na materijalnu tačku, koja se kreće translatorno, istovremeno deluje više sila čija je rezultanta  $\vec{F}$ . Elementarni rad  $\delta A$  rezultante  $\vec{F}$  biće na osnovu distributivnog zakona za skalarni proizvod:

$$\delta A = \left( \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \cdot \Delta \vec{s} = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i \cdot \Delta \vec{s}) = \sum_{i=1}^n \delta A_i \quad (5.4)$$

Rad rezultante sila jednak je zbiru radova njenih komponenti. Dakle, rad je aditivna veličina, pa se udeo svake komponente u njemu može odrediti.

Dimenzije radu su prema definicionoj formuli:

$$[A] = [F][s] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$$

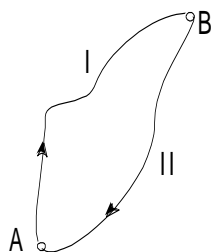
U SI sistemu jedinica za rad je 1 Džul = 1J = N.m.

Videli smo da rad zavisi od predjenog rastojanja. Ako rad sile  $F$  pri pomeranju materijalne tačke iz proizvoljnog položaja (I) u položaj (2) nije jednak nuli i ne zavisi od oblika putanje i veličine puta, takva sila se naziva KONZERVATIVNA.

Ukupan rad po zatvorenoj putanji, prema priloženom crtežu, može se izraziti kao:  $A = A_{1-I-2} + A_{2-II-1}$ . Iz definicije rada je zbog znaka kosinusa promena smera putanje ekvivalentna promeni predznaka rada:

$$A_{2-II-1} = - A_{1-II-2}$$

$$A = A_{1-I-2} - A_{1-II-2} = 0$$



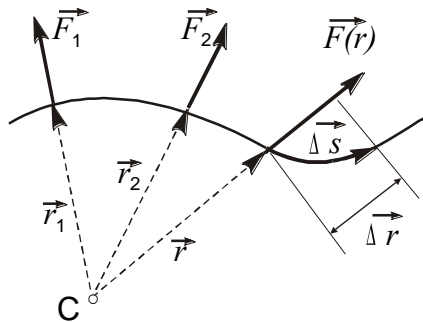
Slika 5.1. Rad po zatvorenoj putanji

Pošto kod konzervativnih sila rad ne zavisi od oblika putanje sledi da je rad konzervativne sile po zatvorenoj putanji  $L$  jednak nuli, odnosno možemo pisati da je:

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = A_{1-I-2} + A_{2-II-1} = 0 \quad (5.5)$$

Iz ovog izraza matematički sledi da je podintegralni izraz  $\vec{F} \cdot d\vec{s} = dA$  tj. elementarni rad konzervativne sile predstavlja totalni diferencijal odgovarajuće funkcije koordinata.

Kao primer konzervativnih sila navedimo centralne sile. Sila je centralna ako njen pravac dejstva za vreme kretanja tela prolazi kroz jednu nepokretnu tačku u prostoru (C), slika 5.2., koja se naziva centar sile, odnosno ako se može izraziti kao:



Slika 5.2. Rad centralne sile

$$\vec{F} = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (5.6)$$

Elementni rad centralne sile se može izraziti na sledeći način:

$$\Delta A = \vec{F}(r) \cdot \Delta \vec{s} = F(r) \Delta s \cdot \cos(\vec{F}, \Delta \vec{s})$$

gde je  $\Delta s \cdot \cos(\vec{F}, \Delta \vec{s}) = \Delta s \cdot \cos(\vec{r}, \Delta \vec{s}) = \Delta r$  Otuda je:  $\Delta A = F(r) \cdot \Delta r$ , odnosno:

$$A = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum F(r_i) \Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$$

Pošto podintegralna funkcija zavisi samo od r, a ne i od oblika i veličine puta, sledi da su centralne sile konzervativne. Centralne sile su gravitacione, elastične, elektrostatičke, itd. Sile trenja pošto zavise od brzine, nisu konzervativne. One imaju uvek smer suprotan od smera kretanja pa je  $\cos(\vec{F}, d\vec{s}) = \cos\pi = -1$ . Skalarni proizvod sile i rastojanja je uvek negativan, pa je njegov integral na proizvoljnoj zatvorenoj putanji različit od nule, što je karakteristika nekonzervativnih sila.

## 5.2. Snaga ili efekat rada.

Veličina koja karakteriše brzinu izvršenog rada od strane sile naziva se SNAGA ili EFEKAT RADA. Snaga P neke sile  $\vec{F}$  brojno je jednaka radu izvršenom u jedinici vremena:

$$P = \frac{\delta A}{dt} \quad (5.7)$$

odnosno iz definicije rada:

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (5.8)$$

gde je  $\vec{v}$  brzina kretanja čestice, a  $\vec{F}$  sila koja na nju dejstvuje.

Ukoliko nam je poznata snaga neke sile,  $P=P(t)$ , rad te sile se može na osnovu jednačine (5.7) izraziti kao:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt \quad (5.9)$$

Dimenzije snage su, prema definiciji  $[P]=ML^2T^{-3}$ . Jedinica u SI sistemu je W (vat)=J/s.

### 5.3. Energija mehaničkog kretanja.

Videli smo da je jedna od karakterističnih veličina pri translatorsnom kretanju impuls,  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Medjutim ova dinamička veličina ne može biti prava mera za sve oblike kretanja. Kod izolovanog sistema, ukupan impuls može biti nula a da se tela unutar njega ipak kreću. Ova činjenica nameće potrebu definisanja nove fizičke veličine koja bi bolje opisivala stanje kretanja fizičkih tela i njihovih sistema i posebno odnose medju njima, kao i transformacije mehaničkog kretanja tela u druge oblike kretanja materije i njihov kontinuitet. Ta veličina je ENERGIJA.

Energija se definiše kao sposobnost tela da vrši rad. Mehanička energija karakteriše kretanje tela i njegovu interakciju sa drugim telima. Iz iskustva je poznato da telo može imati energiju ili usled svog kretanja - **kinetička energija**, ili usled svog položaja u polju neke potencijalne sile - **potencijalna energija**.

#### 5.3.1. Kinetička energija.

Dejstvo sile  $F$  na česticu mase  $m$  manifestuje se kao promena njenog impulsa (odnosno brzine od  $|\vec{v}_1|$  do  $|\vec{v}_2|$ ). Rad sile se ulaže u promenu brzine, a mera te promene je kinetička energija,  $E_k$ . Kinetička energija se, dakle, može izraziti pomoću rada sile na promeni brzine. Elementarni rad sile je:

$$A = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \quad (5.10)$$

pri čemu je iskorišćena relacija  $d\vec{s}/dt = \vec{v}$ . Veličina  $mv^2/2 = E_k$  se naziva kinetička energija tela koje se kreće brzinom  $\vec{v}$ . Integracijom izraza (5.10) sledi:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$$

Dakle rad sile izvršen na slobodnoj čestici mase  $m$  jednak je promeni njene kinetičke energije.  $E_k$  zavisi od mase i kvadrata brzine čestice. Za izračunavanje  $E_k$  nije važno na koji je način čestica stekla brzinu  $\vec{v}$ , znači  $E_k$  je funkcija njenog stanja kretanja. Na osnovu gornjeg izraza,  $E_k$  ne može biti negativna,  $E_k \geq 0$ .

Znamo da brzina,  $\vec{v}$ , zavisi od izabranog koordinatnog sistema. Dakle,  $E_k$  će takodje zavisiti od sistema - ima relativan karakter.

Kinetička energija je aditivna fizička veličina. Za sistem od  $n$ -čestica je:

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_{ki} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (5.11)$$

Dimenzije i jedinice za kinetičku energiju su iste kao i za mehanički rad.

#### 5.3.2. Potencijalna energija.

To je energija koja zavisi samo od položaja čestice u odnosu na druga tela sa kojima interaguje, bilo neposrednim kontaktom (opruga), bilo posredstvom fizičkog polja (gravitaciono polje). Fizičko polje je prostor u kome se manifestuje dejstvo jednog tela na druga bez neposrednog kontakta i karakteriše se jačinom polja. Potencijalna energija,  $U$  ili  $E_p$ , se meri radom sila interakcije

potrebno da bi se čestica premestila iz jedne tačke prostora (sa vektorom položaja  $\vec{r}_0$ ) u drugu tačku ( $\vec{r}_1$ ).

S obzirom da rad konzervativnih sila ne zavisi od oblika putanje, već samo od početnog i krajnjeg položaja, u slučaju konzervativnih sila taj rad se može izraziti kao razlika vrednosti iste funkcije  $U(\vec{r})$  u početnom i krajnjem položaju i definiše se sa:

$$|\Delta A| = U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (5.12)$$

Postavlja se pitanje koju tačku uzeti za  $\vec{r}_0$ . Pošto se izvršeni rad posmatra kao razlika vrednosti funkcije  $U$ , isti rezultat se može dobiti za različite apsolutne vrednosti energije. Dakle,  $E_p$  može biti poznata do na određenu konstantu i fizički smisao ima samo razlika potencijalne energije za dva položaja, odnosno:

$$U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = U(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - U(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_0} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (5.13)$$

Dakle, rad sile interakcije vrši se na račun smanjenja funkcije  $U(\vec{r})$  pri pomeranju čestice od  $\vec{r}_1$  do  $\vec{r}_2$ . Diferenciranjem izraza (5.13) dobijamo:

$$-dU(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dA \quad (5.14)$$

Ovde je  $dA$  totalni diferencijal jer je sila konzervativna. Vidimo da funkcija  $U(\vec{r})$  ima dimenzije rada i predstavlja veličinu koja se naziva potencijalna energija čestice. Usled neodređenosti konstante  $U(\vec{r}_0)$  referentni nivo potencijalne energije može biti proizvoljno izabran. Uobičajeno je da se u centralnim poljima za referentni nivo uzme vrednost u  $\vec{r}_0 \rightarrow \infty$  (gde je  $U=0$ ). U tom slučaju je:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = A \quad (\vec{r} \rightarrow \infty) \quad (5.15)$$

Za ovakav referentni nivo potencijalna energija je uvek pri privlačenju čestice negativna i jednaka je radu sile interakcije potrebnom da česticu iz beskonačnosti prevedu u tačku sa vektorom položaja  $\vec{r}$ . Prostor u kome deluje neka konzervativna sila naziva se potencijalno polje.

#### ODNOS SILE I POTENCIJALNE ENERGIJE

Svakoj tački potencijalnog polja odgovara sa jedne strane  $\vec{F}(\vec{r})$ , a sa druge  $U(\vec{r})$ . Između njih mora postojati određen odnos. Ovaj odnos sledi iz svojstava konzervativnih sila da rad sile ne zavisi od oblika puta, već od položaja i da se vrši na račun smanjenja potencijalne energije, odnosno da je rad konzervativne sile totalni diferencijal odgovarajuće funkcije.

Pod navedenim uslovom, dakle za slučaj konzervativne sile, kada je rad sile totalni diferencijal, odnos sile i potencijalne energije sledi neposredno iz izraza (5.14). U tom slučaju možemo pisati da je:

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \frac{dU(\vec{r})}{dr} \vec{r}_0 \quad (5.16)$$

Ovo važi za proizvoljan pravac u prostoru, a za pravce duž koordinatnih osa će biti:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}, \quad F_y = -\frac{dU}{dy}, \quad F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Dakle, možemo pisati, uz prelazak na parcijalne izvode:

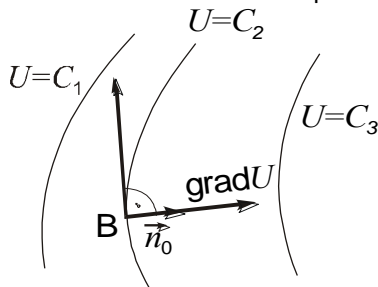
$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = - \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right\} \quad (5.17)$$

Vektor sa desne strane se naziva gradijent skalara  $U(x,y,z)$  i označava sa  $\text{grad}U$  ili nabla -  $\nabla U$ :

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \text{grad}U = -\nabla U \quad (5.18)$$

Fizički smisao vektora  $\text{grad}U$  dobićemo iz sledeće analize. Neka je  $U(\vec{r})=U(x,y,z)=\text{const}=C$  jednačina površine čije sve tačke imaju istu vrednost potencijalne energije - ekvipotencijalna površina. Menjanjem  $C$  dobija se beskonačan broj ekvipotencijala, koje se ne seku, kao što je to ilustrovano na slici 5.3. Kroz jednu tačku polja zbog jednoznačnosti funkcije  $U(\vec{r})$  može se povući samo jedna ekvipotencijala.

Ako čestica učini pomak  $d\vec{r}$  po ekvipotencijali, izvršeni rad mora biti jednak nuli:



$$dA = -\text{grad}U \cdot d\vec{r} = -dU(\vec{r}) = 0$$

jer je  $U(\vec{r})=\text{const}$ , a  $dU=0$ . Ovo znači da je  $\text{grad}U \perp d\vec{r}$ . Dakle, vektor  $\text{grad}U$  je normalan na tangentu povučenu na ekvipotencijalu. Ako u tački B povučemo normalu u smeru u kome  $U(\vec{r})$  raste, možemo pisati da je:

$$\text{grad}U = |\text{grad}U| \cdot \vec{n}_0$$

Slika 5.3. Ekvipotencijalne površine i gradijent

Neka se čestica pomeri duž normale za  $d\vec{n}=dn \cdot \vec{n}_0$ , izvršeni rad je jednak:

$$dA = \text{grad}U \cdot dn \cdot \vec{n}_0 = dU \neq 0$$

Zbog pretpostavke da je  $dU>0$ ,  $\text{grad}U$  ima smer u kome  $U(\vec{r})$  raste. Iz zadnjeg izraza je takodje:

$$\frac{dU}{dn} = \text{grad}U \cdot \vec{n}_0 = |\text{grad}U| \quad (5.19)$$

Intenzitet gradijenta je jednak izvodu potencijalne energije, skalarne funkcije  $U(\vec{r})$  po rastojanju  $n$ . Dakle,  $\text{grad}U$  je vektor koji karakteriše pravac i smer najbrže promene skalara  $U(\vec{r})$  u polju konzervativne sile,  $\vec{F}(\vec{r})$ .

#### PRIMERI POTENCIJALNE ENERGIJE

Konkretan izraz za potencijalnu energiju odnosno funkciju  $U(\vec{r})$  zavisi od zakona konzervativne sile  $\vec{F}(\vec{r})$ . Neka je, na primer, sila oblika  $\vec{F}(\vec{r})=-k\vec{r}$ , što je restituciona sila elastične opruge, i neka se kretanje vrši duž x-ose. Za nju je:

$$-kx = \frac{dU}{dx}$$

odakle je

$$U(x_2) - U(x_1) = k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) \quad (5.20)$$

Obično se za referentni nivo uzima vrednost energije u ravnotežnom položaju,  $x_1$ , gde je  $U(x_1)=0$ , pa je:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5.21)$$

Dakle, potencijalna energija je srazmerna kvadratu rastojanja i ne zavisi od smera tog rastojanja.

Neka je u drugom slučaju u pitanju gravitaciona sila,  $\vec{F} = m\vec{g}$ . U slučaju da se telo mase  $m$  kreće neposredno u blizini površine Zemlje, gde je  $\vec{g}$  konstantno i ako se za nulti nivo uzme energija na samoj površini, jednostavnom integracijom, kao u (5.20), se za potencijalnu energiju tela, na visini  $h$ , dobija sledeći izraz:

$$U = mgh \quad (5.22)$$

#### 5.4. Zakon održanja mehaničke energije.

U opštem slučaju čestica ima i kinetičku i potencijalnu energiju. Njihov zbir je ukupna mehanička energija. Na primer telo koje slobodno pada u gravitacionom polju, u blizini površine Zemlje, ima ukupnu mehaničku energiju jednaku:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh \quad (5.23)$$

Ova dva vida energije, kinetička i potencijalna, mogu prelaziti jedan u drugi. Kako je za slobodno padanje tela sa visine  $h_0$  njegova brzina na površini Zemlje jednaka:

$$v' = \sqrt{2gh_0}$$

sledi da je stečena kinetička energija jednaka:

$$\frac{mv'^2}{2} = \frac{m(\sqrt{2gh_0})^2}{2} = mgh_0 \quad (5.24)$$

odnosno jednaka je početnoj potencijalnoj energiji čestice. Dakle, u slučaju slobodnog padanje, ili hitca naviše, energija se transformiše iz jednog vida u drugi, ali tako da je njihov zbir stalan:

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const.} \quad (5.25)$$

Ovo je ujedno u skladu sa zakonom o održanju energije, koji ćemo upravo izvesti.

Posmatrajmo prvo slučaj jedne čestice. Ako na nju deluje takva sila da je jedan njen deo ( $\vec{F}$ ) jednak izvodu potencijalne energije (konzervativne sile) a drugi ( $\vec{F}'$ ) nije, jednačina kretanja čestice glasi:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}' + \vec{F} = \vec{F}' - \text{grad}U \quad (5.26)$$

Ako ovu jednačinu pomnožimo skalarno sa  $d\vec{r}$ , dobijamo sledeći izraz

$$\frac{md\vec{v} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}' \cdot d\vec{r} - \text{grad}U \cdot d\vec{r} \quad (5.27)$$

Imajući u vidu da je  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  i  $\text{grad}U \cdot d\vec{r} = dU$ , dolazimo do sledećeg izraza:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) + dU = \vec{F}' \cdot d\vec{r} \quad (5.28)$$

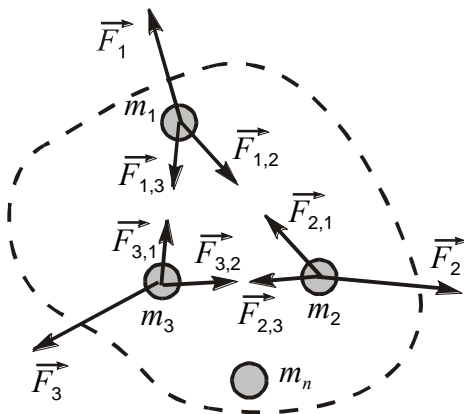
odnosno:

$$d(E_k + U) = \delta A \quad (5.29)$$

Ukoliko je rad  $\delta A$  spoljašnjih, nekonzervativnih sila jednak nuli sledi iz zadnjeg izraza da je:

$$E = E_k + U = \text{const} \quad (5.30)$$

Razmotrimo zakon održanja ukupne mehaničke energije za jedan sistem od  $n$ -čestica, masa  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Neka ove čestice uzajamno interaguju silama  $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{13}, \dots, \vec{F}_{n,n-1}$ , i neka na svaku



Slika 5.4. Sistem od  $n$  čestica

od njih dejstvuje spoljašnja sila  $\vec{F}_i$ , kao na slici 5.4. Prema drugom Njutnovom zakonu, jednačina kretanja svake čestice sistema biće oblika:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i' \quad (5.31)$$

gde su  $\vec{F}_{ij}$  unutrašnje sile uzajamnog dejstva čestica, a  $\vec{F}_i'$  rezultanta spoljašnjih sila na  $i$ -tu česticu. Očigledno je da ćemo imati  $n$  jednačina oblika (5.31), po jednu za svaku česticu.

Neka pod dejstvom ovih sila mehanički sistem predje iz jedne konfiguracije u drugu, vrlo blisku. Svaka čestica je pri tome napravila odgovarajuće elementarno pomeranje  $d\vec{r}_i$ , a svaka sila je izvršila odgovarajući rad koji predstavlja skalarni proizvod vektora sile i vektora pomeranja.

Pomnožimo svaku od jednačina (5.31) sa odgovarajućim pomerajem  $d\vec{r}_i$ . Dobićemo drugi sistem jednačina oblika:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i \quad (5.32)$$

Kako je  $d\vec{r}_i/dt = \vec{v}_i$  iz jednačina (5.32) dalje sledi:

$$m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i' \cdot d\vec{r}_i \quad (5.33)$$

Sabiranjem srodnih članova ovog sistema, sledi:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \sum_j \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i \cdot d\vec{r}_i \quad (5.34)$$

Leva strana ovog izraza predstavlja promenu kinetičke energije sistema:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \cdot d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^n dE_{ki} = dE_k \quad (5.35)$$

Prvi član na desnoj strani jednačine (5.34) predstavlja elementarni rad konzervativnih sila uzajamnog dejstva

$$\sum_{i=1}^n \sum_j \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ii} = \sum_{i=1}^n dA_{ui} = dA_u = -dU \quad (5.36)$$

Ovaj zbir u opštem slučaju nije jednak nuli iako je  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$  jer pomeraji ne moraju biti isti,  $d\vec{r}_i \neq d\vec{r}_j$ .

Drugi član na desnoj strani izraza (5.36) predstavlja rad spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}'_i \cdot d\vec{r}_i = dA_s \quad (5.37)$$

Dakle, imaćemo da je  $dE_k = dA_u + dA_s = -dU + dA_s$ . Ako uvedemo uobičajenu oznaku T za kinetičku energiju i U za rad konzervativnih sila tj. unutrašnju ili potencijalnu energiju, a rad spoljašnjih sila izrazimo kao proizvod rezultujuće spoljašnje sile  $\vec{F}'$  i rezultujućeg pomaka  $d\vec{r}$ , izraz (5.34) možemo pisati u obliku:

$$d(T+U) = \vec{F}' \cdot d\vec{r} \quad (5.38)$$

Tako je elementarni rad izvršen od strane spoljašnjih, nekonzervativnih sila  $\vec{F}'$  jednak priraštaju kinetičke i potencijalne energije sistema. Zbir u zagradi označava se kao ukupna mehanička energija sistema:

$$E = T + U$$

Kada na sistem deluju samo konzervativne (potencijalne) sile, mehanička energija sistema je konstanta kretanja. Ova tvrdnja predstavlja zakon o održanju mehaničke energije sistema u polju konzervativnih sila:

$$E = T + U = \text{const} \quad (5.39)$$

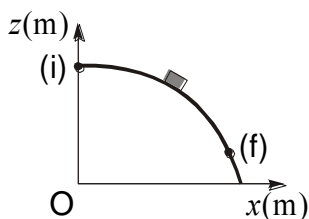
Pri prelazu iz jednog u drugo stanje mogu da se menjaju kinetička i potencijalna energija, svaka za sebe, ali njihov zbir ostaje stalan. Ako se, na primer, kinetička energija sistema poveća za  $\Delta T$ , za istu vrednost mora da se smanji potencijalna energija,  $\Delta U = -\Delta T$ . Obratimo pažnju na činjenicu da zakon važi samo kada su sile koje deluju u sistemu konzervativne ili potencijalne sile (kod kojih rad zavisi samo od početnog i konačnog stanja, ne i od putanje). Kada postoje nekonzervativne sile, na primer sile trenja, zbir kinetičke i potencijalne energije nije stalan. O tome govori termodinamika.

Zakon održanja mehaničke energije pruža značajnu pomoć u rešavanju različitih problema dinamike.

PRIMER 1: Čestica mase  $m = 1 \text{ kg}$ . klizi bez trenja po paraboličnom žljebu oblika  $z=B-Ax^2$ , gde je  $B=25\text{m}$  i  $A=5\text{m}$ . Čestica počinje da klizi sa nultom početnom brzinom iz tačke sa koordinatom  $x=0$ , videti sliku 5.5. Kolika je brzina čestice u tački sa koordinatom  $x= 2\text{m}$ ?

Rešavanje ovog zadatka po drugom Newton-ovom zakonu bilo bi veoma složeno. Zakon očuvanja mehaničke energije daje rešenje brže i jednostavnije.

Osnovno što treba uraditi je izjednačiti mehaničku energiju na početku ( $E_i$ ) i kraju ( $E_f$ ) kretanja:



Slika 5.5. Kretanje čestice po žljebu

$$E_i = E_f \text{ odnosno } T_i + U_i = T_f + U_f$$

gde  $U$  označava potencijalnu energiju čestice u blizini Zemljine površine, u odnosu na površinu Zemlje gde je  $U(z=0)=0$ . Za posmatrani slučaj je:

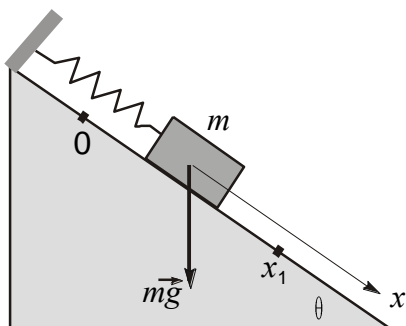
$$0 + mgz_i = \frac{mv^2}{2} + mgz_f$$

Tražena brzina je odavde:

$$v = \sqrt{2g(z_i - z_f)}$$

Kako je:  $z_i=z(x=0)=B=25\text{m}$  i  $z_f=z(x=2)=B-4A=5\text{m}$ , to je tražena brzina  $v = 19,8 \text{ m/s}$ .

PRIMER 2. Telo mase  $m$  nalazi se na strmoj ravni ugla nagiba  $\theta$ . Oprugom je prikačeno za nepokretni oslonac, slika 5.6. Predpostavimo da je telo povučeno iz ravnotežnog položaja opruge za rastojanje  $x_1$  niz ravan i pušteno. Ispitati kretanje tela sa energetskeg stanovišta, bez dejstva sile trenja klizanja.



Slika 5.6. Telo na strmoj ravni, vezano oprugom

Sile koje vrše rad su gravitaciona i elastična sila opruge. U položaju  $x_1$  kinetička energija tela je jednaka nuli, pa je ukupna energija, u odnosu na ravnotežni položaj:

$$E_1 = T+U = 0 + \frac{kx_1^2}{2} - mgx_1\sin\theta$$

U proizvoljnom položaju na rastojanju  $x$  sa brzinom tela  $v$ , biće:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} - mgx\sin\theta = E_1 = \text{const.}$$

Dakle, sva tri vida energije se menjaju ali je njihov zbir stalan.

sile trenja energija u proizvoljnoj tački na strmoj ravni je:

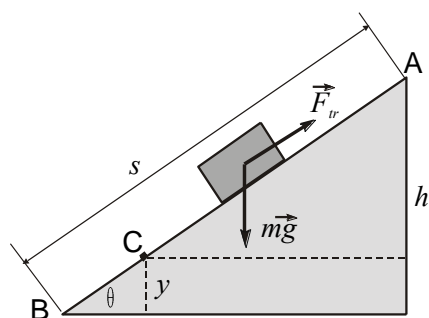
$$\frac{mv^2}{2} + mgy = mgh = \text{const}$$

PRIMER 3: Razmotriti kretanje slobodnog tela po strmoj ravni bez trenja i sa trenjem. Za slučaj bez prisustva sile trenja je:

$$F_{tr} = \mu \cdot mg \cdot \cos\theta$$

Ukoliko se u obzir uzme i sila trenja kretanje će biti drugačije. Sila trenja je:

$$\frac{mv^2}{2} + mgy + F_{tr \cdot (AC)} = mgh$$

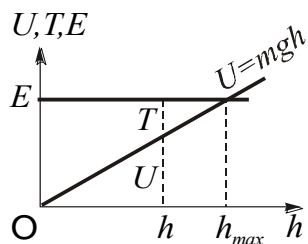


Slika 5.7. Slobodno telo na strmoj ravni

Zbir kinetičke i potencijalne energije više nije konstantan jer se u obzir uzima i rad sile trenja. Deo mehaničke energije se "rasipa" pretvaranjem u toplotnu energiju. Zbog razmene energije sa okolinom ovaj sistem nije izolovan i zakon ne važi.

### 5.5. Opisivanje kretanja pomoću energijskih dijagrama.

Zakon održanja mehaničke energije (E) može se predstaviti grafički u obliku tzv. energijskih dijagrama. Energijski dijagrami se dobijaju kada se na apscisnu osu nanese rastojanje posmatranog tela od tela sa kojim ovo uzajamno interaguje, a na ordinatnu osu odgovarajuće vrednosti potencijalne, kinetičke i ukupne mehaničke energije.

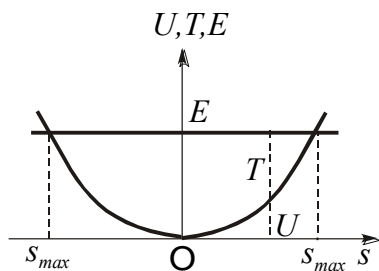


Slika 5.8. Energijski dijagram za hitac u vis.

Posmatrajmo primer kretanja hitca naviše u blizini Zemljine površine. Potencijalna energija je  $U(h) = mgh$  i ima oblik linearne zavisnosti, kao na slici 5.8. Ako je početna brzina tela sa površine Zemlje  $v_0$  i  $T = mv_0^2/2$ , onda je to i ukupna mehanička energija E, jer je  $U(0)=0$ . Za svaku visinu je  $E = T_0$  i predstavljena je horizontalnom linijom. Kinetička energija tela na proizvoljnoj visini h je data sa:

$$T(h) = E - U(h) = T_0 - mgh.$$

Sva tri iznosa energije ilustrovana su na priloženom grafiku. Maksimalna visina za dato  $v_0$  je  $h_{max} = v_0^2/2g$ , posle čega telo počinje da pada. Brzina u proizvoljnom trenutku je  $v = (v_0^2 - 2gh)^{1/2}$ . Za neku drugu početnu brzinu,  $v_0'$ , važio bi isti dijagram, samo bi  $T_0'$  i  $h'_{max}$  bili različiti.



Slika 5.9. Energijski dijagram tela na opruzi

Primer energijskog dijagrama za kretanje tela mase m pričvrštenog za oprugu ilustrovan je na slici 5.9. Potencijalna energija tela je u ovom slučaju

$$U = \frac{ks^2}{2}$$

što predstavlja jednačinu parabole prikazane na grafiku. Sa grafika se vidi vrednost kinetičke i potencijalne energije za svako s. Kinetička energija za datu vrednost s-a biće:

$$T = E - U = E - \frac{ks^2}{2}$$

Kako je:

$$E = \frac{ks_{max}^2}{2} = \frac{ks_{min}^2}{2}$$

kinetička energija će biti:

$$T = \frac{ks_{max}^2}{2} - \frac{ks^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

pa je brzina tela data sledećim izrazom:

$$v = \sqrt{\frac{k(s_{max}^2 - s^2)}{m}}$$

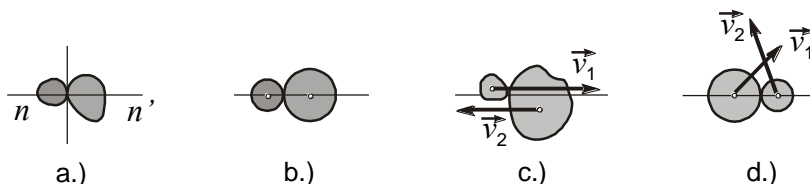
ZADATAK I: Nacrtati energijski dijagram za kretanje niz strmu ravan sa trenjem.

ZADATAK II: Konstruisati dijagram potencijalne energije dvoatomskog molekula u funkciji medjuatomskog rastojanja, R, kao zbir privlačne potencijalne energije oblika  $-1/R$  i odbojne oblika  $1/R^2$ .

### 5.6. Sudari. Idealno elastičan sudar tela.

Na osnovu zakona održanja energije i impulsa mogu se proučavati fizičke pojave kod kojih su nepoznati i priroda i intenziteti ili samo intenziteti sila koje dejstvuju pri ovim pojavama. Takve pojave su sudari tela - nagle promene stanja kretanja tela izazvane njihovim uzajamnim medjudejstvom, u veoma kratkom vremenskom intervalu. Pri sudaru se definišu sledeći pojmovi:

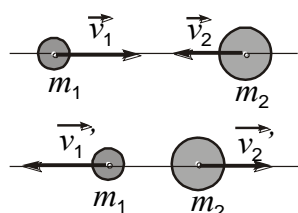
1. Linija sudara je prava koja se poklapa sa normalom, na površine tela u tački dodira, slika 5.10.a).
2. Centralni sudar je onaj kod koga linija sudara prolazi kroz centar mase, slučaj b).
3. Čeoni sudar je onaj kod koga su vektori brzina pre sudara paralelni liniji sudara, slučaj c).
4. Kos sudar je kada se pravci brzina razlikuju od pravca linije sudara, slučaj d).



Slika 5.10. Sudari čestica

Sudar se uslovno deli na dve faze - stanje kretanja pre i stanje kretanja posle interakcije. Ovo je ilustrovano na slici 5.11. Na gornjem delu slike prikazani su položaji i brzine čestica pre sudara, a na donjem stanje neposredno posle sudara. Brzine čestica posle sudara su označene sa primovima.

Ukoliko u sudaru dejstvuju samo elastične sile nazivamo ga elastičnim, a ukoliko postoje i neelastične sile (sile trenja, trajne deformacije, itd.), govorićemo o neelastičnom sudaru. Sudar se



Slika 5.11. Stanje sistema pre i posle sudara

karacteriše koeficijentom restitucije  $\epsilon = v_{\eta}/v_{0}$ , kao odnosom normalnih komponenta brzine na udarnu površinu posle i pre sudara. Pri tome je  $0 < \epsilon < 1$ , a posebno se razmatraju sledeći slučajevi:

$\epsilon = 1$  - apsolutno elastičan sudar

$\epsilon = 0$  - apsolutno neelastičan sudar.

Za apsolutno elastične sudare važe zakoni održanja mehaničke energije i impulsa, pre i posle sudara, a kod apsolutno neelastičnih važi samo zakon održanja impulsa. Drugim rečima, ako je ukupna mehanička energija konstantna sudar je apsolutno elastičan, u protivnom je neelastičan.

Za slučaj elastičnog sudara dva tela, zakoni o održanju impulsa i kinetičke energije glase:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \quad (5.40)$$

i

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (5.41)$$

gde su sa (') označene brzine posle sudara, koje se zapravo traže.

U slučaju centralnog sudara može se preći na skalarni oblik jednačine (5.40), pa sledi:

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \quad (5.42)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2) \quad (5.43)$$

Deljenjem jednačine (5.43) sa (5.42), dobijamo:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \quad (5.44)$$

Ako (5.44) pomnožimo sa  $m_1$  i saberemo sa (5.42) sledi:

$$2m_1v_1 = m_1v_2' + m_1v_2 + m_2v_2' - m_2v_2$$

odnosno

$$v_2' = \frac{2m_1v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}$$

Slično, množenjem (5.44) sa  $m_2$  i sabiranjem sa (5.42) dobijamo za  $v_1'$ :

$$v_1' = \frac{2m_2v_2 - (m_2 - m_1)v_1}{m_1 + m_2}$$

U specijalnom slučaju kada čestica  $m_2$  miruje,  $v_2 = 0$ , imamo slučaj takozvanog udara tela, za koji će biti:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.45)$$

i

$$v_1' = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (5.46)$$

Ako je  $m_1 = m_2$  tada je  $v_1' = 0$  i  $v_2' = v_1$ , odnosno tada imamo potpun prenos energije i impulsa pri udaru (primer za ovakav slučaj je čest u bilijaru). U opštem slučaju razlikujemo sledeće slučajeve:

za $m_1 > m_2$	je	$v_2' > v_1$
$m_1 < m_2$		$v_2' < v_1$
$m_1 \ll m_2 \rightarrow \infty$		$v_1' = -v_1$

Odnos energije prve čestice posle i pre sudara dat je sledećim izrazom:

$$\frac{E_1'}{E_1} = \frac{m_1 v_1'^2 / 2}{m_1 v_1^2 / 2} = \left( \frac{v_1'}{v_1} \right)^2$$

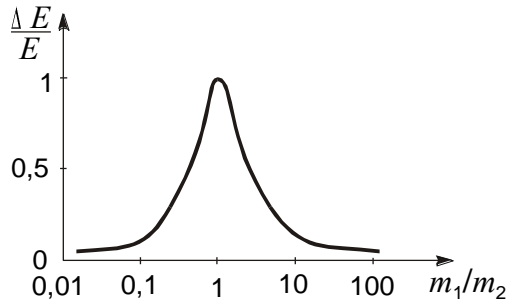
Energija predata pri centralnom udaru je:  $\Delta E = E_1 - E_1'$ . Ova energija se može izraziti preko ranije izvedenih relacija. Iz izraza (5.46) sledi:

$$E_1' = \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 E_1$$

Na osnovu toga se za prenos energije, odnosno predatu energiju pri centralnom udaru dobija:

$$\Delta E = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \quad (5.48)$$

Odavde je opet za  $m_1=m_2$ ,  $\Delta E = E_1$ , odnosno sva energija se preda pri udaru. Izraz (5.48) može da se napiše u funkciji odnosa masa ( $m_1/m_2$ ) na sledeći način:



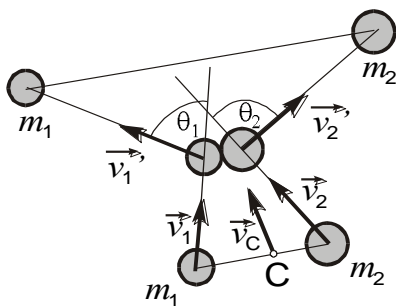
Slika 5.12. Zavisnost frakcionog gubitka energije od odnosa masa

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4(m_1/m_2)}{[1 + (m_1/m_2)]^2}$$

Ovaj izraz se naziva **frakcioni gubitak energije** tela  $m_1$ . Zavisnost frakcionog gubitka energije od odnosa masa prikazana je na slici 5.12. Za  $m_1=m_2$   $\Delta E/E$  ima maksimalnu vrednost jednaku jedinici. Za veći ili manji odnos,  $m_1 \gg m_2$  ili  $m_1 \ll m_2$  frakcioni gubitak energije opada ka nuli, što se vidi i na grafiku. Najveći frakcioni gubitak ili transfer energije u sudaru je dakle za  $m_1=m_2$  i

iznosi 100%. Ova činjenica ima, recimo, poseban značaj pri rešavanju problema usporavanja brzih neutrona oslobođenih u nekoj nuklearnoj reakciji. Za to se koriste lakši elementi, najbolji je vodonik, jer se pri sudaru sa protonom prenosi najviše energije, zbog približno jednakih masa neutrona i protona. Ili, ako hoćemo da zagrejemo neki gas ubacivanjem čestica veće energije u njega, treba to raditi sa istom vrstom gasa jer je pri tom prenos energije najveći. Ili, ako hoćemo da zagrejemo neki gas ubacivanjem čestica veće energije u njega, treba to raditi sa istom vrstom gasa jer je pri tom prenos energije najveći.

### 5.7. Kos sudar tela.



Slika 5.13. Kosi sudar

Kos sudar je u principu komplikovanije opisati jer raspolažemo i dalje samo sa dve jednačine-zakone održanja impulsa i energije a imamo u principu četiri nepoznate veličine i to brzinu jedne i druge čestice posle sudara i uglove njihovog rasejanja u odnosu na prvobitne pravce kretanja,  $v_1'$ ,  $v_2'$ ,  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , slika 5.13. Zbog toga je kos sudar pogodno razmatrati u koordinatnom sistemu centra mase. Centar masa je zamišljena tačka čije su koordinate definisane sa:

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (5.49)$$

U odnosu na nepokretni, laboratorijski sistem (L) centar mase se kreće brzinom  $\vec{v}_c$ , koja se dobija diferenciranjem izraza (5.49) i koja, pri  $\vec{v}_2=0$ , odnosno pri udaru, iznosi:

$$\vec{v}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \quad (5.50)$$

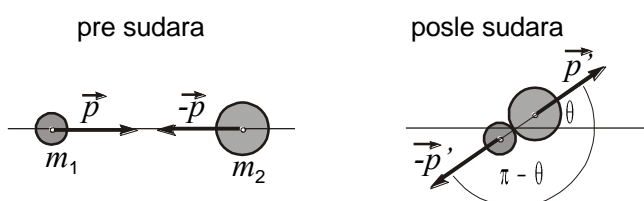
Sistem čiji je koordinatni početak postavljen u tačku C i kreće se zajedno sa njom, naziva se sistem centra masa (C). Brzine čestica u ovom sistemu lako je izraziti na osnovu Galilejevog principa

transformacija brzina. One su date sledećim izrazima:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{1c} &= \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{2c} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_c = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{1c}' &= \vec{v}_1' - \vec{v}_c \\ \vec{v}_{2c}' &= \vec{v}_2' - \vec{v}_c\end{aligned}\tag{5.51}$$

Ako sa brzina predjemo na impulse čestica, množenjem sa odgovarajućim masama, biće:

$$\begin{aligned}\vec{p}_{1c} &= -\vec{p}_{2c} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 = \vec{p} \\ \vec{p}_{1c}' &= m_1 \vec{v}_1' - m_1 \vec{v}_c \\ \vec{p}_{2c}' &= m_2 \vec{v}_2' - m_2 \vec{v}_c\end{aligned}\tag{5.52}$$



gde je sa  $\vec{p}$  označen impuls čestice  $m_1$ , pre sudara u (C) sistemu. Dobili smo da je  $\vec{p}_{1c} + \vec{p}_{2c} = 0$ , odnosno da je ukupan impuls u sistemu centra masa jednak nuli. Time se problem pojednostavljuje. Kako je:

Slika 5.14. Impulsi čestica pre i posle sudara u C sistemu

$$m_1 \vec{v}_1' = \vec{p}_1' ; m_2 \vec{v}_2' = \vec{p}_2' ; m_1 \vec{v}_c = \frac{m_1}{m_2} \vec{p} ; m_2 \vec{v}_c = \vec{p}$$

posle sudara u sistemu (C) impulsi će biti:

$$\vec{p}_{1c}' = \vec{p}_1' - \frac{m_1}{m_2} \vec{p} ; \quad \vec{p}_{2c}' = \vec{p}_2' - \vec{p}\tag{5.53}$$

Ako ova dva izraza saberemo, dobijamo:

$$\vec{p}_{1c}' + \vec{p}_{2c}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' - \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \vec{p}$$

Kako je zbog zakona o održanju impulsa:

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \vec{p}$$

sledi da je:

$$\vec{p}_{1c}' + \vec{p}_{2c}' = 0$$

odnosno:

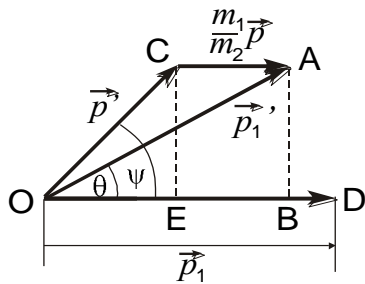
$$\vec{p}_{1c}' = -\vec{p}_{2c}' = \vec{p}' \quad (5.54)$$

gde smo sa  $\vec{p}'$  označili impuls čestice  $m_1$  posle sudara u "C" sistemu.

Iz (5.52) i (5.54) vidi se da je zaista zbir impulsa čestica u C-sistemu pre i posle sudara jednak nuli. Impulsi čestica pre i posle sudara su međusobno kolinearni, sl.5.14., a sa novouvedenim oznakama  $\vec{p}$  i  $\vec{p}'$ , na osnovu jednačina (5.53) i (5.54) dobijamo vezu izmedju odgovarajućih impulsa u (C) i (L) sistemu:

$$\vec{p}' = \vec{p}_1' - \frac{m_1}{m_2} \vec{p} \quad \text{i} \quad -\vec{p}' = \vec{p}_2' - \vec{p} \quad (5.55)$$

U slučaju kosog sudara nije moguće odrediti sve karakteristike kretanja. Na osnovu dobijene veze medju impulsima u vektorskom obliku ne mogu se jednoznačno odrediti uglovi rasejanja pojedinih čestica. Međutim, moguće je za predpostavljeni ugao rasejanja u C-sistemu odrediti uglove rasejanja u L-sistemu. To je ipak veoma koristan podatak jer omogućava razmatranje statističkih događaja, odnosno zaključivanje o ponašanju skupa većeg broja čestica koje se međusobno sudaraju, zasnovano na zakonitostima verovatnoće. Razmotrićemo vezu medju uglovima rasejanja u C- i L-sistemu, za jedan izabrani ugao rasejanja u sistemu centra mase.



Slika 5.15. Vezu izmedju uglova u L i C sistemu

Neka u C-sistemu pravac kretanja čestice 1 posle sudara zaklapa ugao  $\theta$  sa njenim prvobitnim pravcem. Ovaj ugao zvaćemo uglom rasejanja, kao na priloženoj slici. Dakle,  $\theta = \angle(\vec{p}_{1c}', \vec{p}_{1c}) = \angle(\vec{p}', \vec{p})$ .

Kako se u eksperimentu ne mere uglovi u (C) već u (L) sistemu mora se uspostaviti veza izmedju uglova rasejanja u dva sistema. Neka je  $\psi$  ugao rasejanja u L- sistemu.

Predstavimo grafički prvu od jednačina (5.53), u obliku (5.55), kao na dijagramu na slici 5.15. Vektor  $\vec{p}$  koji je paralelan impulsu upadne čestice u L-sistemu definiše pravac u odnosu na koji se mere  $\theta$  i  $\psi$ . Sa slike se lako nalazi veza izmedju  $\theta$  i  $\psi$ , dakle izmedju uglova rasejanja u C- i L-sistemu, i to na sledeći način:

$$\text{tg} \psi = \frac{AB}{OB} = \frac{CE}{OE + EB} = \frac{p' \sin \theta}{p' \cos \theta + (m_1/m_2)p} = \frac{\sin \theta}{(m_1/m_2)(p/p') + \cos \theta}$$

Kako pri elastičnom sudaru važi zakon održanja kinetičke energije, to je:

$$\frac{p_{1c}^2}{2m_1} + \frac{p_{2c}^2}{2m_2} = \frac{p_{1c}'^2}{2m_1} + \frac{p_{2c}'^2}{2m_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) p'^2$$

odakle je  $p = p'$ , dakle impulsi  $p$  i  $p'$  su jednaki po intenzitetu. Na osnovu toga, konačno za vezu uglova dobijamo:

$$\text{tg} \psi = \frac{\sin \theta}{m_1/m_2 + \cos \theta}$$

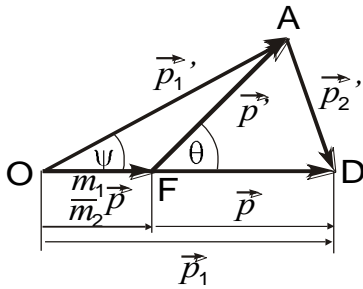
Ugao rasejanja  $\theta$  u C-sistemu može da ima bilo koju vrednost u intervalu  $0-2\pi$ . Sa uglom  $\psi$  u L-sistemu to međutim nije slučaj, on je ograničen u zavisnosti od odnosa masa čestica, i to za:

$m_1 > m_2$  imenilac je različit od nule i  $\psi < \pi/2$

$m_1 = m_2$  je  $\psi = \pi/2$

$m_1 < m_2$  dozvoljene su sve vrednosti ugla  $\psi$ .

Ova veza se odnosila na česticu 1. Učinimo isto i za česticu 2. Neka je  $\phi$  njen ugao rasejanja u C-sistemu i  $\varphi$  u L-sistemu. Ugao  $\phi$  je lako izraziti preko  $\theta$ :  $\phi = \pi - \theta$ . Da bi odredili ugao  $\varphi$  nacrtajmo "trougao impulsa" u L-sistemu, kao na slici 5.16. U ovom sistemu važi sledeća veza (na osnovu zbira  $\vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OD}$ )



Slika 5.16. Trougao impulsa

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

U tački O nanesimo duž  $\vec{p}_1$  vektor  $\vec{OF} = (m_1/m_2) \vec{p}$  i konstruišemo vektor  $\vec{FA}$ . Iz ranijeg razmatranja i izraza (5.55) sledi:

$$\vec{FA} = \vec{OA} - \vec{OF} = \vec{p}_1' - (m_1/m_2) \vec{p} = \vec{p}'$$

$$\vec{FD} = \vec{OD} - \vec{OF} = \vec{p}_1 - (m_1/m_2) \vec{p} = \vec{p}$$

U slučaju elastičnog sudara moduli vektora  $\vec{p}$  i  $\vec{p}'$  su jednaki, te je trougao FAD jednakokraki. Kako uglovi trougla impulsa imaju sledeći fizički smisao:

$$\angle AOF = \psi, \quad \angle AFD = \theta \quad \text{i} \quad \angle ADF = \varphi$$

nalazimo da je:

$$\varphi = \frac{\pi - \theta}{2}, \quad \text{odnosno} \quad \phi = 2\varphi. \quad (5.57)$$

Iz trougla OFA se lako određuju i brzine čestice 1 i 2, posle sudara u L-sistemu, u funkciji ugla rasejanja  $\theta$ , posmatranog u C-sistemu. Korišćenjem kosinusne teoreme dobija se:

$$v_1' = \frac{1}{m_1} p_1' = \frac{1}{m_1} \sqrt{OF^2 + FA^2 - 2 \cdot OF \cdot FA \cos(\pi - \theta)}$$

Kako je medjutim:

$$OF = \frac{m_1}{m_2} p; \quad FA = p' = p \quad \text{i} \quad p = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

biće:

$$v_1' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \left[ 1 + \left( \frac{m_1}{m_2} \right)^2 + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos \theta \right]$$

Na sličan način određuje se i  $v_2'$ :

$$v_2' = \frac{p_2'}{m_2} = \frac{1}{m_2} \frac{1}{m_1} \sqrt{AF^2 + FD^2 - 2 \cdot AF \cdot FD \cos \theta} \quad (5.58)$$

Kako je  $FD=AF=p$  konačno se dobija:

$$v_2' = 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.59)$$

Formula (5.59) omogućava da se odredi veličina prenosa ili transfera kinetičke energije:

$$\delta T = T_2' = \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 = 4 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} T_1 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.60)$$

Maksimalan transfer energije odgovara uglovima rasejanja  $\theta=\pi$ , odnosno rasejanju unazad.

### 5.8. Apsolutno neelastičan sudar.

Centralni sudar dva tela masa  $m_1$  i  $m_2$  i brzina  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  naziva se apsolutno neelastičan ako se posle sudara tela kreću kao celina zajedničkom brzinom  $\vec{v}$ . Na primer, dve "plastične" kuglice. Kod ovakvog sudara važi zakon održanja impulsa, ali ne i zakon održanja mehaničke energije, pa se kretanje može opisati samo pomoću vektorske jednačine impulsa:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v} \quad (5.61)$$

Kako vektori brzina kod centralnog sudara leže na istoj pravoj, vektorske oznake se mogu izostaviti, pa je:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (5.62)$$

U zavisnosti od vrednosti i orijentacije impulsa moguće je kretanje tela u smeru većeg impulsa, u smeru oba impulsa (sustizanje) ili mirovanje - isti suprotno orijentisani impulsi.

**Energija deformacije.** Već smo istakli da kod neelastičnih sudara ne važi zakon održanja mehaničke energije, jer se jedan njen deo,  $E_{def}$ , transformiše u druge vidove energije i predstavlja tzv. energiju deformacije. Prema tome, ukupna energija se može izraziti na sledeći način:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 + E_{def} \quad (5.63)$$

U specijalnom slučaju kada je  $v_2=0$ , odnosno u slučaju udara, za energiju deformacije dobijamo:

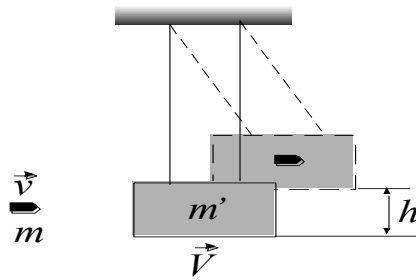
$$E_{def} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = E_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = E_1 \frac{1}{1 + m_1/m_2} \quad (5.64)$$

gde je sa  $E_1=E_{k1}$  označena kinetička energija čestice  $m_1$  pre udara.

Dakle, ako udarom treba izazvati znatnu deformaciju tela (kovanje), onda masa tela koje se deformiše,  $m_2$ , mora biti veća od mase  $m_1$  tela koje udara. Telo koje je potrebno deformisati stavlja se na masivno telo (nakovanj) tako da je masa toga tela i nakovnja zajedno znatno veća od mase čekića.

Na primer, ako je  $m_1=m_2$ , prenese se samo  $E_1/2$  energije. Ako je medjutim  $m_1=1$  g, a  $m_2=1000$  g, tada samo 0,1% ostaje kao kinetička energija sistema, a 99,9% se pretvara u druge oblike energije-deformisanje, toplota.

Balističko klatno je uređaj za merenje brzine taneta na principu apsolutno neelastičnog sudara. Masivno plastično telo, drvo, mase  $m'$  obešeno je pomoću neistegljivih niti i miruje, kao na priloženoj slici. U njega se ispaljuje tane mase  $m$  i nepoznate tražene brzine  $v$ . Zakon o održanju impulsa pre i posle udara glasi:



Slika 5.17. Balističko klatno

$$mv = (m + m') V$$

gde je sa  $V$  označena zajednička brzina obe mase nakon sudara. Kinetička energija sistema posle sudara je:

$$\frac{1}{2} (m + m') V^2$$

i jednaka je potencijalnoj energiji podizanja klatna i metka za visinu  $h$ , dakle važiće sledeća relacija:

$$\frac{1}{2} (m + m') V^2 = (m + m') \cdot g \cdot h$$

što daje zajedno sa gornjim izrazom za traženu brzinu:

$$v = \frac{m + m'}{m} \sqrt{2 \cdot g \cdot h} .$$

Merenjem visine podizanja klatna može se odrediti brzina projektila.

## VI

### OSNOVE DINAMIKE MEHANIČKOG SISTEMA

#### 6.1. Kretanje mehaničkog sistema. Centar masa.

Pod pojmom mehaničkog sistema podrazumeva se skup materijalnih tačaka ili tela u kome kretanje svake tačke zavisi od kretanja i položaja ostalih delova sistema. Na primer, Sunce i planete čine jedan mehanički sistem. Sile međusobne interakcije delova mehaničkog sistema nazivaju se unutrašnje sile. Za razliku od njih sile interakcije delova sistema sa drugim telima ili sistemima nazivaju se spoljašnje sile. Važno je istaći da je na osnovu zakona akcije i reakcije vektorski zbir svih unutrašnjih sila koje deluju u sistemu jednak nuli.

Razmotrimo kretanje mehaničkog sistema od  $n$ -čestica čije su mase  $m_1, \dots, m_p, \dots, m_n$  i vektori položaja  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_p, \dots, \vec{r}_n$  u odnosu na dati koordinatni sistem. Da bi smo opisali kretanje svake pojedinačne čestice sistema potrebno je na osnovu drugog Njutnovog zakona za svaku od njih napisati diferencijalnu jednačinu kretanja oblika:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{i,k}^u + \vec{F}_i^s \quad (6.1)$$

gde su sa  $\vec{F}_{i,k}^u$  označene unutrašnje sile kojima ostale čestice sistema deluju na uočenu česticu  $i$ , a  $\vec{F}_i^s$  predstavlja rezultantu spoljašnjih sila koje deluju na česticu  $i$ .

Pošto sistem ima  $n$  čestica, za opisivanje kretanja svih čestica sistema potrebno je napisati  $n$  vektorskih jednačina oblika (6.1), odnosno ukupno  $3n$  odgovarajućih jednačina u skalarnom obliku. Na taj način se za opisivanje kretanja svih čestica dobija sistem diferencijalnih jednačina drugog reda u odnosu na promenljive  $x_i$ ,  $y_i$  i  $z_i$ , koji je potrebno rešiti. Zbog međusobne zavisnosti kretanja pojedinih materijalnih tačaka ovaj sistem nije moguće rešiti parcijalnom integracijom pojedinih diferencijalnih jednačina. Otuda je opisivanje kretanja sistema na ovaj način praktično veoma težak, a u opštem slučaju matematički nerešiv problem. Na primer u slučaju nebeskih tela problem je rešiv za sistem od dva tela, a već za tri tela mora se pribegavati aproksimativnim metodama. Iz tog razloga se za sistem sa više od tri tela, umesto opisivanja kretanja pojedinačnih članova sistema pribegava opisivanju integralnih karakteristika kretanja sistema kao celine.

Jedna od važnih i integralnih karakteristika mehaničkog sistema materijalnih tačaka je centar masa ili centar inercije. Pokazaćemo da je za sistem materijalnih tačaka, kao i za kruto telo, translatorno kretanje celog sistema moguće opisati kao, odnosno poistovetiti sa kretanjem centra mase.

Centar masa smo ranije već definisali. Ponovićemo, to je, za sistem od  $n$  čestica u datom koordinatnom sistemu, geometrijska tačka čiji je vektor položaja određen sledećim izrazom:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (6.2)$$

gde su  $m_i$  i  $\vec{r}_i$  masa i vektor položaja  $i$ -te materijalne tačke, a  $m$  ukupna masa sistema.

Dekartove koordinate centra mase biće projekcije vektora  $\vec{r}_c$  na koordinatne ose:

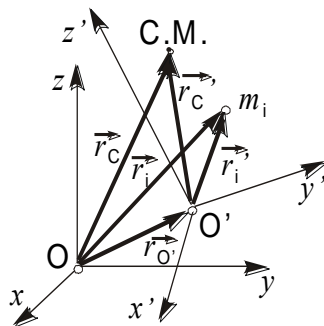
$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad i \quad z_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

U slučaju veoma velikog broja materijalnih tačaka u konačnoj zapremini,  $V$ , odnosno kada je prostorni raspored masa kontinualan, a ne diskretan, govorimo o neprekidnoj sredini ili telu. U tom slučaju se vektor položaja centra mase umesto preko sume definiše sledećim imtegralom:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \cdot dm \quad (6.3)$$

Analogno ovom izrazu se definišu i komponente vektora položaja centra mase na koordinatnim osama.

Položaj centra masa zavisi od rasporeda masa u sistemu, a ne zavisi od izbora koordinatnog sistema. Ilustrovaćemo to pomoću slike 6.1. Položaji  $i$ -te tačke u dva sistema,  $Oxyz$  i  $O'x'y'z'$ , povezani su relacijom



Slika 6.1. Centar mase

$$\vec{r}_i = \vec{r}_o + \vec{r}_i'$$

Koristeći ovu i jednačinu (6.2) dobijamo

$$\vec{r}_c' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_o)$$

odnosno  $\vec{r}_c = \vec{r}_o - \vec{r}_c'$ . Dakle, završetci vektora  $\vec{r}_c$  i  $\vec{r}_c'$  se poklapaju određujući jednu istu tačku C-centar masa sistema, koji je nepromenjen u odnosu na raspored masa  $m_i$  u bilo kom sistemu.

Pod težištem tela podrazumeva se napadna tačka rezultante vektorskog zbira sila teže svih materijalnih tačaka koje

sačinjavaju sistem.

Ukoliko se sistem čestica, tj. telo nalazi u homogenom polju sila teže (što je uglavnom slučaj) težište se poklapa sa centrom masa.

## 6.2. Zakoni kretanja centra masa.

Pomnožimo definicione izraze za  $x_c$ ,  $y_c$  i  $z_c$  komponente vektora položaja centra masa sa  $m$  i diferencirajmo ih po vremenu. Dobićemo sledeće izraze:

$$\begin{aligned} m \frac{dx_c}{dt} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{dx_i}{dt} \\ m \frac{dy_c}{dt} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{dy_i}{dt} \\ m \frac{dz_c}{dt} &= \sum_{i=1}^n m_i \frac{dz_i}{dt} \end{aligned}$$

Leve strane ovde predstavljaju proizvod ukupne mase sistema  $m$  i komponentata brzine kretanja centra mase po koordinatnim osama. Desna strana je zbir komponentata impulsa pojedinačnih čestica. Stoga možemo pisati:

$$m \vec{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \quad (6.4)$$

Dakle, ukupni impuls mehaničkog sistema jednak je impulsu tačke, čija je masa jednaka masi sistema i koja se kreće brzinom centra mase toga sistema.

Daljim diferenciranjem izraza (6.4) po vremenu dobijamo:

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

odnosno:

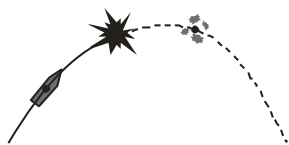
$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F} \quad (6.5)$$

Dakle, centar mase sistema materijalnih tačaka kreće se kao materijalna tačka čija je masa jednaka ukupnoj masi sistema, pod dejstvom rezultante spoljašnjih sila koje dejstvuju na sistem (suma unutrašnjih sila sistema jednaka je nuli). Poslednja jednačina potpuno opisuje translatorno kretanje sistema.

Za izolovan mehanički sistem materijalnih tačaka je  $\vec{F}=0$  pa iz jednačine (6.5) sledi:

$$\frac{d(m\vec{v}_c)}{dt} = 0 \quad \text{odnosno} \quad m\vec{v}_c = \text{const} \quad (6.6)$$

Dakle centar masa izolovanog sistema materijalnih tačaka nalazi se u jednako-pravolinijskom kretanju ili u miru (zakon inercije) pa se centar masa zato naziva i centar inercije.

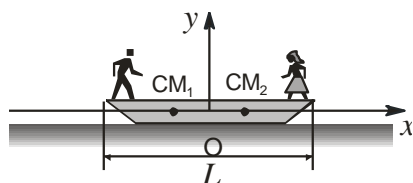


Slika 6.2. Putanja centra mase

Zakon kretanja centra mase, jednačina (6.5), ne određuje i kretanje pojedinih delova sistema i obrnuto. U izolovanom sistemu mogu da deluju unutrašnje sile i da se pojedini delovi relativno pomeraju, ali to ne utiče na kretanje centra mase.

PRIMER 1: Putanja centra mase granate u vakuumu, koja predstavlja kos hitac se neće promeniti ako ona eksplodira u letu. Putanja svakog nastalog delića će biti različita, ali će domet centra mase biti isti, kao da do eksplozije nije došlo. Ovo je ilustrovano na slici 6.2.

PRIMER 2: Mladić mase  $m_1=80$  kg i devojka mase  $m_2=50$  kg sede na raznim stranama čamca mase  $M=280$  kg i dužine  $L=6$  m, slika 6.3. Čamac miruje. Kada oni promene mesta, koliko će se pomeriti čamac? Sistem je izolovan. Zamena mesta menja položaj centra mase sistema. Da bi centar mase i dalje mirovao čamac se mora pomeriti prema kraju gde je bio mladić. Ovo se može pokazati izračunavanjem položaja centra masa u jednom i drugom slučaju u odnosu na sistem vezan za sredinu čamca. Imamo da je:



Slika 6.3. Održavanje položaja centra mase

$$x_{cm1} = \frac{-m_1 L / 2 + m_2 L / 2}{M + m_1 + m_2} \quad x_{cm2} = \frac{-m_2 L / 2 + m_1 L / 2}{M + m_1 + m_2}$$

U brojiocu nema člana sa  $M$  jer je masa čamca simetrično raspoređena. Dakle:

$$\Delta x = x_{cm2} - x_{cm1} = \frac{L(m_1 - m_2)}{M + m_1 + m_2} = 0,5 \text{ m.}$$

Impuls centra mase  $\vec{p}_c = m\vec{v}_c$  ne može, međjutim, biti karakteristika rotacionog kretanja sistema kao celine. Ukoliko postoji i rotacija tela pri kretanju onda se kretanje tretira kao složeno.

## VII

### DINAMIKA KRUTOG TELA

#### 7.1. Translatorno kretanje krutog tela.

Pod pojmom **kruto telo** se podrazumeva mehanički sistem sa velikim brojem materijalnih tačaka, kod koga je rastojanje između svake dve tačke sistema stalno i nezavisno od položaja i kretanja tela. Translatorno kretanje krutog tela je takvo kretanja pri kome duž koja spaja dve proizvoljne tačke tela tokom kretanja ostaje paralelna samoj sebi, odnosno ne menja orijentaciju u prostoru.

Na svaku tačku tela mogu delovati unutrašnje i spoljašnje sile. Kretanje svake tačke krutog tela određeno je diferencijalnom jednačinom kretanja sledećeg oblika:

$$\frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik}^u + \vec{F}_i^s \quad (7.1)$$

gde su  $m_i$  i  $\vec{v}_i$  masa i brzina  $i$ -te materijalne tačke tela, a članovi na desnoj strani predstavljaju rezultante unutrašnjih i spoljašnjih sila, respektivno, koje dejstvuju na  $i$ -tu tačku. Sabiranjem jednačina (7.1) za sve materijalne tačke dobijamo:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^s \quad (7.2)$$

jer je zbir unutrašnjih sila, po svim česticama, na osnovu zakona akcije i reakcije, jednak nuli. Pošto su postupci diferenciranja i sumiranja nezavisni, jednačina (7.2) se može pisati na sledeći način:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^s = \vec{R}^s \quad (7.3)$$

odnosno, izvod ukupnog impulsa krutog tela jednak je rezultanti spoljašnjih sila koje dejstvuju na telo.

S obzirom da je u klasičnoj mehanici masa tela konstantna, jednačina (7.2) se može pisati i u obliku:

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{R}^s \quad (7.4)$$

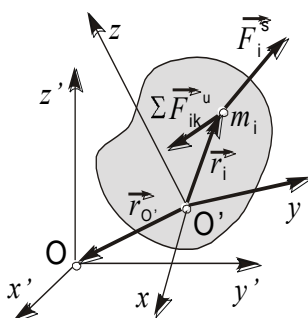
Kada se kruto telo kreće translatorno, onda je ubrzanje svih njegovih tačaka isto,  $d\vec{v}_i/dt = \vec{a}$ , pa se može izvući kao zajednički činilac ispred sume, koja u tom slučaju predstavlja masu celog tela,  $\sum m_i = m$ . Na taj način jednačina (7.4) se može pisati u obliku:

$$m\vec{a} = \vec{R}^s \quad (7.5)$$

Izraz (7.5) predstavlja jednačinu translatornog kretanja krutog tela. Dakle, translatorno kretanje krutog tela može se tretirati kao kretanje materijalne tačke (centar mase) čija je masa jednaka masi tela i na koju dejstvuje sila jednaka rezultanti spoljašnjih sila, koje dejstvuju na telo.

## 7.2. Rotaciono kretanje krutog tela. Moment impulsa. Moment sile.

Neka kruto telo rotira oko nepokretne tačke  $O$  u odnosu na neki inercijalni sistem  $O'x'y'z'$ , kao na slici 7.1. Ova tačka se naziva centrom rotacije krutog tela i u njega se može postaviti koordinatni početak nepokretnog koordinatnog sistema  $Oxyz$ . Položaj proizvoljne  $i$ -te tačke tela, mase  $m_i$ , određen je vektorom položaja  $\vec{r}_i$ . Razmotrimo kretanje uočene  $i$ -te tačke pri rotaciji tela. Neka na nju dejstvuju unutrašnje sile  $\sum \vec{F}_{i,k}^u$ ,  $k=1,2,\dots,n$  i  $k \neq i$ , i spoljašnja sila  $\vec{F}_i^s$ . Kretanje uočene materijalne tačke određeno je diferencijalnom jednačinom kretanja oblika:



Slika 7.1. Rotaciono kretanje krutog tela

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik}^u + \vec{F}_i^s \quad (7.6)$$

gde je  $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$  impuls materijalne tačke  $m_i$ . Pod navedenim uslovima materijalna tačka će vršiti složeno kretanje po sferi radijusa  $r_i$  oko centra rotacije  $O$ . Dinamički efekat dejstva sile  $\vec{F}_i^s$  pri rotacionom kretanju zavisi ne samo od sile, već i od položaja njene napadne tačke u odnosu na centar rotacije, odnosno od vektora položaja  $\vec{r}_i$ . Takođe, dinamički efekat sile pri rotaciji zavišće i od rasporeda mase tela u odnosu na centar rotacije.

Navedeni faktori se u jednačinu rotacionog kretanja tačke uvode tako što se jednačina (7.6) vektorski množi sa vektorom položaja  $\vec{r}_i$ , i to sa leva, odnosno tako da je vektor položaja prvi vektor formiranog vektorskog proizvoda. Na taj način se dobija sledeća jednačina:

$$\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik}^u + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^s \quad (7.7)$$

Ova jednačina se takođe može napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \vec{r}_i \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik}^u + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^s \quad (7.8)$$

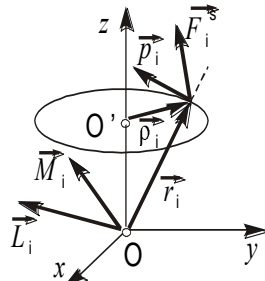
jer je  $(d\vec{r}_i/dt) \times \vec{p}_i = 0$ , kao vektorski proizvod dva kolinearna vektora. U vektorskoj jednačini (7.8) pojavljuju se dve nove fizičke veličine. Vektorski proizvod vektora položaja i impulsa,  $\vec{r}_i \times \vec{p}_i$ , naziva se moment impulsa,  $\vec{L}_i$ ,  $i$ -te tačke, a vektorski proizvod vektora položaja i spoljašnje sile,  $\vec{r}_i \times \vec{F}_i^s$ , naziva se moment sile,  $\vec{M}_i$ , u odnosu na centar rotacije  $O$ .

**Moment impulsa ili moment količine kretanja** materijalne tačke,  $\vec{L}_i$ , u odnosu na centar rotacije  $O$ , predstavlja vektorski proizvod vektora položaja materijalne tačke,  $\vec{r}_i$  i njenog impulsa  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ :

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (7.9)$$

Intenzitet vektora momenta impulsa je  $L_i = r_i p_i \sin(\vec{r}_i, \vec{p}_i) = r_i p_i \sin\alpha$ , pravac mu je normalan na ravan koju odredjuju vektori  $\vec{r}_i$  i  $\vec{p}_i$ , a smer mu se odredjuje po pravilu desne orijentacije, kao što je prikazano na slici 7.2.

Kao svaki vektor, vektor momenta impulsa ima tri komponente u pravcima  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  Dekartovog pravouglkog koordinatnog sistema:



Slika 7.2. Rotacija oko stalne tačke O

$$\vec{L}_i = L_{ix}\vec{i} + L_{iy}\vec{j} + L_{iz}\vec{k} \quad (7.10)$$

Ako su poznate komponente vektora  $\vec{r}_i$  i  $\vec{p}_i$ , komponente vektora  $\vec{L}_i$  mogu se odrediti iz sledeće determinante (uz izostavljanje indeksa i):

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \quad (7.11)$$

Odavde se, standardnim postupkom za razvoj determinante, dobija  $L_{ix} = yp_z - zp_y$ ,  $L_{iy} = zp_x - xp_z$  i  $L_{iz} = xp_y - yp_x$ .

**Moment sile** u odnosu na centar rotacije, O, predstavlja vektorski proizvod vektora položaja  $\vec{r}_i$  materijalne tačke  $m_i$  i sile koja na nju deluje

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^s \quad (7.12)$$

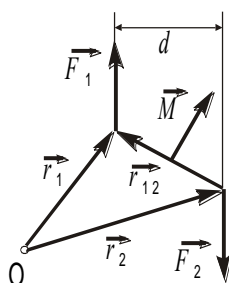
Moment sile je aksijalni vektor, pravac mu je normalan na ravan odredjenu vektorima  $\vec{r}_i$  i  $\vec{F}_i^s$ , sl. 7.2., a njegove komponente se mogu odrediti iz determinante sledećeg oblika:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (7.13)$$

U opštem slučaju vektori  $\vec{p}$  i  $\vec{F}$  imaju različite pravce, usled čega se vektori  $\vec{L}_i$  i  $\vec{M}_i$  ne poklapaju po pravcu, kao što je to ilustrovano na slici 7.2.

Definišaćemo ovde i moment para sila ili spreg sila. Njega čine dve paralelne sile jednakog intenziteta i pravca a suprotnog smera, koje ne leže na istoj pravoj (volan automobila). Na slici 7.3. prikazane su dve takve sile,  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$  koje deluju u tačkama sa vektorima položaja  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$  u odnosu na centar rotacije O. Normalno rastojanje izmedju sila naziva se krak sile—d.

Neka su, dakle, intenziteti sila medjusobno jednaki,  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$ . Ukupan moment je:



Slika 7.3. Spreg sila

$$\vec{M}_s = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

Sa slike je:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}$$

S obzirom da je  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , za ukupni moment sila ili spreg sila se dobija:

$$\vec{M}_s = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}_2) + \vec{r}_1 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2 = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_2 \quad (7.14)$$

Vektor  $\vec{M}_s$  je normalan na ravan u kojoj leže sile. Njegov intenzitet je  $M_s = r_{12} F_2 \sin(\vec{r}_{12}, \vec{F}_2) = F \cdot d$ , slika 7.3. Kao što vidimo spreg sila ne zavisi od izbora centra rotacije.

### 7.3. Osnovni zakon dinamike rotacionog kretanja krutog tela. Zakon održanja momenta impulsa.

Polazeći od izraza (7.9) i (7.12) jednačina (7.8) može se napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik}^u + \vec{M}_i \quad (7.15)$$

Ova jednačina predstavlja zakon kretanja i-te materijalne tačke krutog tela u odnosu na centar rotacije O. Dakle, brzina promene momenta impulsa čestice jednaka je zbiru momenata unutrašnjih i spoljašnjih sila koje na nju dejstvuju.

Da bismo opisali rotaciono kretanje celog tela sabraćemo sve jednačine oblika (7.15), za pojedine tačke. Njih ima ukupno n, koliko i materijalnih tačaka. Na taj način dobijamo:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \left\{ \vec{r}_i \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik}^u \right\} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (7.16)$$

ili, pošto je zbir izvoda jednak izvodu zbira, možemo pisati:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \left\{ \vec{r}_i \times \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik}^u \right\} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i \quad (7.17)$$

Vektorski zbir momenata impulsa svih tačaka krutog tela naziva se moment impulsa krutog tela,  $\vec{L}$ , u odnosu na centar rotacije O:

$$\sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \vec{L} \quad (7.18)$$

Vektorski zbir momenata spoljašnjih sila koje dejstvuju na telo predstavlja ukupni ili glavni moment spoljašnjih sila,  $\vec{M}$ , u odnosu na centar rotacije O:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M} \quad (7.19)$$

Što se tiče vektorskog zbira momenata unutrašnjih sila uzajamnog dejstva materijalnih tačaka,  $\vec{F}_{ik}^u$ , u odnosu na centar rotacije, u jednačini (7.17), on je jednak nuli. Unutrašnje sile medju odgovarajućim tačkama su po trećem Njutnovom zakonu medjusobno jednake po intenzitetu i pravcu, a suprotne po smeru, te izazivaju momente suprotnih orijentacija koji se u sumi medjusobno poništavaju.

Na osnovu izloženog jednačina (7.17) se može pisati u sledećem obliku:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (7.20)$$

Ova jednačina se naziva jednačinom momenta i predstavlja osnovni zakon rotacionog kretanja krutog tela oko stalne tačke O, pod dejstvom momenta spoljnjih sila  $\vec{M}$ . Ovaj zakon se naziva zakon promene momenta impulsa i glasi: izvod momenta impulsa tela koje rotira oko nepokretne tačke O jednak je glavnom momentu svih spoljašnjih sila koje na telo dejstvuju, u odnosu na tačku O.

Jednačina (7.20) može se pisati i u sledećem obliku:

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt \quad (7.21)$$

Veličina  $\vec{M} \cdot dt$  naziva se impuls momenta sile, a  $d\vec{L}$  predstavlja promenu ili priraštaj momenta impulsa u vremenskom intervalu  $dt$  pod dejstvom momenta spoljašnje sile  $\vec{M}$ . Treba uočiti da je priraštaj momenta impulsa vektor kolinearan sa vektorom momenta sile.

**Zakon održanja momenta impulsa.** Ukoliko je moment sila koje dejstvuju na telo jednak nuli,  $\vec{M} = 0$ , u odnosu na dati centar rotacije, onda prema jednačini (7.20) dobijamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad \text{odnosno} \quad \vec{L} = \text{const} \quad (7.22)$$

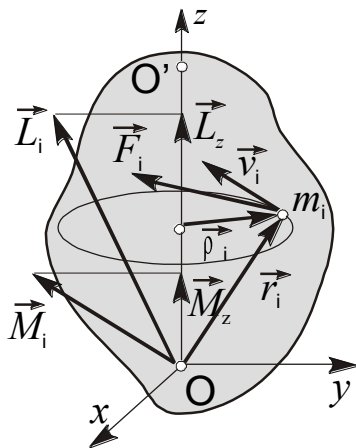
Jednačina (7.22) predstavlja zakon održanja momenta impulsa, koji glasi:

*Ako je rezultanta momenta spoljašnjih sila koje dejstvuju na telo, u odnosu na centar rotacije jednaka nuli, moment impulsa tela u odnosu na tu tačku je konstantan.*

Navedeni uslov da je moment spoljašnjih sila jednak nuli ne znači da nema spoljašnjih sila, već samo da je njihov rezultujući moment jednak nuli. Na primer, u slučaju dejstva centralnih sila, kod kojih se pravac dejstva sile poklapa sa vektorom položaja u odnosu na centar rotacije, moment sila je jednak nuli zbog kolinearnosti vektora položaja i sile. U tom slučaju zakon održanja momenta impulsa takodje važi.

#### 7.4. Rotacija tela oko nepokretne ose. Moment inercije.

Razmotrimo dinamiku obrtanja krutog tela oko stalne ose, tj. vezu sila koje deluju na telo i njegovog ugaonog ubrzanja. Na slici 7.4. je prikazano kruto telo koje rotira oko stalne ose OO'. U ovom slučaju, za razliku od slučaja rotacije oko stalne tačke (slika 7.2), telo rotira samo pod dejstvom komponente  $M_z$  momenta spoljašnjih sila  $\vec{M}$  koji se odnosi na tačku O. Komponente  $M_x$  i  $M_y$  su kompenzovane momentima sila reakcije koje se javljaju u tačkama učvršćenja ose. Na osnovu jednačine (7.20) kretanje tela oko ose OO' odnosno ose  $O_z$  određeno je sledećom jednačinom:



$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad (7.23)$$

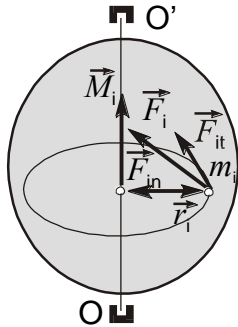
gde su  $L_z$  i  $M_z$  projekcije vektora  $\vec{L}$  i  $\vec{M}$  na osu  $O_z$ . Usled toga se  $L_z$  i  $M_z$  nazivaju moment impulsa i moment spoljašnjih sila u odnosu na stalnu osu. Ove veličine opisuju rotaciju celog tela oko stalne ose i nije teško pokazati da one predstavljaju sume odgovarajućih projekcija,  $L_{iz}$  i  $M_{iz}$ , vektora  $\vec{L}_i$  i  $\vec{M}_i$ , na osu  $O_z$ , za sve pojedinačne materijalne tačke tela. Dakle,  $L_z$  i  $M_z$  a time

Slika 7.4. Rotacija oko nepokretne ose OO'

i  $L_z$  i  $M_z$  predstavljaju skalarne veličine i kao takve ne zavise od izbora tačke 0 na osi  $O_z$ .

Pošto je, međutim, rotacija oko stalne ose samo specijalan slučaj rotacije u odnosu na stalnu tačku, a moment sile i moment impulsa su po definiciji vektorske veličine, nadalje ćemo i moment sile i moment impulsa u odnosu na stalnu osu tretirati kao vektorske veličine, što one u stvari i jesu.

Na osnovu jednačine (7.23), u slučaju rotacije tela oko stalne ose može se naći neposredna veza između momenta spoljašnjih sila,  $\vec{M}$  i ugaonog ubrzanja tela,  $\vec{\alpha}$ .



Slika 7.5. Moment inercije jedne materijalne tačke krutog tela

Na slici 7.5. prikazano je kruto telo koje može da rotira oko ose  $OO'$ , bez trenja, pod dejstvom rezultujuće spoljašnje sile  $\vec{F}$ . Pri rotaciji svaka materijalna tačka tela,  $m_i$  se kreće po kružnoj putanji poluprečnika  $\vec{r}_i$ , sa centrom na osi rotacije. Sila  $\vec{F}_i$  koja dejstvuje na uočenu tačku  $i$  koja leži u ravni normalnoj na osu rotacije može se razložiti na svoje dve komponente:  $\vec{F}_i = \vec{F}_{in} + \vec{F}_{it}$ . Komponenta sile  $\vec{F}_{in}$  koja dejstvuje u pravcu poluprečnika kompenzuje se silama reakcije u osloncima ose i ne utiče na kretanje tela. Pod dejstvom sile  $\vec{F}_{it}$ , u pravcu tangente, materijalna tačka dobija ubrzanje  $\vec{\alpha}$ , pri čemu je:

$$\vec{F}_{it} = m_i \vec{\alpha}_{it} = m_i (\vec{\alpha} \times \vec{r}_i)$$

Moment sile  $\vec{F}_{it}$  iznosi:

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{it} = \vec{r}_i \times m_i (\vec{\alpha} \times \vec{r}_i) \quad (7.24)$$

Vektor  $\vec{M}_i$  ima pravac ose  $OO'$  i smer naviše, kao na slici 7.5. Kada se izraz (7.24) razvije, dobijamo:

$$\vec{M}_i = m_i r_i^2 \vec{\alpha} \quad (7.25)$$

Sabiranjem jednačina oblika (7.25) za sve tačke krutog tela, obzirom da je  $\vec{\alpha}$  isto za sve tačke, dobijamo za ukupni moment sile:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{\alpha} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (7.26)$$

Veličina

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (7.27)$$

naziva se moment inercije tela u odnosu na osu rotacije  $OO'$  i predstavlja zbir proizvoda masa i kvadrata rastojanja pojedinih tačaka u odnosu na uočenu osu rotacije. Na osnovu (7.27), (7.26) i (7.20) možemo pisati:

$$\vec{M} = I \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (7.28)$$

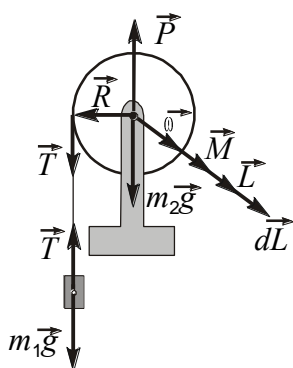
Ovaj izraz predstavlja osnovnu dinamičku jednačinu rotacionog kretanja krutog tela oko stalne ose. Ugaono ubrzanje koje telo dobija pod dejstvom spoljašnje sile  $\vec{F}$  proporcionalno je momentu sile  $\vec{M}$  i obrnuto proporcionalno momentu inercije  $I$  u odnosu na osu rotacije.

Ako je moment sile jednak nuli, obzirom da je  $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$  i da je  $I = \text{const}$ , iz izraza (7.28) dobijamo:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const.} \quad (7.29)$$

Moment impulsa tela u odnosu na osu rotacije jednak je proizvodu momenta inercije u odnosu na tu osu i ugaone brzine njegove rotacije. Jednačina (7.29) predstavlja takodje zakon održanja momenta impulsa izraženog preko momenta inercije i ugaone brzine kao karakteristika rotacionog kretanja. Pri konstantnom momentu inercije tela i njegova ugaona brzina je konstantna,  $\vec{\omega} = \text{const}$  (za  $\vec{M} = 0$ ). Ako se, pak, moment inercije izolovanog tela ili mehaničkog sistema menja, menja se i njegova ugaona brzina i to tako da je njihov proizvod konstantan.

PRIMER I: Točak poluprečnika  $R$  i momenta inercije  $I$  postavljen je na osu koja se obrće u stalnim ležištima. Po ivici je obavijeno uže na kome visi telo mase  $m_1$ , slika 7.6. Trenje u ležištima je zanemarljivo. Razmotriti kretanje sistema i odrediti izraz za brzinu kretanja tela  $m_1$ .



Slika 7.6. Primer primene osnovne jednačine dinamike za rotaciju

Obeležimo sa  $\vec{T}$  silu zatezanja užeta. Sile  $m_2\vec{g}$  i sila reakcije  $\vec{P}$  su uravnotežene. Za linearno kretanje tela  $m_1$  važiće II Njutnov zakon:

$$m_1g - T = m_1a \quad (7.30)$$

Rezultujući moment sile  $T$  biće na osnovu jednačine (7.28):

$$R \cdot T = I \cdot \alpha \quad (7.31)$$

Kako je  $a = R \cdot \alpha$ , za ubrzanje se dobija sledeći izraz:

$$a = g \frac{1}{1 + (I / m_1 R^2)} \quad (7.32)$$

Ako sistem kreće iz mira brzina tela  $m_1$ , posle promene visine za  $y$  biće:

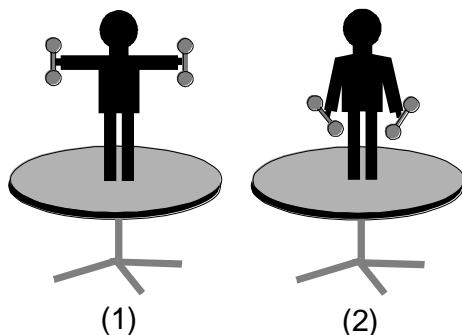
$$v^2 = 2ay = 2 \frac{1}{1 + (I / m_1 R^2)} y. \quad (7.33)$$

Vidimo da je primenom dinamičke jednačine rotacionog kretanja (7.28) moguće jednostavno rešavati probleme rotacionog kretanja tela, kao što se drugim Nutnovim zakonom rešavaju problemi translatornog kretanja.

Ovaj primer nam može poslužiti i za ilustriranje promene momenta impulsa krutog tela pod dejstvom spoljašnje sile. Ako se disk okreće u datom trenutku vremena ugaonom brzinom  $\vec{\omega}$ , njegov moment impulsa će biti  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ . To je vektor usmeren duž ose rotacije sa smerom iz ravni crteža. U toku kretanja na disk deluje stalna sila  $\vec{T}$  koja izaziva moment sile  $\vec{M} = \vec{R} \times \vec{T}$ . Moment sile je takodje usmeren duž ose rotacije, iz ravni crteža. Na osnovu jednačine (7.28) ovaj moment će u vremenskom intervalu  $dt$  izazvati promenu ili priraštaj momenta impulsa koji iznosi  $d\vec{L} = \vec{M} dt$  i koji je u ovom slučaju kolinearan sa  $\vec{L}$ . Pošto je moment sile stalan u konačnom vremenskom intervalu  $\Delta t$  priraštaj momenta impulsa će biti  $\Delta\vec{L} = \vec{M} \Delta t$ .

PRIMER II: Zakon održanja momenta impulsa ilustrovaćemo na takozvanoj klupi Žukovskog. Na horizontalnom postolju koje može da rotira oko vertikalne ose sa malim trenjem, slika 7.7, nalazi se osoba, radi pojačanja efekta sa tegovima u rukama, Neka se postolju saopšti ugaona brzina intenziteta  $\omega_1$  i neka osoba pri tome drži rašireno ruke sa tegovima. Šta se događa kada osoba privuče ruke uz telo?

Postolje će početi brže da se okreće. Pošto na sistem (postolje plus osoba sa tegovima) ne deluje nikakva spoljašnja sila koja bi imala moment u odnosu na vertikalnu osu različit od nule, važiće zakon održanja momenta impulsa, odnosno biće:



$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad (7.34)$$

gde se oznake (1) odnose na početak kretanja, (2) na kretanje sa skupljenim rukama sa tegovima. Kako je  $I_1 > I_2$ , sledi da će biti  $\omega_2 > \omega_1$ , odnosno da će se osoba brže okretati. Isto je objašnjenje i za ponašanje osobe na klizaljka koja se okreće oko svoje vertikalne ose na ledu. Na osnovu zakona održanja momenta impulsa ona će moći, menjanjem svog momenta inercije oko vertikalne ose da menja ugaonu brzinu rotacije.

Slika 7.7. Klupa Žukovskog

### 7.5. Određivanje momenta inercije. Štajnerov obrazac.

Moment inercije smo definisali izrazom (7.27). Da bismo odredili moment inercije tela neophodno je poznavati osu rotacije i raspored masa u odnosu na tu osu. U slučaju da je telo neprekidna homogena fizička sredina na koju je moguće primeniti infinitezimalni račun, moment inercije je moguće izračunati na sledeći način:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \int_0^m r^2 dm \quad (7.35)$$

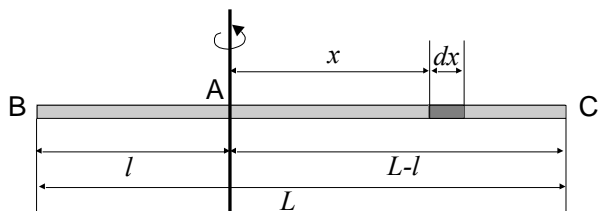
gde je  $r$ -rastojanje mase  $dm$  od ose rotacije. Ako se gustina tela izrazi kao odnos mase  $dm$  elementa zapremine  $dV$  i elementa zapremine  $dV$ , odnosno  $\rho = dm/dV$ , moment inercije tela se može izraziti u obliku:

$$I = \int_0^V \rho r^2 dV \quad (7.36)$$

pri čemu se integracija vrši po celoj zapremini tela.

Navešćemo primere izračunavanja momenta inercije za neka pravilna geometrijska tela, homogene gustine, u odnosu na karakteristične ose rotacije.

**Tanak štap** mase  $m$  i dužine  $L$ , ravnomerno rasporedjene mase, rotira oko ose normalne na njegovu dužinu, slika 7.8. Pošto je masa ravnomerno rasporedjena, biće  $dm/m = dx/L$ , odnosno elementarna masa će biti:



$$dm = \frac{m}{L} dx$$

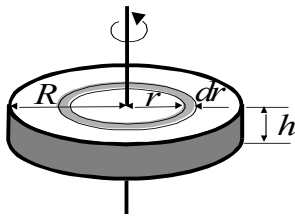
U odnosu na osu kroz tačku A moment inercije će biti dat sledećim izrazom:

Slika 7.8. Moment inercije štapa

$$I_A = \int x^2 dm = \frac{m}{L} \int_{-1}^{L-1} x^2 dx = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{L-1} = \frac{1}{3} m \{L^2 - 3L + 3\} \quad (7.37)$$

Konkretano, recimo za  $l=0$  ili  $l=L$ , odnosno za obrtanje štapa oko jednog od svojih krajeva je:  $I=(1/3)mL^2$ ; dok je za obrtanje oko sredine štapa,  $L/2$ :  $I=(1/12)mL^2$ .

**Homogen disk**, poluprečnika  $R$  i visine  $h$ , u odnosu na osu normalnu na njegov centar, treba izdeliti na zone, kao što je to prikazano šrafiranom površinom na slici 7.9. Na taj način se mogu formirati elementarne mase,  $dm$ , od kojih se svaka nalazi na datom rastojanju  $r$  od ose rotacije. Svaka zona ima zapreminu:



Slika 7.9. Moment inercije diska

$$dV = dS \cdot h = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot h$$

S obzirom da je  $r \gg dr$  može se smatrati da je ukupna masa  $dm$  zone na rastojanju  $r$ , pa je moment inercije zone:

$$dI_i = r^2 dm = r^2 \rho dV = 2\pi \rho h r^3 dr$$

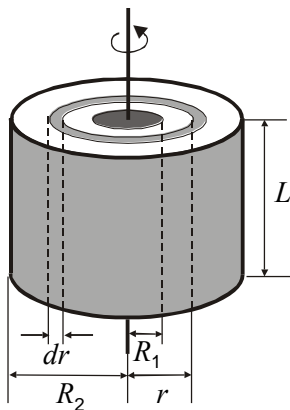
Ukupni moment inercije ćemo dobiti integracijom:

$$I = 2\pi \rho h \int r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4}$$

odnosno:

$$I = \frac{mR^2}{2} \quad (7.38)$$

**Za šupalji cilindar** postupak je sličan prethodnom. Na slici 7.10. je prikazan cilindar dužine  $L$ , spoljašnjeg poluprečnika  $R_2$  i poluprečnika šupljine  $R_1$ . Ako je cilindar homogene gustine  $\rho$ , pogodno ga je izdeliti na elementarne zapremine cilindričnog oblika poluprečnika  $r$  i debljine  $dr$ . Masa jedne takve zapremine je:  $dm=\rho dV$ . Zapremina cilindrične ljuske je



Slika 7.9. Moment inercije šupljeg cilindra

$$dV = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot L$$

Moment inercije će biti:

$$I = \int r^2 dm = 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} \rho r^3 dr$$

Za  $\rho=\text{const.}$  integracijom se dobija:

$$I = 2\pi L \rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi}{2} \frac{L\rho}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

Masa cilindra je  $m = \pi L \rho (R_2^2 - R_1^2)$ , pa je konačno:

$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2) \quad (7.39)$$

Ako je  $R = 0$  onda je za pun cilindar, kao i za disk

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \quad (7.40)$$

Ako je, međutim, cilindar vrlo tankih zidova  $R_1 = R_2 = R$

$$I = mR^2 \quad (7.41)$$

Primitimo da moment inercije ne zavisi od  $L$ , već samo od radijalnog rasporeda mase.

**Za homogenu loptu**, ako se osa rotacije poklapa sa osom lopte, istu je pogodno izdeliti na niz tankih diskova, kao na slici 7.11. Poluprečnik diska je dat sa:

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Zapremina jednog diska je:

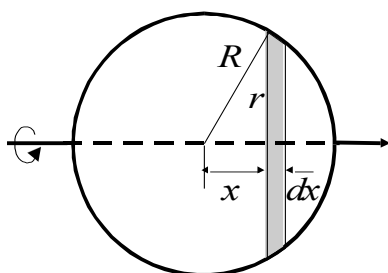
$$dV = \pi r^2 dx = \pi(R^2 - x^2) dx$$

a njegova masa:

$$dm = \rho dV$$

Prema tome elementarni moment inercije, odnosno moment inercije jednog diska je:

$$dI = \frac{\pi \rho}{2} (R^2 - x^2)^2 dx \quad (7.42)$$



Slika 7.11. Moment inercije lopte

Integracija od  $-R$  do  $R$  se može zameniti sa dva integrala od  $0$  do  $R$ . Za moment inercije lopte dobija se sledeći izraz:

$$I = 2 \frac{\pi \rho}{2} \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{8\pi}{15} \rho R^5$$

Kako je  $m = \rho V = (4\pi \rho R^3)/3$ , sledi:

$$I = \frac{2}{5} mR^2 \quad (7.43)$$

**Moment inercije ravne ploče**, širine  $a$  i dužine  $b$ , oko ose normalne na ploču koja prolazi kroz njen centar, (bez obzira na na debljinu) nećemo izvoditi, ali ćemo navesti konačni izraz za njegovo izračunavanje:

$$I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \quad (7.44)$$

Ma kakav da je oblik tela, uvek se može naći rastojanje,  $K$ -krak inercije, od ose obrtanja, na kome bi masa tela, ako bi tamo bila postavljena, imala isti momenat inercije kao i samo telo u odnosu na istu osu.

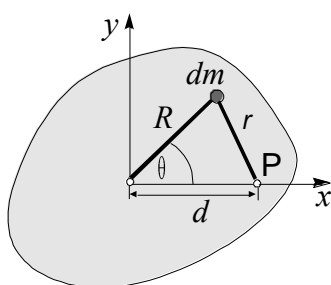
$$I = mK^2, \quad \text{dakle} \quad K = (I/m)^{1/2} \quad (7.45)$$

Tako bi za štap mase  $m$  i dužine  $L$  oko ose kroz centar bilo:

$$I_0 = \frac{1}{12} mL^2 ; \quad K_0 = \sqrt{L^2 / 12} = L/(2\sqrt{3}) = 0,289L$$

Korisna veza koja nam omogućava da izračunamo moment inercije jednog čvrstog tela oko ma koje ose ako je poznat njegov moment inercije oko neke paralelne ose naziva se **teorema o paralelnim osama** ili **Štajnerov obrazac** (a negde i Lagranžeov). Obično se uzima da je poznat moment inercije oko ose koja prolazi kroz centar mase tela. Neka  $P$  predstavlja proizvoljnu tačku čvrstog tela na rastojanju  $d$  od centra mase, a  $x$  osa spaja  $P$  i c.m., slika 7.12. Neka kroz c.m. i kroz  $P$  prolaze paralelne ose normalno na ravan crteža.

Moment inercije  $I_0$  oko ose kroz centar masa je:



Slika 7.12. Štajnerov obrazac

$$I_0 = \int R^2 dm \quad (7.46)$$

a oko paralelne ose kroz  $P$ :

$$I = \int r^2 dm$$

Veza  $r$  i  $R$  na osnovu priložene slike data je kosinusnom teoremom:

$$r^2 = R^2 + d^2 - 2dR\cos\theta \quad (7.47)$$

ili pošto je  $R\cos\theta = x$  za element  $dm$ :

$$r^2 = R^2 + d^2 - 2dx \quad (7.48)$$

Kada se  $r$  zameni u izraz za  $I$ , dobijamo:

$$I = \int R^2 dm + d^2 \int dm - 2d \int x dm \quad (7.49)$$

Prvi član na desnoj strani je  $I_0$ , drugi član je  $md^2$ , a treći nula iz definicije  $x$  koordinate centra mase, jednačina (6.3), pošto se centar mase poklapa sa koordinatnim početkom

$$x_{cm} = (1/m) \int x dm = 0 \quad (7.50)$$

Dakle, možemo pisati da je:

$$I = I_0 + md^2 \quad (7.51)$$

Moment inercije čvrstog tela oko bilo koje ose jednak je zbiru njegovog momenta inercije oko paralelne ose, koja prolazi kroz centar masa, i proizvoda mase tela i kvadrata rastojanja izmedju osa. Ovo je Štajnerov obrazac.

Posledica je da je moment inercije oko ose kroz centar mase manji od momenta inercije oko ma koje druge paralelne ose.

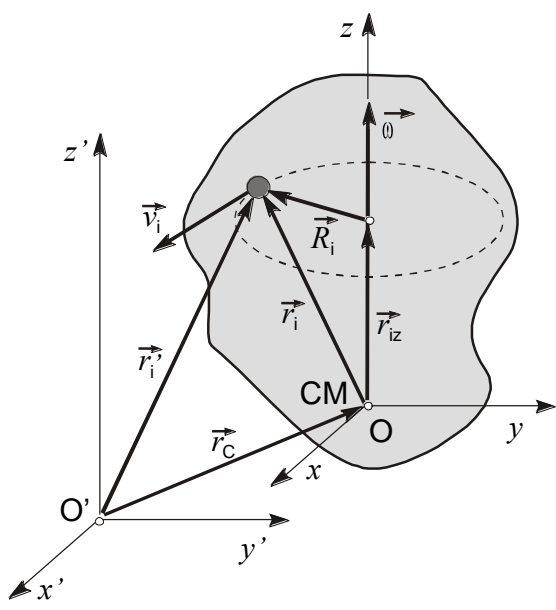
## 7.6. Složeno kretanje krutog tela.

Kao što smo već istakli, složeno kretanje krutog tela može da se opiše tako što će se posebno opisivati njegovo translatorno kretanje preko kretanja njegovog centra mase, a posebno trenutno rotaciono kretanje oko centra mase ili neke od osa koja prolazi kroz centar mase. Razmotrimo kretanje tela, slika 7.13, u čijem se centru masa, C, nalazi koordinatni sistem 0, takav da su mu ose uvek paralelne osama nepokretnog sistema 0'. Uočimo proizvoljnu tačku tela mase  $m_i$ , njen položaj u nepokretnom sistemu određen je sledećim izrazom:

$$\vec{r}_i'(t) = \vec{r}_c(t) + \vec{r}_i(t) \quad (7.52)$$

Translatorno kretanje centra mase opisano je funkcijom  $\vec{r}_c(t)$  i određeno je jednačinom:

$$m \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F} \quad (7.53)$$



Slika 7.13. Složeno kretanje krutog tela

gde je  $\vec{F}$  rezultanta spoljašnjih sila koje deluju na telo.

Funkcija  $\vec{r}_i(t)$  karakteriše trenutno rotaciono kretanje materijalne tačke. Ako pretpostavimo da se u uočenoj trenutku rotacija vrši oko Oz ose, tada je trenutno rotaciono kretanje celog tela oko uočene ose određeno već poznatom jednačinom promene momenta impulsa, u odnosu na z-osu:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \quad (7.54)$$

Dakle, poznavanjem spoljašnjih sila koje na telo deluju i njihovih momenata, složeno kretanje tela će biti potpuno određeno i kretanje svake tačke biće opisano jednačinom

(7.52). Isti zaključak važi i ako se ne ograničimo na rotaciju oko stalne ose (Oz), već ako je u pitanju rotacija oko stalne tačke-centra mase.

Razmotrićemo neke opšte zaključke u vezi sa složenim kretanjem krutog tela. Pretpostavimo prvo da je kretanje samo translatorno. Koliki mu je moment impulsa u odnosu na centar mase u tom slučaju? Neka se telo kreće brzinom  $\vec{v}$ , radi jednostavnosti duž x-ose. Tada je brzina svake tačke ista i jednaka brzini centra mase  $\vec{v}_{cm} = \vec{v}$ , slika 7.14. Moment impulsa čestice mase  $m_i$  može se izraziti na sledeći način:

$$L_i = r_i p_i \sin\theta = m_i v r_i \sin\theta = m_i v y_i \quad (7.55)$$

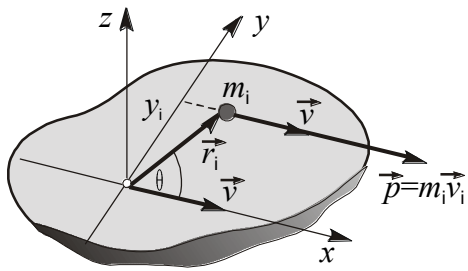
Ukupan moment impulsa za celo telo je:

$$L = v \sum m_i y_i$$

Medjutim iz definicije centra mase imaćemo

$$\sum m_i y_i = m y_{cm} = 0$$

jer smo koordinatni početak postavili baš u centar mase tela. Prema tome ukupan moment impulsa je:



Slika 7.14. Moment sile i moment impulsa pri translacionom kretanju krutog tela

$$\vec{L} = 0 \quad (7.56)$$

Dakle, kada se telo kreće translaciono moment impulsa oko ose koja prolazi kroz centar mase normalno na pravac kretanja je nula. Brzina promene momenta impulsa,  $d\vec{L}/dt$  je takodje nula, pa je i  $\vec{M}_{cm}=0$ . Drugim rečima, kada se telo kreće translaciono linija dejstva rezultante spoljašnjih sila prolazi kroz centar mase tela.

Pokazali smo ranije da je  $\vec{L}=I_0 \cdot \vec{\omega}$ . Moment impulsa tela koje vrši složeno, istovremeno translaciono i rotaciono kretanje, pošto translacija ne doprinosi, može se jednostavno pisati kao:

$$\vec{L}_{c.m.}=I_0 \cdot \vec{\omega} \quad (7.57)$$

gde je  $I_0$  moment inercije u odnosu na osu kroz centar mase.

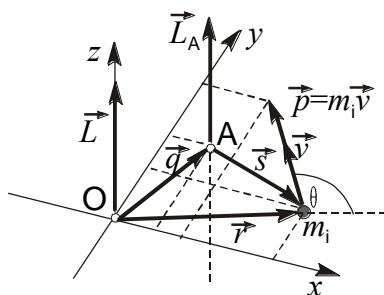
Takodje je:

$$\vec{M}_{cm} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = I_0 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_0 \cdot \vec{\alpha} \quad (7.58)$$

Moment impulsa tela je konstantan ako je rezultanta momenata spoljašnjih sila oko centra mase jednaka nuli. Pri tome je i ugaona brzina konstantna.

Dakle, ako linija dejstva rezultante spoljašnjih sila prolazi kroz centar mase tela, telo se ili ne obrće, ili se obrće konstantnom ugaonom brzinom.

Obzirom da se u slučaju složenog kretanja centar masa kao centar rotacije, odnosno u specijalnom slučaju rotacije oko ose koja prolazi kroz centar masa ta osa, translaciono kreće u odnosu na nepokretni sistem  $O'$ , slika 7.1., izvešćemo izraz za promenu momenta impulsa u odnosu na pokretnu osu.



Slika 7.15. Moment impulsa jedne čestice

Razmotrimo najpre moment impulsa jedne čestice, mase  $m_i$ , pri rotaciji oko stalne ose,  $Oz$ , normalne na ravan u kojoj se čestica kreće, a zatim oko njoj paralelne ose kroz tačku A koja se kreće. Na slici 7.15. je prikazana čestica mase  $m_i$ , brzine  $\vec{v}$  u položaju  $\vec{r}$  u odnosu na stalnu tačku  $O$ . Moment impulsa,  $\vec{L}$ , čestice u odnosu na osu  $Oz$  dat je sledećim izrazom:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (7.59)$$

sa:

Vektor  $\vec{L}$  usmeren je duž z-ose, a intenzitet mu je dat

$$L = r \cdot p \cdot \sin\theta = m_i \cdot v \cdot r \cdot \sin\theta$$

gde je  $\theta$  ugao između vektora  $\vec{r}$  i vektora  $\vec{p}$ . Posmatrajmo sada drugu osu koja prolazi kroz tačku A i kreće se zajedno sa njom ostajući paralelna sama sebi proizvoljnom brzinom  $\vec{v}_A$ . Neka je položaj tačke A definisan vektorom  $\vec{q}$ , a vektor  $\vec{s}$  neka definiše položaj čestice mase  $m_i$  u odnosu na tačku A. Moment impulsa čestice u odnosu na osu kroz A biće:

$$\vec{L}_A = \vec{s} \times \vec{p} \quad (7.60)$$

Kako se i osa i čestica kreću to će oba vektora i  $\vec{s}$  i  $\vec{p}$  biti promenljivi i po veličini i po pravcu. Brzina promene momenta impulsa sa vremenom će biti:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d(\vec{s} \times \vec{p})}{dt} = \vec{s} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{s}}{dt} \times \vec{p} \quad (7.61)$$

Sa slike je medjutim  $\vec{r} = \vec{q} + \vec{s}$ , odnosno  $\vec{s} = \vec{r} - \vec{q}$ , pa je:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{q}}{dt}$$

Zamenom u jednačinu (7.61) dobijamo:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{s} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} - \frac{d\vec{q}}{dt} \times \vec{p} \quad (7.62)$$

Izvod impulsa po vremenu,  $d\vec{p}/dt$ , je zapravo jednak rezultanti sila koje deluju na česticu pa je prvi član

$$\vec{s} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{M}_A$$

jednak momentu sile oko ose koja prolazi kroz A, dakle oko pokretne ose.

Član  $d\vec{r}/dt$  je po definiciji brzina čestice pa je njen vektorski proizvod sa  $\vec{p}$  jednak nuli, zbog paralelnosti  $\vec{v}$  i  $\vec{p}$ . Jednačina (7.61) se prema tome svodi na:

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A - \frac{d\vec{q}}{dt} \times \vec{p} \quad (7.63)$$

Ova jednačina je izvedena za jednu česticu. Slična jednačina može da se napiše za bilo koju česticu. Kada se posmatra celo telo jednačine za sve čestice se mogu sabrati. Leva strana zbira predstavlja brzinu promene ukupnog momenta impulsa. Zbir momenata sila na desnoj strani je rezultanta spoljašnjih momenata, jer se momenti unutrašnjih sila potiru. Član  $d\vec{q}/dt = \vec{v}_A$  je jednak za sve čestice i kako je  $\Sigma \vec{p}_i = \Sigma m_i \vec{v} = m \vec{v}_c$ , jednačina (6.2), biće:

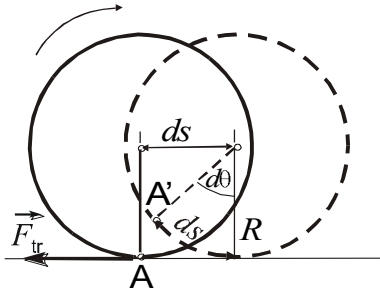
$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A - m \vec{v}_A \times \vec{v}_c \quad (7.64)$$

gde je  $\vec{v}_c$  brzina centra masa tela.

$\vec{L}_A$  je ovde moment impulsa sistema u odnosu na pokretnu osu, a  $\vec{M}_A$  rezultanta momenta spoljašnjih sila u odnosu na ovu osu.

Ilustrovaćemo složeno kretanje tela i vezu translatorsnog i rotacionog kretanja na sledećem primeru.

PRIMER: Za kotrljanje valjkastog tela bez klizanja naći vezu izmedju linearne brzine tela i ubrzanja njegovog centra mase i ugaone brzine i ubrzanja tela. Ovi odnosi se lako, geometrijski, mogu izraziti uz pomoć slike 7.16. Sa slike je:



Slika 7.16. Kotrljanje bez klizanja

$$ds=Rd\theta$$

Deobom ovog izraza sa dt dobijamo:

$$\frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

odnosno  $v=R\omega$ . Diferenciranjem ovog izraza dobijamo i da je  $a=R\alpha$ .

### 7.7. Kinetička energija, rad i snaga tela pri rotaciji.

Posmatrajmo obrtanje jedne čestice, mase  $m_i$ , oko stalne ose ugaonom brzinom  $\vec{\omega}$ , na položaju  $\vec{r}_i$  od ose. Linijaska brzina čestice, kao što je poznato data je sa  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ . Kinetička energije te čestice je

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \quad (7.65)$$

Ukupna kinetička energija tela sastavljenog od n čestica, pri rotaciji oko stalne ose, ugaonom brzinom  $\vec{\omega}$ , biće data sledećim izrazom:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

Kako je izraz u zagradi moment inercije tela u odnosu na datu osu rotacije, I, to je:

$$E_k = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \quad (7.66)$$

Istaknimo sličnost ovog izraza sa izrazom za  $E_k$  kod linearnog kretanja:  $m \rightarrow I$ ,  $v \rightarrow \omega$ ,  $E_k = mv^2/2$ . Šta se događa ukoliko telo istovremeno vrši i rotaciono i translaciono kretanje?

Neka telo rotira oko ose koja prolazi kroz njegov centar mase ugaonom brzinom  $\vec{\omega}$  i pri tom se kreće translatorno brzinom  $\vec{v}_c$ . Ukupna brzina pojedinačne čestice biće:

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

U tom slučaju kinetička energija tela biće data sledećim izrazom:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v_c^2 \sum_{i=1}^n m_i + \vec{v}_c \left( \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Sumiranjem naznačenih izraza, imajući u vidu definiciju centra mase, dobija se:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \vec{v}_c (\vec{\omega} \times m \vec{r}_c) + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

Kako je pretpostavljeno da telo rotira oko centra mase biće  $\vec{r}_c=0$ , pa ostaje:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \quad (7.67)$$

gde je  $\vec{v}_c$  brzina centra mase i  $I_c$  moment inercije u odnosu na osu koja prolazi kroz centar mase i oko koje telo rotira.

Dakle, rotaciona energija je samo vid mehaničke energije i ravnopravno sa drugim vidovima učestvuje u zakonu održanja ukupne mehaničke energije.

PRIMER I: Već smo razmatrali uz definisanje pojma momenta sile primer sa tegom i masivnim točkom, slika 7.6., pa ga sada pogledajmo sa energijskog aspekta. Na račun potencijalne energije tela mase  $m_1$  pored porasta njegove kinetičke energije pri padu dolazi i do rotacije masivnog točka, mase  $m_2$  i momenta inercije  $I$ , pa za ovaj slučaj zakon održanja mehaničke energije ima oblik:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Korišćenjem veze,  $v = \omega R$ , između brzine padanja tela i ugaone brzine rotacije točka, odavde sledi za brzinu padanja tela mase  $m_1$  analogan izraz ranijem:

$$v^2 = 2 \left\{ \frac{g}{1 + I / m_1 R^2} \right\} h$$

Dakle, primenom zakona održanja ukupne mehaničke energije na navedeni slučaj dobija se isti rezultat kao i pri korišćenju diferencijalnih jednačina kretanja, ali u ovom slučaju znatno jednostavnijim matematičkim postupkom.

PRIMER II: Odrediti iz zakona održanja mehaničke energije brzinu centra mase tela pri kotrljanju niz strmu ravan, slika 7.17., zanemarujući trenje. Sa slike je predjeni put  $AB=s$ . Iz zakona održanja energije, u tačkama A i B, je:

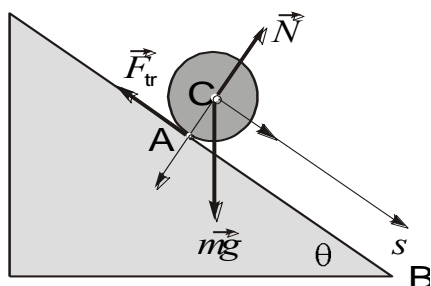
$$(E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B$$

odnosno:

$$0 + mgs \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + 0$$

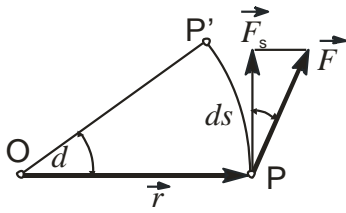
Kako je  $\omega = v/R$ , jednostavno možemo dobiti za brzinu u B sledeći izraz:

$$v = \sqrt{\frac{2gs \cdot \sin \theta}{1 + (I_0/mR)^2}}$$



Slika 7.17. Kotrljanje niz strmu ravan

Da bi sagledali rad kod rotacionog kretanja posmatrajmo dejstvo spoljašnje sile  $\vec{F}$  u napadnoj tački P na telo koje se obrće oko stalne ose 0, normalne na ravan crteža, slika 7.18. Obrtanje tela za mali ugao  $d\varphi$  odgovara pomeraju tačke P za  $ds = r d\varphi$  i rad sile  $\vec{F}$  u tom slučaju iznosi:



Slika 7.18. Rad kod rotacionog kretanja

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_s \cdot ds = F_s \cdot r \cdot d\varphi$$

Kako je  $F_s \cdot r$  intenzitet momenta sile  $\vec{M}$ , to je elementarni rad jednak:

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} \quad (7.68)$$

a za konačno ugaono pomeranje imamo:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi \quad (7.69)$$

Ovaj izraz se odnosi na celo telo. U slučaju dejstva više sila ukupan rad je jednak radu rezultante momenata sile.

Na osnovu jednačine (7.28) moment sile se može dalje transformisati na sledeći način:

$$M = I\alpha = I\omega \frac{d\omega}{dt} \quad \text{jer je } \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \omega$$

odnosno, možemo pisati da je:

$$Md\varphi = I\omega d\omega$$

pa je:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2 \quad (7.70)$$

Rad koji izvrši rezultanta momenata spoljašnjih sila jednak je povećanju kinetičke energije tela, slično teoremi o radu i energiji za translatorno kretanje.

Snaga tela koje rotira ugaonom brzinom  $\vec{\omega}$  definiše se sledećim izrazom:

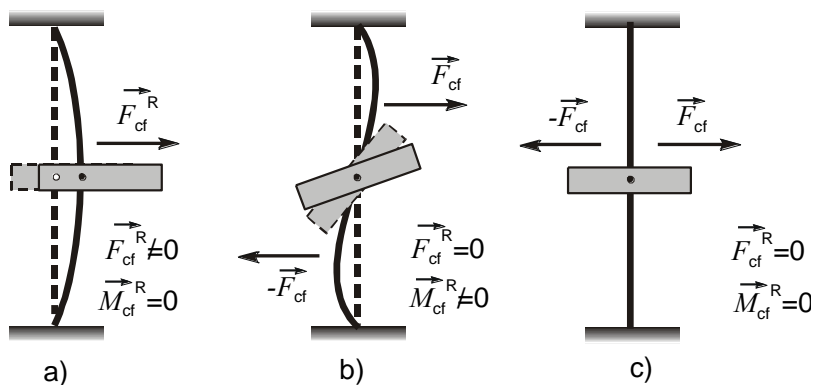
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \quad (7.71)$$

Dakle, snaga tela pri rotacionom kretanju brojno je jednaka skalarnom proizvodu momenta spoljašnjih sila,  $\vec{M}$  i ugaone brzine  $\vec{\omega}$ .

### 7.8. Rotacija tela oko slobodne ose. Slobodne ose rotacije.

Do sada smo razmatrali kretanje tela oko stalne ose, koja je učvršćena u dve tačke. Medjutim ako osa nije učvršćena, ili je učvršćena samo u jednoj tački, položaj ose će se menjati u odnosu na neki nepokretan koordinatni sistem, u zavisnosti od raspodele masa tela oko ose. Do pomeranja ose bi došlo ako osa ne prolazi kroz centar mase ili uopšte ako je rezultanta centrifugalnih sila različita od nule.

To se može pokazati ako telo rotira oko fiksirane ose od elastičnog materijala - doći će do deformacije osovine, što je ilustrovano na slici 7.19.

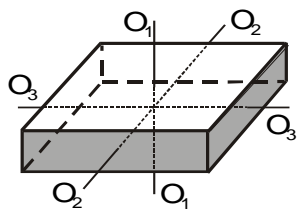


Slika 7.19. Deformisanje elastične ose rotacije pri različitim rasporedima masa

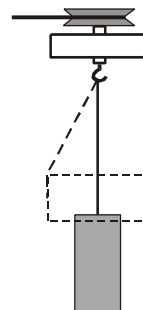
U slučaju a) doći će do savijanja ose, ako centar mase tela ne leži na osi, pod dejstvom rezultujuće centrifugalne sile. U slučaju b) centar mase leži na osi rotacije, ali je raspored masa takav da se javlja spreg centrifugalnih sila koji će deformisati osu. Samo u slučaju c) kada osa prolazi kroz centar mase i kada su rezultujući  $\vec{F}_{cf}^R=0$  i  $\vec{M}_{cf}^R=0$  telo neće vršiti nikakvo dejstvo na osu.

Osa rotacije čiji se položaj u prostoru održava u odsustvu bilo kakvih spoljašnjih sila (na ležišta ose) naziva se slobodna osa rotacije.

Slobodna osa mora prolaziti kroz centar mase tela. Kroz centar mase prolazi beskonačno mnogo osa, međutim uslovi rotacije neće biti jednaki za svaku od njih i zavisice od momenta inercije,  $I$ , za svaku od njih. Teorijski se dokazuje da za svako telo postoje tri uzajamno normalne ose koje prolaze kroz centar mase i koje predstavljaju slobodne ose rotacije, a nazivaju se glavne ose inercije. Kod geometrijski pravilnog tela glavne ose inercije se poklapaju sa njegovim osama simetrije, slika 7.20.



Slika 7.20. Glavne ose inercije

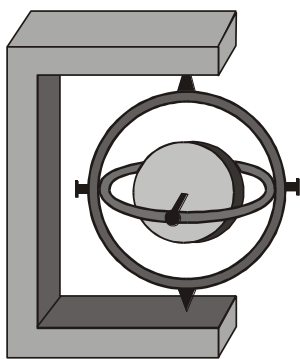


Slika 7.21. Promena ose rotacije

Momenti inercije za glavne ose rotacije su u opštem slučaju različiti,  $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ . U odsustvu spoljašnjih sila stabilnost rotacije oko glavnih osa inercije je različita i najveća je oko osa sa najvećim i najmanjim momentom inercije.

Za slučaj  $I_1 > I_2 > I_3$  rotacija oko osa sa  $I_1$  i  $I_3$  je stabilna, a sa  $I_2$  je labilna. To se može pokazati na cilindričnom telu koje se obrće uz pomoć centrifugalne mašine, slika 7.21. Telo se u početku obrće oko ose sa najmanjim momentom inercije  $I$ . Ako bilo kakvo spoljašnje dejstvo izvede telo iz ravnoteže, spreg centrifugalnih sila će ga prevesti u rotaciju oko ose sa najvećim momentom inercije.

Telo pri stabilnoj rotaciji, bez dejstva spoljašnjih sila teži da zadrži stalnu orijentaciju ose rotacije u prostoru. Ovo je posledica zakona održanja momenta impulsa, jer ako je  $\vec{M}=0$ , onda je  $\vec{L}=I\vec{\omega}=\text{const}$ , odnosno  $\vec{\omega}=\text{const}$ .



Slika 7.22. Kardanov zglob

U prirodi su retko ispunjeni uslovi za rotaciju tela oko slobodne ose. Spoljašnje sile, gravitacija, trenje, itd. izazivaju promenu ose rotacije. Da bi se ipak omogućila slobodna rotacija, rotacija oko slobodne ose, primenjuje se u praksi (osovine motora, žiroskopi,..) takozvani Kardanov zglob, prikazan na slici 7.22. Masivan točak, 0, je postavljen tako da mu je omogućena rotacija oko sve tri glavne ose. Pri velikim brzinama točak zadržava orijentaciju rotacije bez obzira na položaj rama sistema.

### 7.8.1. Kretanje čigre. Ugaona brzina precesije.

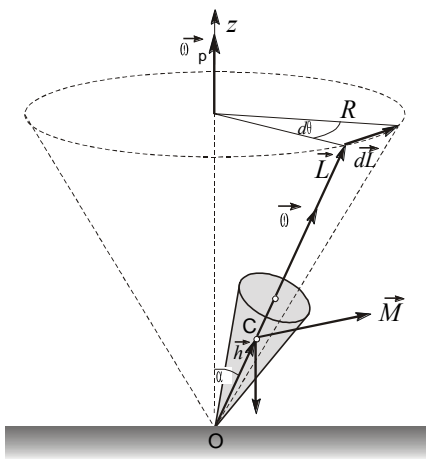
Čigra je simetrično kruto telo koje se obrće velikom ugaonom brzinom oko slobodne ose-ose simetrije, čija je jedna tačka stalna i to je u stvari vrh čigre, odnosno tačka kojom se oslanja o podlogu. Tačka oslonca nalazi se ispod centra masa čigre, kao što je to prikazano na slici 7.23.

Sila zemljine teže,  $\vec{Q}$ , dejstvuje momentom

$$\vec{M} = \vec{h} \times \vec{Q} = h \times \vec{Q}_n \quad (7.72)$$

gde je  $\vec{h} = \vec{r}$ , vektor položaja centra mase. Vektor  $\vec{M}$  leži u horizontalnoj ravni. Stalno dejstvo momenta  $\vec{M}$  na osu čigre izaziva priraštaj momenta impulsa:

$$d\vec{L} = \vec{M} dt \quad (7.73)$$



Slika 7.23. Kretanje čigre

Vektor  $d\vec{L}$  je paralelan sa  $\vec{M}$  i normalan na  $\vec{L}$ , usled čega će rezultujući vektor momenta impulsa čigre biti konstantnog intenziteta, jednakog početnom intenzitetu vektora  $\vec{L}$ . Na taj način će se pravac vektora  $\vec{L}$  menjati, a time i osa čigre, opisujući jednu konusnu površinu (izvrnutu kupu) sa vrhom u osloncu čigre. Vektor  $\vec{L}$  će rotirati oko vertikalne ose z (paralelne sa ubrzanjem  $\vec{g}$ ) ugaonom brzinom  $\vec{\omega}_p$ . Ovo kretanje se naziva precesija, a  $\vec{\omega}_p$  ugaona brzina precesije čigre. Ugaonu brzinu precesije ćemo odrediti uz pomoć slike 7.23 i relacija (7.72) i (7.73).

Intenzitet momenta sile  $\vec{Q}$  biće:

$$M = hQ \sin \alpha$$

Priraštaj momenta impulsa, prema slici 7.23 biće

$$dL = (R \cdot d\theta) = L \cdot \sin \alpha \cdot \omega_p dt = M dt$$

gde je  $\omega_p = d\theta/dt$  ugaona brzina obrtanja vektora  $\vec{L}$  oko z-ose, odnosno ugaona brzina precesije čigre. Iz navedenih jednačina dobija se za  $\omega_p$  sledeći izraz:

$$\omega_p = \frac{hQ \sin \alpha}{L \sin \alpha} = \frac{hQ}{L} = \frac{hQ}{I\omega} \quad (7.74)$$

Odavde sledi da je za velike ugaone brzine čigre ( $\omega$ ) njena precesiona brzina ( $\omega_p$ ) mala, odnosno njena osa rotacije je stabilna u prostoru. Kada se  $\omega$  smanji pojavljuje se zapažena precesija njene ose rotacije.

Moment sile, moment impulsa i ugaona brzina precesije su vektorske veličine. Na osnovu relacije (7.74) i slike 7.23 nije teško izraziti vezu između navedenih veličina u vektorskom obliku

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \quad (7.75)$$

Za slučaj da je  $\vec{\omega}_p$  normalno na  $\vec{L}$ , intenzitet vektora  $\vec{M}$  je:

$$M = \omega_p \cdot L = \omega_p \cdot I \cdot \omega \quad (7.76)$$

Dakle  $\omega_p$  je srazmerno momentu spoljašnje sile koja deluje na telo. Obrnuto, ukoliko je telo prinudjeno da se kreće precesiono ono razvija moment sile srazmeran brzini precesije. Ova proporcionalnost  $M$  i  $\omega_p$  koristi se za mnoge uređaje automatske kontrole ili žirostabilizatora.

### 7.8.2. Žiroskopi i primena.

Žiroskop smo već definisali kao telo koje se obrće oko stalne tačke u prostoru koja je ujedno i centar mase tela. Konstrukciono najjednostavniji, demonstracioni, žiroskop sa polugom prikazan je na slici 7.24. Ako se masivni disk zarotira i osovina postavi na oslonac 0, ceo sistem će se ravnomerno okretati oko tačke 0 pri čemu prvobitna osa rotacije diska ostaje horizontalna-telo neće pasti, kako bi se očekivalo. Razlog za to je precesiono kretanje žiroskopa. Ovde važe sve relacije i rezonovanje kao za čigru s tim što je precesiju jednostavnije opisati zbog ortogonalnosti vektora  $\vec{L}_o$  i ose precesije,  $\vec{\omega}_p$ , sa momentom spoljašnje sile  $\vec{M}_o = \vec{r} \times m\vec{g}$ . Veza ovih veličina

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L} \quad (7.77)$$

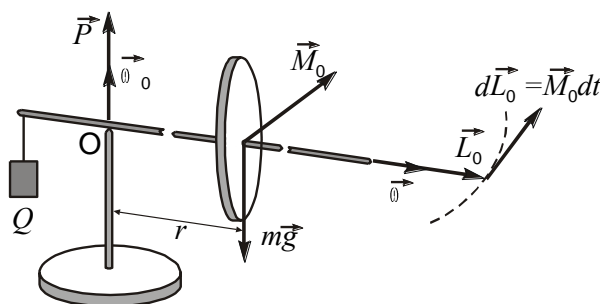
zbog njihove ortogonalnosti je :

$$M = \omega_p \cdot I \cdot \omega \quad (7.78)$$

odnosno odavde je:

$$\omega_p = \frac{M}{I\omega} \quad (7.79)$$

Dakle, dejstvo određenog spoljašnjeg momenta sile na telo koje rotira oko svoje ose izaziva precesiju tela ugaonom brzinom  $\omega_p$ , datu gornjim izrazom.



Slika 7.24. Princip žiroskopa

Sa slike se vidi da je promena pravca vektora  $\vec{L}_o$  takva da se on pomera u smeru pravca vektora  $\vec{M}_o$ . Ova dva vektora, zbog kretanja i vektora  $\vec{M}_o$ , nikada ne postanu kolinearni. Kod primera gde se kolinearnost postigne, precesija prestaje. Kod žiroskopa to nije slučaj.

Poseban primer žiroskopa je žiroskop sa Kardanovim prstenovima, prikazan na slici 7.22. U tom slučaju centar masa tela, kada spoljašnji okvir miruje takodje miruje i ne

postoji moment sile koji bi izazvao precesiju. Zbog toga se smer rotacije masivnog diska zadržava veoma dugo. Ovaj uređaj se naziva direkcionni žiroskop i upotrebljava se u navigaciji kao komplement magnetnom kompasu.

Žirokompas je poseban tip žiroskopa sa Kardanovim prstenom kod koga je za jedan od prstenova obešen određen teret koji se u početku nalazi uspravno ispod centra mase. Zbog obrtanja Zemlje "vertikala" se lagano menja u prostoru. Teret deluje na žiroskop momentom koji stalno održava osu žiroskopa kolinearnom sa osom Zemlje.

Najkorisnija osobina žiroskopa je da on razvija ugaonu brzinu  $\omega_p$  proporcionalnu momentu  $M$ , što smo već istakli. Obrnuto, ako je žiroskop prinudjen na precesiju on razvija moment sile srazmeran ugaonoj brzini precesije- $\omega_p$ . To se koristi za kontrolu ili upravljanje raznim sistemima. Taj princip koristi i žirostabilizator koji se upotrebljava za smanjivanje bočnog ljuljanja broda.

PRIMER: Demonstracioni žiroskop poluprečnika  $r=4$  cm se nalazi na poluzi dužine  $\ell=12$  cm i rotira ugaonom brzinom  $\omega=100$  rad/s Kolika mu je ugaona brzina precesije?

$$\omega_p = \frac{M}{I\omega} = \frac{mgl}{I\omega} \quad I = \frac{1}{2} mr^2$$

odakle je:

$$\omega_p = \frac{2gl}{\omega r^2} = 14,7 \text{ rad/s.}$$

Dakle, ugaona brzina precesije žiroskopa je 14,7 rad/s.

## VIII

### GRAVITACIJA

#### 8.1. Njutnov zakon gravitacije.

Problemi odnosa i kretanja nebeskih tela predstavljali su oduvek najveću zagonetku za čoveka. Tek je poljski fizičar i astronom Nikolaj Kopernik (1473-1543) ukazao na mogućnost da se Zemlja i ostale planete kreću oko Sunca. Johan Kepler (1571-1630) je, na osnovu analize astronomskih podataka, prvi formulisao zakone kretanja planeta oko Sunca, kao najmasovnijeg tela u planetarnom sistemu i tela koje se praktično nalazi u centru mase sistema.

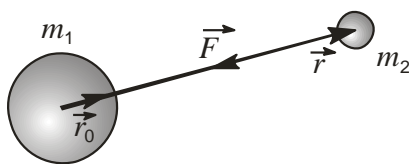
Odlučujući korak učinio je Isak Njutn (1642-1724) formulišući zakon gravitacije - interakciju koja uslovljava kretanje planeta oko Sunca.

Njutnov zakon univerzalne gravitacije tvrdi da je interakcija između dva tela privlačna i centralna, tj. da deluje samo duž najkraćeg rastojanja koje spaja dva tela.

Sila univerzalne gravitacije između dva tela (čestice) mase  $m_1$  i  $m_2$ , kojom telo mase  $m_1$  deluje na telo mase  $m_2$ , proporcionalna je veličinama masa a obrnuto proporcionalna kvadratu njihovog međusobnog rastojanja  $r$ , označenog na sl. 8.1.

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{r}_0 \quad (8.1)$$

Pošto je masa pozitivna veličina, znak minus ukazuje da je gravitacijska sila uvek privlačna. Konstanta univerzalne gravitacije,  $\gamma$ , ima istu vrednost u celom kosmosu. Eksperimentalno je izmerena i iznosi:



Slika 8.1. Njutnov zakon gravitacije

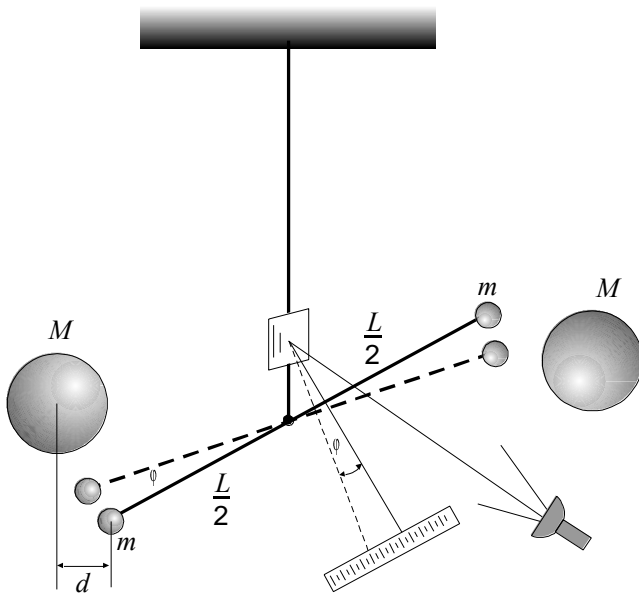
$$\gamma = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \text{ (m}^3\text{/kgs}^2\text{)}$$

Ovo je očigledno veoma mali broj, pa je i  $\vec{F}$  malo ukoliko mase tela nisu velike (recimo kao planete). Sila bi mogla biti velika ako je  $r$  veoma malo, međutim tada deluju druge jače sile tako da je gravitacija maskirana.

Da bi se eksperimentalno odredila konstanta univerzalne gravitacije  $\gamma$  - bilo bi potrebno izmeriti silu privlačenja dva tela poznatih masa na poznatom rastojanju. Međutim, zbog malog intenziteta sila, praktično ih je nemoguće meriti u laboratoriji, pomoću običnog dinamometra. Prvo merenje  $\gamma$  izveo je lord Kevendiš (Cavendish) 1798. godine. Taj metod se sačuvao i do danas. Uredjaj za merenje  $\gamma$  naziva se torziona vaga i prikazana je na slici 8.2.

Na tanak vodoravan štap, dužine  $L$ , postavljaju se dve kugle mase  $m$  i sve se okači o tanku kvarcnu nit sa fiksiranim ogledalom. Kada se ovim kuglama prinesu dve veće kugle, masa  $M$ , na rastojanju  $d$  od centara, na svaku posebno, deluje sila

$$F = \gamma \frac{mM}{d^2}$$



Slika 8.2. Kevendišova torziona vaga

Dejstvo para sila  $\vec{F}$  izaziva pojavu momenta sila tj. sprega u odnosu na kvarcnu nit odnosno na tačku vešanja:

$$M_g = FL = \gamma mM \frac{L}{d^2} \quad (8.2)$$

Ovaj moment uzrokuje uvijanje kvarcne niti za ugao  $\varphi$ . U tom položaju  $M_g$  je izjednačen sa elastičnim torzionim momentom:

$$M = k \cdot \varphi \quad (8.3)$$

gde je sa k označena konstanta proporcionalnosti karakteristična za datu nit. U tom položaju je:

$$k\varphi_1 = \gamma \frac{mM}{d^2} L \quad (8.4)$$

Kada se velike kugle premeste sa druge strane malih kugli doći će do otklona  $-\varphi_2$  i u tom položaju će biti:

$$k\varphi_2 = -\gamma \frac{mM}{d^2} L \quad (8.5)$$

Iz ova dva izraza sledi da je:

$$\gamma = \frac{k(\varphi_1 - \varphi_2)d^2}{2mML} \quad (8.6)$$

Torziona konstanta, k, niti se određuje iz perioda slobodnih oscilacija sistema bez prisustva većih masa - M. Veza perioda T i konstante k data je sledećim izrazom:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{2k}} \quad (8.7)$$

O ovome ćemo još govoriti kasnije. Savremena merenja  $\gamma$  Kevendišovom metodom dala su sledeću vrednost:

$$\gamma = (6,673 + 0,003) \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

PRIMER: Uspostaviti vezu izmedju gravitacionog ubrzanja na površini Zemlje ( $g$ ) i mase Zemlje, odnosno  $g$  i  $\gamma$ . Kolika je masa Zemlje ako je njen poluprečnik  $R=6,37 \times 10^6$  m. Na telo mase  $m$  na površini Zemlje mase  $M$ , na rastojanju  $R$ , deluje sila:

$$F = \gamma \frac{m \cdot M}{R^2}$$

Ova sila je sila Zemljine teže i ona saopštava telu ubrzanje  $g$ . Dakle, možemo pisati da je:

$$g = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M}{R^2}$$

Odatavde se za  $M$  dobija:

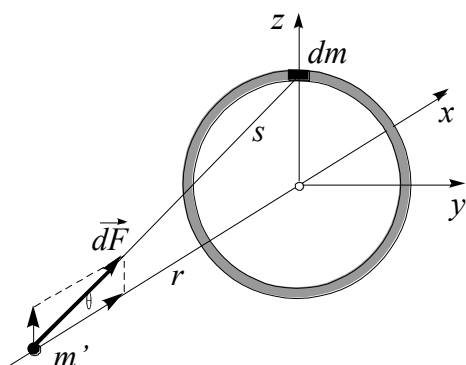
$$M = g \frac{R^2}{\gamma} = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$$

Dakle, gravitacija je odgovorna za privlačenje i kretanje nebeskih tela, ali i za težinu tela na površini Zemlje.

## 8.2. Gravitaciono privlačenje materijalne tačke prstenom i šupljom sferom.

U prethodnom primeru smo prećutno uzeli da je sva masa Zemlje smeštena u njenom centru i da interaguje sa telom mase  $m$  na rastojanju  $R$ . U navedenom razmatranju videćemo da smo bili u pravu.

Iako je zakon gravitacije otkrio sa svoje 24 godine, Njuton nije mogao to da objavi čitavih 19 godina dok nije dokazao da se inercija sfernih tela može računati kao da je sva masa smeštena u njihovom centru. Za to mu je bilo potrebno da pronadje metode diferencijalnog računa.



Slika 8.3. Gravitaciono polje prstena

Posmatrajmo najpre privlačenje jednog tankog prstena mase  $m$  i čestice, mase  $m'$ , na njegovoj osi, kao na slici 8.3.

Intenzitet sile  $d\vec{F}$  između čestice i elementa mase prstena  $dm$  je:

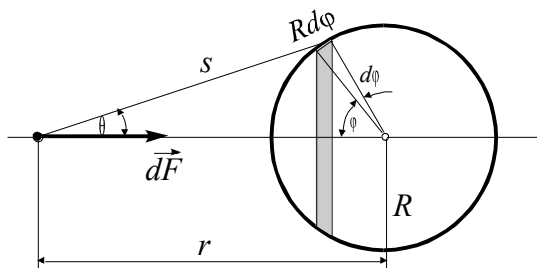
$$dF = \gamma \frac{dm \cdot m'}{s^2} \quad (8.8)$$

Kada se posmatra ceo prsten onda će se, zbog simetrije, komponente sile normalne na  $x$ -osu poništiti. Rezultujuća sila će biti zbir, odnosno integral komponentata duž  $x$ -ose i usmerena je ka centru prstena:

$$F = \int dF \cos\theta = \gamma \frac{m' \cos\theta}{s^2} \int dm = \gamma \frac{mm' \cos\theta}{s^2} = \gamma \frac{mm'}{r^2} \cos^3\theta \quad (8.9)$$

Vidimo da prsten ne privlači česticu kao da je sva masa sakupljena u njegovom centru.

Posmatrajmo sada šuplju sfernu ljusku poluprečnika  $R$  sa tankim zidovima. U tom slučaju sferu možemo izdeliti na niz prstenova, kao što je to prikazano na slici 8.4. Obzirom da gravitacionu silu koja potiče od jednog prstena znamo, integracijom po celoj sferi dobićemo ukupnu silu. Sila  $dF$  kojom prsten mase  $dm$  (šrafirana površina na slici) i širine  $Rd\varphi$  deluje na česticu  $m'$ , biće:



Slika 8.4. Gravitaciono polje sfere

$$dF = \gamma \frac{m' \cdot dm \cdot \cos\theta}{s^2} \quad (8.10)$$

Poluprečnik prstena je  $R\sin\varphi$ , a površina prstena je  $2\pi R\sin\varphi R d\varphi$ . Ako sa  $\delta$  označimo masu po jedinici površine tela, tada je masa prstena,  $dm$  data sledećim izrazom:

$$dm = 2\pi\delta R^2 \sin\varphi d\varphi$$

Primenom kosinusne teoreme na trougao sa slike, možemo pisati sledeću relaciju:

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\varphi \quad (8.11)$$

ako ovaj izraz diferenciramo, biće:

$$2s ds = 2rR \sin\varphi d\varphi$$

jer su  $R$  i  $r$  konstantni. Odavde je:

$$R\sin\varphi d\varphi = \frac{s ds}{r}$$

Sa slike takodje imamo relaciju:

$$s \cdot \cos\theta = r - R\cos\varphi$$

Ovaj izraz i kosinusna teorema (8.11) daju nam

$$\cos\theta = \frac{s^2 - R^2 + r^2}{2rs}$$

Ako odgovarajuće veličine zamenimo u izraz za  $dF$ , imaćemo:

$$dF = \frac{\gamma m' \pi \delta R}{r^2} \frac{s^2 - R^2 + r^2}{s^2} ds \quad (8.12)$$

gde su sve veličine konstantne, osim  $s$ . Ukupna sila dobiće se integracijom ovog izraza po promenljivoj  $s$ , u granicama od  $r-R$  do  $r+R$ . Kada se izvrši integracija dobijamo:

$$F = \int_{r-R}^{r+R} dF = \frac{\gamma m' \pi \delta R}{r^2} 4R$$

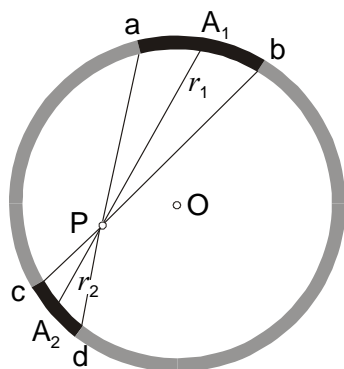
Ukupna masa ljuske je:  $m = 4\pi R^2 \delta$ , pa je konačno:

$$F = \gamma \frac{m \cdot m'}{r^2} \quad (8.13)$$

To znači da tanka sferna ljuska privlači spoljnu česticu kao da je sva masa ljuske skoncentrisana u njenom centru.

Šta se događa ukoliko je čestica  $m'$  smeštena unutar sferne ljuske? Za tačku u ljusci, razmatranje je identično do integracije. Granice integracije su ovde od  $R-r$  do  $r+R$ , a integral daje:

$$F = 0$$



Slika 8.5. Gravitaciono polje u šupljini

Dakle, gravitaciona sila na tački u unutrašnjosti sfere jednaka je nuli. Ovo se također može lako pokazati uz pomoć slike 8.5. Neka je probna masa smeštena u tačku P. Zamislimo dva konusa koja na površini sfere isecaju površine  $A_1$  i  $A_2$  masa  $m_1$  i  $m_2$ . Mase  $m_1$  i  $m_2$  srazmerne su površinama  $A_1$  i  $A_2$  a ove kvadratima prečnika  $r_1$  i  $r_2$ . Kako su sile kojima ove mase deluju na probnu masu u P obrnuto srazmerne kvadratima rastojanja, njihova rezultanta je nula. Cela ljuska se može podeliti na ovaj način i pokazati zaista da je sila u tački P jednaka nuli.

### 8.3. Gravitaciono privlačenje pune homogene sfere.

Puna sfera se može izdeliti na niz koncentričnih ljusaka. Kako svaka ljuska privlači spoljašnju česticu kao da je sva masa u njenom centru, to isto važi i za celu sferu.

Dakle, sfera mase  $m$  deluje na česticu izvan nje, ili na drugu sferu mase  $m'$  silom intenziteta:

$$F = \gamma \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

gde je  $r$  - rastojanje centra sfere od čestice (ili centara sfera).

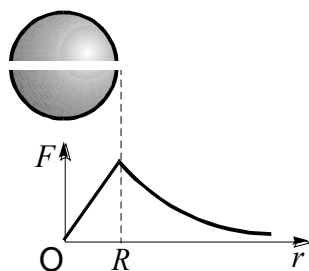
Kolika je sila u tački koja se nalazi u unutrašnjosti pune homogene sfere, na rastojanju  $r$  od centra, ako je  $R$  - poluprečnik sfere, dakle  $r < R$ .

Videli smo da je sila kojom homogena sferna ljuska deluje na materijalnu tačku u njenoj unutrašnjosti jednaka nuli. Dakle na česticu će delovati sila koja potiče samo od mase unutar sfere radijusa  $r$ . Kako je sfera homogena ta masa je  $m_r = m r^3 / R^3$  i njeno dejstvo na česticu mase  $m'$  na rastojanju  $r$  je:

$$F = \gamma \frac{(m r^3 / R^3) \cdot m'}{r^2} = \gamma \frac{m \cdot m'}{R^3} \cdot r$$

Dakle, sila je upravo srazmerna prvom stepenu rastojanja tačke od centra sfere. Kada je  $r=R$  tada je  $F = \gamma m m' / R^2$  a kada je  $r=0$ ,  $F=0$ . Ako bi Zemlja bila homogena i ako bi se kroz njen centar napravio tunel, gravitaciona sila u tunelu bi se sa rastojanjem od centra Zemlje menjala prema grafiku na slici 8.6. Maksimum sile bi bio na površini Zemlje, sila bi linearno opadala do nule prema centru, i opadala kao  $1/r^2$  ka beskonačnim rastojanjima.

Zadatak: Koliki bi bio period oscilovanja tela koje se kreće u tunelu kroz Zemlju, kao u prethodnom razmatranju.



Slika 8.6. Jačina gravitacione sile u zavisnosti od rastojanja

### 8.4. Gravitaciono polje, rad i potencijalna energija.

U slučaju gravitacionih sila (kao i električnih i magnetnih) tela deluju jedna na druge bez neposrednog kontakta. Da bi se objasnilo uzajamno dejstvo razdvojenih tela uvodi se pojam fizičkog

polja kao jednog oblika ispoljavanja materije, posredstvom kojeg se ostvaruju uzajamna dejstva udaljenih tela.

Svako telo mase  $m$  stvara u prostoru gravitaciono polje kojim dejstvuje na bilo koje drugo telo, mase  $m_p$ , koje se nadje u tom polju, silom koja je proporcionalna  $m_p$ , tj:

$$\vec{F} = m_p \cdot \vec{G} \quad (8.14)$$

Vektor  $\vec{G}$  ne zavisi od  $m_p$  i naziva se jačina gravitacionog polja. Dakle:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_p} = -\frac{1}{m_p} \gamma \frac{m \cdot m_p}{r^2} \vec{r}_o = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{r}_o \quad (8.15)$$

Dakle, jačina gravitacionog polja je gravitaciona sila po jedinici mase u tački gde se nalazi probno telo.

Lako je zaključiti da je za Zemlju gravitaciono polje jednako ubrzanju zemljine teže, koje smo ranije već sreli.

Vektor  $\vec{G}$  je kolinearan sa  $\vec{F}$ . Njegov intenzitet zavisi od mase tela koje stvara gravitaciono polje i od položaja tačke u kojoj se određuje njegova jačina. Polje se često definiše kao prostor u kome svakom položaju odgovara po određenom zakonu samo jedna vrednost  $\vec{G}$  i to bez obzira da li je u toj tački prisutno drugo telo ili ne. Probno telo  $m_p$  služi nam samo kao indikator (instrument za merenje) postojanja gravitacionog polja.

Sa druge strane i telo probne mase  $m_p$  stvara svoje polje i deluje na telo  $m$  silom:

$$\vec{F}_p = m \cdot \vec{G}_p \quad (8.16)$$

jednakog intenziteta, ali suprotnog smera od  $\vec{F}$ . Može se zaključiti da je  $\vec{G}_p \neq \vec{G}$ .

Polje je homogeno kada su mu u svim tačkama intenziteti isti i vektori  $\vec{G}$  medjusobno paralelni, a centralno je kada se pravci svih vektora  $\vec{G}$  seku u jednoj tački. Polje usamljenog tela je centralno.

U prisustvu više tela rezultujuće polje je:

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^n \vec{G}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{F}_i}{m_p} = -\sum_{i=1}^n \gamma \frac{m_i}{R_i^3} \vec{R}_i \quad (8.17)$$

gde je  $\vec{R}_i$  rastojanje od datog tela do posmatrane tačke.

Za predstavljenje polja uveden je pojam linija sila polja. To su linije u čijoj se svakoj tački tangenta poklapa sa pravcem vektora  $\vec{G}$ .

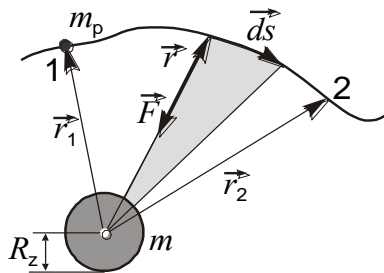
Kod izolovanog tela linije su radijalne prave. Za dva i više tela linije polja su krive linije. Linije polja se ne mogu seći.

Intenzitet polja se pomoću linija izražava preko fluksa. Fluks linija sile gravitacionog polja predstavlja broj linija sile polja kroz jedinicu normalne površine, Očigledno je da će u slučaju izolovanog tela kroz istu površinu na većem rastojanju proći manje linija sila (radijalnih pravih), što znači da će polje biti slabije. To je u saglasnosti sa definicijom gravitacionog polja.

**Rad gravitacione sile** je po definiciji skalarni proizvod gravitacione sile  $\vec{F}$  i predjenog puta  $d\vec{s}$ . Razmotrimo slučaj kretanja materijalne tačke mase  $m_p$  u polju dejstva gravitacione sile mase  $m$  kao na slici 8.7. Elementarni rad je:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m_p \cdot \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

Za sferno telo mase  $m \gg m_p$  je:



Slika 8.7. Rad gravitacione sile

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m_p \cdot \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

Za sferno telo mase  $m \gg m_p$  je:

$$F = -\gamma \frac{m \cdot m_p}{r^2} \vec{r}_0$$

Kako je  $\vec{r}_0 \cdot ds = d\vec{r}$  to sledi:

$$dA = -\gamma \frac{m \cdot m_p}{r^2} \cdot d\vec{r}$$

Ukupan rad od tačke 1 do tačke 2 biće:

$$A_{12} = -\gamma m m_p \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\vec{r}}{r^2} = -\gamma m m_p \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (8.18)$$

Znači rad zavisi od radijalnih rastojanja  $r_1$  i  $r_2$ , a ne zavisi od oblika i veličine puta tela. Ovo je osobina konzervativnih sila što znači da je gravitaciona sila konzervativna. Ovo svojstvo se izražava i na drugi način:

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_L m_p \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (8.19)$$

Cirkulacija vektora  $\vec{F}$ , odnosno  $\vec{G}$ , tj. integral ovih vektora, po zatvorenoj putanji L, jednak je nuli zbog konzervativnosti.

**Potencijalna energija tela u gravitacionom polju** definiše se kao u paragrafu 5.3.2. Na osnovu izraza (8.18), s obzirom da je rad gravitacione sile  $A_{12}$  jednak promeni potencijalne energije probnog tela, sledi:

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U = -\gamma m m_p \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (8.20)$$

Za elementarno pomeranje je odavde  $dA = -dU$ . Iz jednačine (8.20) je rad promena potencijalne energije tela, pa je praktično irelevantno u odnosu na koji referentni nivo  $U_0(r)=0$  se računa. Za ref. nivo se može uzeti površina Zemlje, pa je pri  $r_1=R_z$  i  $r_2=r$ :

$$U = \gamma m_z m_p \left( \frac{1}{R_z} - \frac{1}{r} \right)$$

ili

$$U = \gamma m_z m_p \frac{r - R_z}{R_z \cdot r} = \gamma m_z m_p \frac{h}{R_z \cdot r}$$

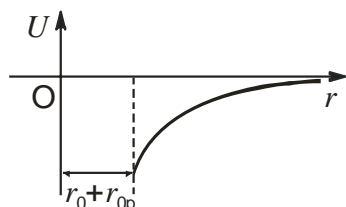
gde je  $h=r-R_z$ . Za  $h \ll R_z$  je  $R_z \cdot r \cong R_z^2$  i

$$U = \gamma \cdot \frac{m_z m_p}{R_z^2} \cdot h = m_p \cdot g \cdot h \quad (8.21)$$

Obzirom da  $R_z$  varira sa geografskom širinom, referentni nivo se može izabrati da je na beskonačnom rastojanju. Tada je:

$$U = -\gamma \cdot \frac{mm_p}{r} \quad (8.22)$$

Zavisnost potencijalne energije privlačenja dva sferna tela poluprečnika  $r_o$  i  $r_{op}$  od njihovog rastojanja prikazana je na slici 8.8. Na osnovu izraza za  $U$  potencijalna energija za beskonačno rastojanje je  $U_\infty = 0$ , a na minimalnom rastojanju na koje mogu da se približe je:



$$U_{\min} = -\gamma \cdot \frac{mm_p}{r_o + r_{op}}$$

Dakle potencijalna energija je negativna odnosno vezivna, a za svako  $r$  posebno data je izrazom (8.22).

Slika 8.8. Gravitaciona potencijalna energija dva sferna tela

**Gravitacioni potencijal.** Potencijalna energija tela zavisi od njegove mase i različita je za različita tela. Medjutim, količnik potencijalne energije tela u nekoj tački polja i mase tog probnog tela ne zavisi od njegove mase, predstavlja potencijalnu energiju po jediničnoj masi, i naziva se gravitacioni potencijal:

$$V_A = \frac{U_A}{m_p} = -\gamma \frac{mm_p}{m_p r_A} = -\gamma \frac{m}{r_A} \quad (8.23)$$

Potencijal polja je, dakle, skalar, kao odnos dve skalarne veličine i njegov intenzitet zavisi od položaja tačke u kojoj se posmatra u prostoru. Njegova brojna vrednost jednaka je radu gravitacione sile da se telo jedinične mase dovede iz beskonačnosti u posmatranu tačku polja.

Geometrijsko mesto tačaka sa istom vrednošću potencijala naziva se ekvipotencijalna površina. Jednačina ekvipotencijale je u opštem slučaju funkcija koordinata  $V(x,y,z)=\text{const}$ . Usamljeno sferno telo ima bezbroj sfernih ekvipotencijala.

Razlika potencijala u dve tačke polja naziva se napon ili pad potencijala gravitacionog polja.

$$V_B - V_A = \Delta V = V_{AB} \quad (8.24)$$

**Gradijent potencijala.** Videli smo da se u svakoj tački polja jednoznačno mogu definisati dve njegove karakteristike  $\vec{G}_A$  i  $V_A$ . Pošto se radi o istom polju može se očekivati neka povezanost medju njima. Podsetimo se da je  $G_A = \gamma m/r^2$  i  $V_A = -\gamma m/r$ .

Nadjimo izvod potencijala po koordinatama u pravcu normale na ekvipotencijalu:

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr} \left( -\gamma \frac{m}{r} \right) = \gamma \frac{m}{r^2}$$

Po definiciji će onda biti:

$$\frac{dV}{dn} \vec{n}_o = \frac{dV}{dn} \vec{n}_o = \text{grad}V = -\vec{G} \quad (8.25)$$

Izvod potencijala po normalnom pravcu na ekvipotencijalnu površ naziva se gradijent potencijala,  $\text{grad}V$ . Gradijent potencijala je vektor usmeren ka najvećem porastu potencijala i jednak je vektoru jačine polja sa suprotnim znakom, odnosno:

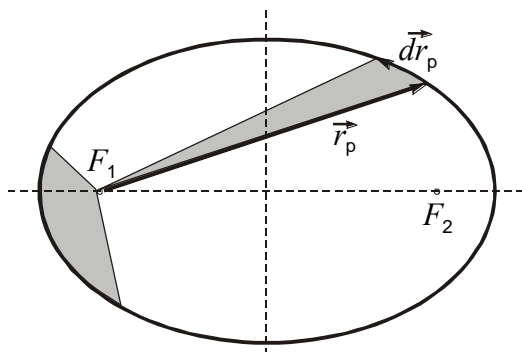
$$\vec{G} = -\text{grad}V = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (8.26)$$

## 8.5. Keplerovi zakoni.

Keplerovi zakoni opisuju kretanje planeta Sunčevog sistema i kao što smo videli formulisani su pre Njutnovog zakona univerzalne gravitacije. Zakoni glase:

- 1) Orbite planeta su elipse sa Suncem koje se nalazi u jednom od dva fokusa (žiže).
- 2) Kretanje planeta po orbitama je takvo da su im sektorske brzine konstantne, odnosno radijus vektor planete za iste vremenske intervale prebriše iste površine.
- 3) Kvadrati perioda vremena obilazaka planeta oko Sunca proporcionalni su trećim stepenima velikih poluosa njihovih eliptičnih putanja.

Drugi Keplerov zakon je direktna posledica zakona održanja momenta impulsa u polju centralnih sila. Neka se planeta kreće po elipsastoj putanji sa Suncem u jednoj žiži, slika 8.9. Površina koju radijus vektor planete prebriše u odgovarajućem vremenskom intervalu predstavljena je šrafiranom površinom i iznosi:



$$d\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{r}_p \times d\vec{r}_p) \quad (8.27)$$

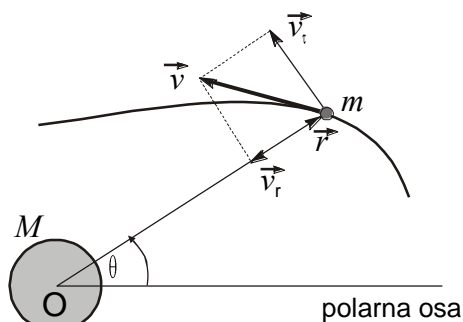
Sektorska brzina, koju smo ranije već definisali kao prvi izvod ove površine po vremenu, jednaka je:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{v}_s = \frac{1}{2} \left( \vec{r}_p \times \frac{d\vec{r}_p}{dt} \right) = \frac{\vec{L}_p}{2m} = \text{const}$$

Slika 8.9. Drugi Keplerov zakon

jer je  $\vec{L}_p = m \vec{r}_p \times \vec{v}_p = m \vec{r}_p \times (d\vec{r}_p/dt)$ . Dakle, sektorska brzina planete je konstantna jer je moment centralne gravitacione sile  $\vec{M} = 0$  zbog kolinearnosti vektora  $\vec{r}_p$  i  $\vec{F}$ . Time je ovaj zakon dokazan.

Prvi i treći zakon nisu tako očigledni pa ih je potrebno detaljnije razmotriti. U tu svrhu ćemo razmotriti kretanje dva tela usled gravitacionog privlačenja i to, zbog jednostavnosti, u polarnim koordinatama,  $r$  i  $\theta$ , kako je to ilustrovano na priloženoj slici. U ovom slučaju položaj tela mase  $m$



Slika 8.10. Položaj planete u polarnom koordinatnom sistemu

(planeta) u odnosu na koordinatni sistem sa centrom u 0-pol, odnosno na centar tela mase  $M$  (sunce), određuje se pomoću rastojanja tela,  $r$ , i ugla  $\theta$  koji vektor položaja  $\vec{r}$  zaklapa sa unapred izabranom osom,  $p$ -osa. Putanja tela može se odrediti na osnovu zakona održanja energije i momenta impulsa. Podjimo od činjenice da je  $M \gg m$ , odnosno da je, na osnovu zakona održanja impulsa, brzina tela  $M$  veoma mala i posmatrajmo samo kretanje tela mase  $m$ . Tada se brzina kretanja tela  $m$  može razložiti na radijalnu i normalnu komponentu, kao na slici 8.10, te prema ranijim oznakama možemo pisati:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_n = r \frac{d\theta}{dt} \quad \text{i} \quad v^2 = v_r^2 + v_n^2$$

Moment impulsa tela  $m$ , odnosno planete, je u ovom slučaju:

$$L = rmv_n = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const} \quad (8.28)$$

Koristeći ove oznake kinetička energija planete se može pisati u sledećem obliku:

$$E_k = \frac{m}{2} \left\{ v_r^2 + \left( r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{m}{2} \left\{ v_r^2 + \left( \frac{L}{mr} \right)^2 \right\} \quad (8.29)$$

Ukupna energija sistema biće jednaka zbiru kinetičke i potencijalne energije tela m, odnosno:

$$E = E_k + U(r) = \frac{m}{2} \left\{ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( \frac{L}{mr} \right)^2 \right\} + U(r) \quad (8.30)$$

Odavde se jednostavno može izraziti  $dr/dt$  i dobija se sledeći izraz:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2(E - U(r)) / m - (L / mr)^2} \quad (8.31)$$

U ovom izrazu se promenljive po  $r$  i  $t$  mogu razdvojiti, radi buduće integracije, te se dobija:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2(E - U(r)) / m - (L / mr)^2}} \quad (8.32)$$

U ovom izrazu je dobijena veza između  $dr$  i  $dt$ , međutim nama je potrebna veza  $r$  i  $\theta$ . Ova veza se može jednostavno izraziti na osnovu zavisnosti  $d\theta$  od  $dt$ , iz definicije momenta impulsa:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{L}{mr^2} \quad \text{odnosno} \quad d\theta = \frac{L}{mr^2} dt$$

Na osnovu ove relacije jednačinu (8.32) možemo pisati u sledećem obliku:

$$d\theta = \frac{L \cdot dr}{r^2 \cdot \sqrt{2m(E - U(r)) - (L/r)^2}} \quad (8.33)$$

Odavde integracijom možemo dobiti vezu  $r$  i  $\theta$ :

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{L}{\sqrt{2m(E - U(r)) - (L/r)^2}} \frac{dr}{r^2} \quad (8.34)$$

Ako se podsetimo da je  $dr/r^2 = -d(1/r)$ , posle grupisanja članova sa  $L/r$ , dobićemo sledeći izraz:

$$\theta = - \int_{r_0}^r \frac{d(L/r)}{\sqrt{2m(E - U(r)) - (L/r)^2}} \quad (8.35)$$

Da bi smo izvršili naznačenu integraciju neophodno je još da eksplicitno izrazimo član  $U(r)$  u gornjem izrazu. Ovaj član je potencijalna energija u gravitacionom polju, te ga možemo pisati kao:

$$U(r) = -\gamma \frac{mM}{r} = \frac{k}{r} \quad \text{sa} \quad k = -\gamma mM$$

Na osnovu ovoga jednačina (8.35) dobija sledeći oblik:

$$\theta = -\int_{r_0}^r \frac{d(L/r)}{\sqrt{2mE - 2mk/r - (L/r)^2}} \quad (8.36)$$

Ovaj se izraz može jednostavno transformisati, dodavanjem i oduzimanjem  $(mk/L)^2$  izrazu u velikoj zagradi, u sledeći oblik koji je pogodniji za dalju integraciju:

$$\theta = -\int_{r_0}^r \frac{d(L/r + mk/L)}{\sqrt{2mE + (mk/L)^2 - (L/r + mk/L)^2}} \quad (8.37)$$

Ako uvedemo smene:  $x=L/r+mk/L$  i  $a^2=2mE+(mk/L)^2$  dobijamo sledeći tablični integral

$$\theta = -\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \arccos\left(\frac{x_0}{a}\right) \quad (8.38)$$

Ako smo koordinatni sistem izabrali tako da je za  $x_0=a$ ,  $\theta=0$  sledi  $\arccos(x_0/a) = \arccos(1)=0$ , te se dobija da je:

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{a}\right) = \arccos\left(\frac{L/r + mk/L}{\sqrt{2mE + (mk/L)^2}}\right) \quad (8.39)$$

Inverzijom ove funkcije dobijamo:

$$\cos\theta = \frac{L/r + mk/L}{\sqrt{2mE + (mk/L)^2}} \quad (8.40)$$

Ovu jednačinu treba rešiti po r. Izrazimo prvo L/r na sledeći način:

$$L/r = \sqrt{2mE + (mk/L)^2} \cdot \cos\theta - mk/L$$

Odavde se dalje jednostavno dobija sledeća veza:

$$r = \frac{L}{-mk/L + \sqrt{2mE + (mk/L)^2} \cdot \cos\theta} = \frac{-L^2/mk}{1 - \sqrt{1 + 2L^2E/mk^2} \cdot \cos\theta}$$

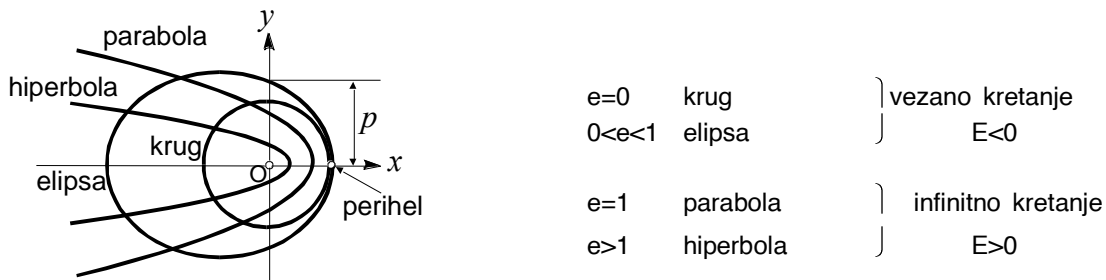
Uvodjenjem smena:

$$p = -\frac{L^2}{mk} \quad \text{i} \quad e = \sqrt{\frac{2L^2E}{mk^2} + 1} \quad (8.41)$$

konačno za jednačinu trajektorije tela u polarnom koordinatnom sistemu dobijamo sledeći izraz:

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\theta} \quad (8.42)$$

Ova jednačina predstavlja krivu drugog reda-konusni presek, gde je  $p$ -fokusni parametar, a  $e$ -ekscentricitet trajektorije. U zavisnosti od vrednosti parametra  $e$ , za  $p>0$ , moguće su različite trajektorije kretanja ili orbite. Trajektorije mogu biti krug, elipsa, parabola i hiperbola, što je ilustrovano na slici 8.11. Razlikuju se dva tipa trajektorija i to krug i elipsa, koje odgovaraju vezanom kretanju, odnosno slučaju kada je ukupna energija tela negativna, i parabola i hiperbola, u slučaju kada je ukupna energija kretanja tela jednaka ili veća od nule, odnosno kada je kinetička energija veća od apsolutne vrednosti potencijalne i kada telo mase  $m$  može da se udalji na beskonačno rastojanje. Dakle, razlikujemo:

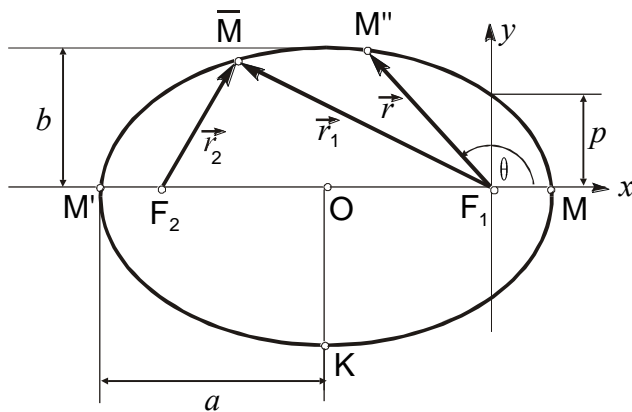


Slika 8.11. Konusni preseki

Dakle, I Keplerov zakon je dokazan samom činjenicom da je putanja planeta elipsa, za  $E<0$ , odnosno  $0<e<1$ .

III Keplerov zakon ćemo dokazati uz pomoć slike 8.12. Neka se planeta kreće po eliptičnoj putanji. Za svaku tačku elipse, kao što je poznato važi sledeća relacija za odnos rastojanja tačke od žiža:

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (8.43)$$



Slika 8.12. Karakteristične tačke elipse

gde je  $a$  označena velika poluosa elipse. Ekscentricitet elipse je odnos duži  $OF_1$  prema velikoj poluosi:

$$e = \frac{OF_1}{a}$$

Iz polarne jednačine elipse za karakteristične tačke perihel ( $\theta=0$ ) i afel ( $\theta=\pi$ ) elipse dobijamo sledeće izraze:

$$F_1M = \frac{p}{1+e} \quad \text{i} \quad F_1M' = \frac{p}{1-e}$$

Kako je:

$$F_1M + F_1M' = 2a$$

velika poluosa se može izraziti na sledeći način:

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad (8.44)$$

Na sličan način ćemo izraziti i malu poluosu. Za tačku K na crtežu važi sledeća relacija:  $F_1K = F_2K = a$ . Duž  $OF_1$  možemo povezati sa malom (b) i velikom (a) poluosom elipse pomoću duži  $F_1K$ :

$$OF_1 = \sqrt{F_1K^2 - b^2} = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Odavde se dobija i drugi izraz za ekscentricitet elipse, izražen preko odnosa njenih poluosa:

$$e = \frac{OF_1}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Kombinovanjem ovog izraza sa izrazom (8.44), može se mala poluosa elipse izraziti preko e i p elipse:

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (8.45)$$

Ako se podsetimo kako su e i p uvedeni preko ukupne mehaničke energije sistema E i momenta impulsa L, za a i b možemo pisati sledeće izraze:

$$a = \frac{k}{2|E|} \quad \text{i} \quad b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$$

Sada se možemo vratiti III Keplerovom zakonu. Podjimo ponovo od definicije sektorske brzine:

$$v_s = \frac{ds}{dt} = \frac{L}{2m}$$

gde je dS površina koju prebriše vektor položaja  $\vec{r}$ , za vreme dt. Za jedan period rotacije planete oko sunca, T, radijus vektor prebriše ukupnu površinu elipse S. Ako, dakle, integralimo prethodni izraz, za jedan period T, kako je površina elipse  $S = \pi ab$ , biće:

$$\int_0^T dt = \frac{2m}{L} \int_0^S dS \quad \text{odnosno} \quad T = \frac{2m}{L} \cdot \pi ab$$

Zamenom izraza za a i b konačno dobijamo sledeću vezu T i a:

$$T = \sqrt{2m} \frac{\pi k}{2} \sqrt{|E|}^3 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{a^3}$$

odnosno:

$$T^2 \propto a^3$$

što je i trebalo pokazati. Napomenimo da ovo izvodjenje važi za  $m \ll M$ , odnosno uz pretpostavku da se telo mase M praktično ne pomera. Kako ovo nije sasvim tačno, u izvodjenju je umesto mase m trebalo koristiti takozvanu redukovanu masu sistema  $\mu = Mm/(M+m)$ , ali to ne bi uticalo na konačni zaključak.

PRIMER: Odrediti I i II kosmičku brzinu za telo mase  $m$  koje se lansira horizontalno sa površine Zemlje. I kosmička brzina,  $v_1$ , je najmanja brzina koju treba saopštiti telu da bi se kretalo oko Zemlje po krugu poluprečnika  $R$ , odnosno da bi postalo Zemljin satelit. Za kretanje po krugu važe sledeći uslovi:

$$e = 0, \quad a = b = R = \frac{k}{2|E|} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$$

Odavde je  $L=k(m/2|E|)^{1/2}$ . Kako je  $2|E|=k/R$  sledi  $L=(kmR)^{1/2}$ . Po definiciji momenta impulsa je, sa druge strane, za kružnu orbitu  $L=mv_1R$ , što kombinovanjem sa prethodnim izrazom za  $L$  daje za prvu kosmičku brzinu:

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{mR}} = \sqrt{\gamma MR} = \sqrt{gR} = 8 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Identičan rezultat je moguće jednostavnije dobiti izjednačavanjem centripetalne sile za kružno kretanje sa gravitacionom:

$$\frac{mv_1^2}{R} = \gamma \frac{mM}{R^2}, \quad \text{odakle je opet } v_1 = \sqrt{gR} .$$

II kosmička brzina je najmanja brzina koja omogućuje telu da napusti Zemlju, po paraboličnoj putanji. U tom slučaju je  $e=1$  i  $E=0$ , pri čemu je  $E$  ukupna mehanička energija odnosno zbir kinetičke i potencijalne energije u gravitacionom polju Zemlje:

$$E = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} = 0$$

odnosno:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2} \cdot v_1 = 11,2 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Obe ove brzine su ogromne i mogu se postići jedino korišćenjem raketnog pogona, odnosno kretanja tela sa promenljivom masom, o čemu ćemo upravo govoriti.

## 8.6. Kretanje tela sa promenljivom masom.

Najveći broj sistema u klasičnoj mehanici ima konstantnu masu pa se II Njutnov zakon uobičajeno daje u obliku  $\vec{F} = m\vec{a}$  umesto opštijeg oblika:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{8.47}$$

koji se odnosi kako na tela sa konstantnom, tako, u principu, i na tela sa promenljivom masom. Da li je baš tako?

Primeri kretanja tela sa promenljivom masom bi bili padanje kapi kiše kroz vlažan oblak kondenzujući nove količine vode i sudarajući se sa drugim kapima, pri čemu joj masa raste; ili raketa koja se ubrzava na račun odbačenih sagorelih gasova silama reakcije, dakle masa joj se smanjuje.

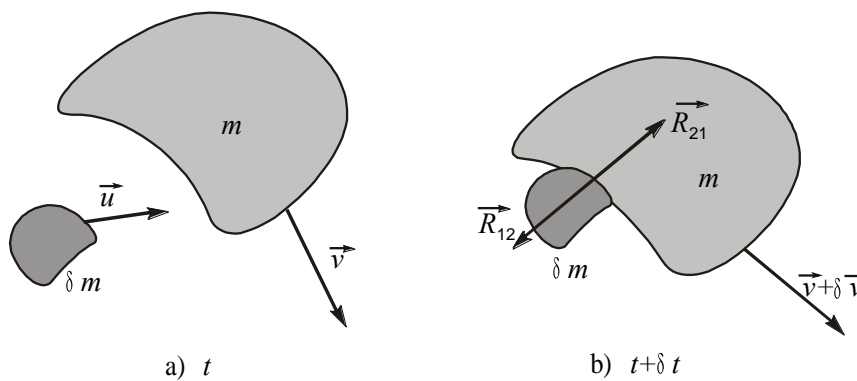
U oba ova slučaja delovi sistema se kreću nekom relativnom brzinom u odnosu na sistem tako da II Njutnov zakon u obliku:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (8.48)$$

ne opisuje dobro kretanje jer ta relativna brzina kretanja nije uzeta u obzir. Svakako da će kretanje zavisiti i od te brzine i da se ona mora uključiti u razmatranje.

Da bi se izvela dinamička jednačina za proizvoljno kretanja tela sa promenljivom masom, posmatraćemo promene u kretanju tela od trenutka  $t$  neposredno pre pripajanja dela mase  $\delta m$  masi  $m$ , do trenutka  $t+\delta t$ , neposredno nakon pripajanja, kao što je to ilustrovano na priloženom crtežu. Za slučaj spajanja-povećanja mase sistem se sastoji od dva razdvojena tela  $m$  i  $\delta m$ , slika 8.13.a), koja se kreću brzinama  $\vec{v}$  i  $\vec{u}$ , u odnosu na neki inercijalni sistem.

Nešto kasnije, u trenutku  $t+\delta t$ , deo tela mase  $\delta m$  "zalepio" se za glavni deo mase,  $m$ , slika b). Telo sada ima novu masu  $m+\delta m$  i novu brzinu  $\vec{v}+\delta\vec{v}$ . U skladu sa III Njutnovim zakonom manji deo tela deluje na veći silom akcije  $\vec{R}_{21}$ , a veći na manji silom reakcije  $\vec{R}_{12}$ . Ove dve sile su po intenzitetima medjusobno jednake.



Slika 8.13. Kretanje tela sa promenljivom masom

Jednačina kretanja manjeg dela tela je po definiciji, data sa:

$$\vec{R}_{12} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\vec{p}(t+\delta t) - \vec{p}(t)}{\delta t} \right\} \quad (8.49)$$

Kako je  $\vec{p}(t+\delta t) = \delta m(\vec{v} + d\vec{v})$  i  $\vec{p}(t) = \delta m \vec{u}$ , zamenom u izraz (8.49) i zanemarivanjem člana koji sadrži proizvod dve beskonačno male veličine,  $\delta\vec{v} \delta m$ , konačno dobijamo:

$$\vec{R}_{12} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta m(\vec{v} - \vec{u})}{\delta t} = (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dm}{dt} \quad (8.50)$$

Jednačina kretanja većeg dela tela, na koje deluje sila  $\vec{R}_{21}$ , kao i rezultanta svih spoljašnjih sila  $\vec{F}$ , je:

$$\vec{R}_{21} + \vec{F} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \vec{p}(\text{veceg tela})}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{m(\vec{v} + \delta \vec{v}) - m\vec{v}}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{m\delta \vec{v}}{\delta t} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Kako je  $\vec{R}_{21} = -\vec{R}_{12}$ , iz ove jednačine konačno dobijamo:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u}) \frac{dm}{dt} \quad (8.51)$$

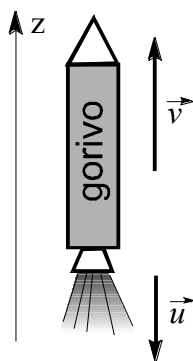
Ova dinamička jednačina određuje kretanje većeg (i glavnog) dela tela,  $m$ , sa promenljivom masom. Ona prelazi u Njutnovu jednačinu  $\vec{F} = d(m\vec{v})/dt$  tek kada je  $\vec{v} \gg \vec{u}$ , tj. kada glavni deo tela (glavno telo) ima veliku brzinu u odnosu na brzinu kojom prima (predaje) svoje delove, mereno iz spoljašnjeg inercijalnog referentnog sistema.

PRIMER: Kretanje rakete. Razmotrimo kretanje rakete sa priloženog crteža, na osnovu ranije izvedene jednačine. Neka je brzina rakete  $\vec{v}$ , brzina sagorelih gasova  $\vec{u}$  i relativna brzina gasova u odnosu na raketu:  $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = -(u+v)\vec{k} = -w\vec{k}$ .

Jednačina kretanja rakete će biti:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{w} \frac{dm}{dt} = \vec{F}$$

sa  $m = m_k + m_z + m_g$ , gde je  $m_k$  - masa kabine,  $m_z$  - masa zidova rezervoara i  $m_g$  - masa goriva. Ovde je samo  $m_g$ , a time i  $m$  promenljivo. Pretpostavimo da je brzina sagorevanja, odnosno isticanja, goriva konstantna:



$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_g}{dt} = -c$$

pri čemu znak minus označava smanjenje mase goriva. Masa goriva u trenutku  $t$  je odavde  $m_g(t) = m_g(0) - ct$ , pa diferencijalna jednačina kretanja ima sledeći oblik:

$$[m_k + m_z + m_g(0) - ct] \frac{dv}{dt} - wc = F$$

Slika 8.14. Jednostepena raketa

Ovde je sila  $F$  rezultanta sile gravitacije i sile otpora atmosfere i pošto je svaki član sa leve strane jednačine znatno veći od nje, radi jednostavnosti,  $F$  se može zanemariti. To, nakon razdvajanja promenljivih i integracije od 0 do  $t$ , daje sledeći rezultat:

$$v - v_0 = -w \cdot \ln \left\{ 1 - \frac{ct}{m_k + m_z + m_g(0)} \right\}$$

Za vreme za koje se svo gorivo potroši,  $\tau = m_g(0)/c$ , maksimalno dostignuta brzina rakete će biti:

$$v = v_0 - w \cdot \ln \left\{ 1 - \frac{m_g(0)}{m_k + m_z + m_g(0)} \right\}$$

U raketnoj tehnici se uzima da je  $m_0 = m_g(0) + m_z$ , a odnos  $m_g(0)/m_0$  se naziva strukturni faktor i označava sa  $\epsilon$ . Tako izraz za brzinu prelazi u:

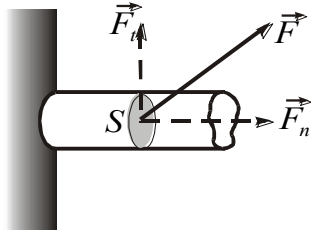
$$v = v_0 - w \cdot \ln \left\{ 1 - \frac{\epsilon m_0}{m_0 + m_k} \right\} = v_0 + w \cdot \ln \left\{ \frac{1}{1 - \epsilon m_0 / (m_0 + m_k)} \right\}$$

Kod savremenih raketa je približno  $w=4 \times 10^3$  m/s,  $\varepsilon=0,8$  i  $m_k/m_o=1/100$ , što za  $v_o=0$  daje  $v=6,28 \times 10^3$  m/s. Ovo je još uvek manje od prve kosmičke brzine, pa se za njeno dostizanje koriste takozvane dvostepene rakete. Pri tome se prvim stepenom postiže određena brzina  $v_1$ , a drugi stepen može da dostigne i znatno veće brzine. Optimalan odnos masa I i II stepena je 9:1. Time se postiže do  $v_2=10,2$  km/s. Za još veće brzine, preko druge kosmičke brzine, koriste se trostepene rakete.

## OSNOVE MEHANIKE NEPREKIDNIH SREDINA

## 9.1. Mehanika elastičnih tela. Hukov zakon.

Pod dejstvom spoljašnjih sila realna tela se deformišu-menjaju dimenzije. Ako deformacija po prestanku dejstva sila iščezne telo nazivamo elastičnim, u protivnom je plastično. Dejstvo spoljašnjih sila na elastično telo izaziva u njemu kao reakciju protivdejstvo elastičnih sila, koje teže da ga vrata u prvobitan oblik.



Slika 9.1. Dejstvo spoljašnje sile na elastično telo

Pri dejstvu spoljašnje sile  $\vec{F}$  na telo, slika 9.1, u svakom preseku tela, njena normalna komponenta  $\vec{F}_n$  i tangenciona komponenta  $\vec{F}_t$  su izjednačene sa odgovarajućim komponentama unutrašnjih elastičnih sila. Kažemo da se telo pri takvim uslovima nalazi u napregnutom stanju. To stanje karakteriše se fizičkom veličinom čija je brojna vrednost jednaka odnosu elastične sile  $F$  i površine poprečnog preseka  $S$  i naziva se napon:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{ili} \quad \sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (9.1)$$

odnosno normalni i tangencioni napon:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S} \quad \text{ili} \quad \sigma_n = \frac{\Delta F_n}{\Delta S} \quad (9.2)$$

i

$$\sigma_t = \frac{F_t}{S} \quad \text{ili} \quad \sigma_t = \frac{\Delta F_t}{\Delta S} \quad (9.3)$$

Ovako definisan napon naziva se srednji napon. Smanjivanjem površine  $\Delta S$  do elementarne dolazimo do napona na elementu površine tela:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (9.4)$$

Veličina deformacije tela bilo po obliku ili zapremini izražava se relativnom deformacijom, kao odnosom apsolutne deformacije  $\Delta V$  i prvobitne veličine tela  $V$ :

$$\delta = \pm \frac{\Delta V}{V} \quad (9.5)$$

i očigledno je neimenovan broj.

Engleski fizičar Huk (Hooke) je eksperimentalno ustanovio da je napon proporcionalan relativnoj deformaciji tela:

$$\sigma = E \cdot \delta \quad (9.6)$$

gde je E-modul elastičnosti tela. Ova relacija predstavlja **Hukov zakon**, koji važi za relativno male deformacije. Napon  $\sigma_p$  pri kome ovaj zakon direktne proporcionalnosti prestaje da važi naziva se granica proporcionalnosti. Postoji nekoliko tipova deformacija i mi ćemo ih u daljem tekstu navesti.

## 9.2. Deformacija istezanja. Granica elastičnosti.

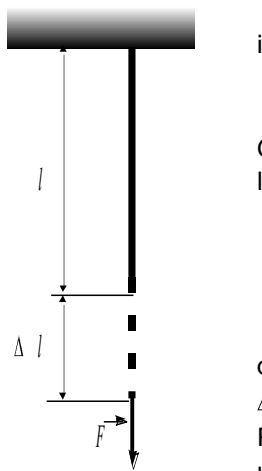
Deformacija istezanja se odnosi na promenu linearne dimenzije tela i javlja se kada na telo deluje samo normalna sila, kao na slici 9.2. Neka se, u ovom slučaju, žica, istegne za dužinu  $\Delta \ell$ . Tada je:

$$\delta = \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (9.7)$$

$$\sigma_n = E_y \cdot \delta \quad (9.8)$$

Ovde je  $E_y$ -Jangov (Young) modul elastičnosti za dužinske odnosno longitudinalne deformacije. Jednačina (9.8) se može pisati i u obliku:

$$F = E_y S \frac{\Delta \ell}{\ell} = k \cdot \Delta \ell \quad (9.9)$$



Slika 9.2. Istezanje

dakle, apsolutno izduženje je proporcionalno spoljašnjoj sili. Ako je  $\Delta \ell = \ell$ , tada je  $E_y = F/S = \sigma$ , iz čega sledi da  $E_y$  ima dimenzije napona. Prema tome Jangov modul je jednak naponu koji bi dužinu žice udvostručio, ukoliko bi za tako velike deformacije važio Hukov zakon. Recipročna vrednost  $E_y$ , tj.  $e = 1/E_y$  je koeficijent elastičnosti žice.

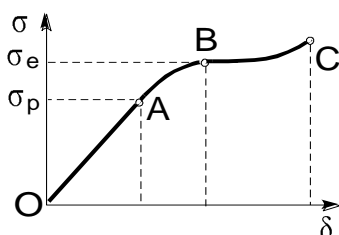
Rastezanje odnosno sabijanje žice menja istovremeno i njen poprečni presek. Ako je  $d$ -dijametar žice, ova promena se izražava poprečnom relativnom deformacijom:

$$\delta d = \frac{\Delta d}{d} \quad (9.10)$$

Odnos poprečne (transverzalne) i uzdužne (longitudinalne) relativne deformacije naziva se Poisson-ov koeficijent:

$$\mu = -\frac{\Delta d}{d} / \frac{\Delta \ell}{\ell} = -\frac{\Delta d}{\Delta \ell} \cdot \frac{\ell}{d} \quad (9.11)$$

Recipročna vrednost  $\mu$  naziva se Poasonov broj.

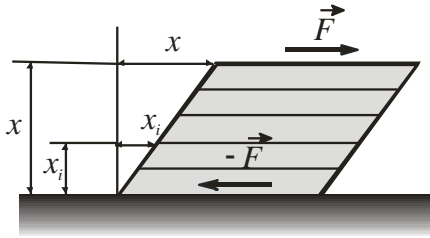


Slika 9.3. Zavisnost napona od relativne deformacije

**Dijagram napona** je grafik zavisnosti  $\sigma_n$  od  $\delta$ . Porastom napona i shodno tome porastom relativne deformacije do tačke A na grafiku važi Hukov zakon proporcionalnosti, iz čega se može odrediti Jangov modul,  $E_y = \text{tg}\varphi$ , slika 9.3. Daljim porastom od A do tačke B telo je još uvek elastično, ali po nekoj drugoj-nelinearnoj zavisnosti. Od tačke B do C deformacija je plastična. Po prestanku dejstva spoljašnje sile telo se ne vraća u prvobitan oblik. Ireverzibilna promena oblika tela se naziva elastični histerezis. U tački C dolazi do kidanja tela. Vrednost napona u tački A se naziva granica proporcionalnosti- $\sigma_p$ , a u tački B granica elastičnosti- $\sigma_e$ .

### 9.3. Deformacije smicanja i torzije.

**Smicanje** je elastična deformacija pod dejstvom sprega tangencijalnih sila i manifestuje se paralelnim pomeranjem slojeva tela, kao što je to prikazano na slici 9.4. Donja učvršćena ravan tela je ravan smicanja a između bilo koja dva sloja vlada tangencioni napon jednak:



Slika 9.4. Smicanje

$$\sigma_t = \frac{F}{S} \quad (9.12)$$

gde je S dodirna površina slojeva. Relativna deformacija za svaki sloj se izražava na sledeći način:

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = \frac{\Delta x}{x} = \operatorname{tg} \theta \cong \theta \quad (9.13)$$

za male vrednosti  $\theta$ . Po Hukovom zakonu relativna deformacija je srazmerna tangencionom naponu, pa možemo pisati:

$$\sigma_t = \frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{x} = G \theta \quad (9.14)$$

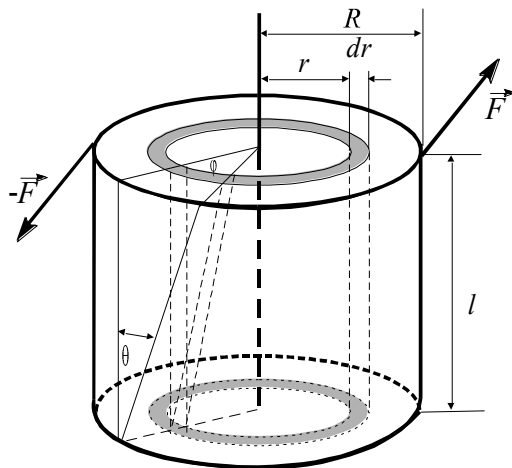
gde je sa G označen modul smicanja tela i istih je dimenzija kao i Jungov modul.

Jungov modul, modul smicanja i Poasonov koeficijent povezani su za jedno telo sledećom relacijom:

$$G = \frac{E_y}{2(1 + \mu)} \quad (9.15)$$

**Torzija (uvrtanje)** je specijalan slučaj smicanja i često se javlja kod osovina raznih mašina. Primer torzije jednog valjkastog tela prikazan je na slici 9.5. Neka moment  $\vec{M}$ , sprega sila  $\vec{F}$  i  $-\vec{F}$  deluje u nivou gornjeg bazisa, dok je donji bazis tela učvršćen. Uočimo jedan element valjka, sloj na rastojanju r od ose valjka debljine dr. Pod dejstvom momenta sprega  $dM = r dF$  dolazi do uvrtnja ovog sloja. Ako bi se ovaj sloj razvio u jednu ravan konstatovalo bi se da je on posle deformisanja od pravougaonika prešao u trapezoid, pa se može zaključiti da je u stvari došlo do njegovog smicanja. Za ovakav sloj napon će biti izražen sa:

$$\sigma_t = \frac{dF}{dS} = \frac{dF}{2\pi r dr} \quad (9.16)$$



Slika 9.5. Torzija

a relativna deformacija je:

$$\delta = \operatorname{tg} \theta \cong \theta = \frac{r\varphi}{l}$$

Primenom Hukovog zakona za deformaciju smicanja na ovom sloju dolazimo do sledećeg izraza:

$$\frac{dF}{2\pi r dr} = G \frac{r\varphi}{l}$$

odnosno

$$dF = G \frac{2\pi\varphi r^2 dr}{\ell}$$

Moment sile  $dF$  u odnosu na osu valjka biće:

$$dM = rdF = \frac{2\pi G\varphi r^3 dr}{\ell} \quad (9.17)$$

Ukupni moment sile na gornjem bazisu valjka dobija se integracijom ovog izraza po  $r$  u granicama od 0 do  $R$ :

$$M = \frac{2\pi G\varphi}{\ell} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi G\varphi R^4}{2\ell} = C\varphi \quad (9.18)$$

Odnos između momenta sila  $M$  i ugla uvrtaanja  $\varphi$  naziva se torziona konstanta i iz gornjeg izraza je:

$$C = \frac{\pi G R^4}{2\ell} = \text{const} \quad (9.19)$$

Torziona konstanta zavisi od prirode materijala  $G$  i od dimenzija valjka  $\ell$  i  $R$ . Torzija se često koristi u fizičkim eksperimentima i instrumentima. Mi smo takodje za određivanje gravitacione konstante  $\gamma$  u Kevendiševom ogledu opisali tzv. torzionu vagu.

**Energija elastične deformacije.** Pri deformaciji tela spoljašnje sile nad njim vrše rad. Izvršeni rad prelazi u potencijalnu energiju deformacije. Ovom energijom elastične sile vraćaju telo u prvobitno položaj po prestanku dejstva spoljašnjih sila.

Izvršeni rad pri istezanju elastične žice, na osnovu ranijeg izlaganja biće:

$$dA = F \cdot d(\Delta \ell) = E_y \delta S d(\Delta \ell) = E_y S \Delta \ell d(\Delta \ell) \frac{1}{\ell} \quad (9.20)$$

Ukupni rad će biti integral od 0 do maksimalne deformacije  $\Delta \ell_o$ :

$$A = E_y S \frac{1}{\ell} \int_0^{\Delta \ell_o} \Delta \ell d(\Delta \ell) = E_y S \frac{(\Delta \ell_o)^2}{2\ell} \quad (9.21)$$

Ovaj rad spoljašnje sile ekvivalentan je potencijalnoj energiji elastične deformacije žice:

$$U = \frac{1}{2} \frac{E_y S}{\ell} (\Delta \ell_o)^2 = \frac{E_y S \ell}{2} \delta_o^2 = E_y \frac{V}{2} \delta_o^2 \quad (9.22)$$

gde je  $V$  zapremina žice. Dakle, potencijalna energija elastične deformacije žice proporcionalna je kvadratu krajnje ili maksimalne deformacije,  $\delta_o$ .

Odnos potencijalne energije i zapremine tela naziva se gustina energije deformacije ili energija jedinice zapremine deformisanog tela i iznosi:

$$\rho_u = \frac{1}{2} E_y \delta_o^2 \quad \text{za istezanje} \quad (9.23)$$

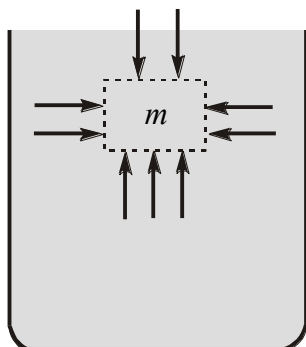
$$i \quad \rho_u = \frac{1}{2} G \theta_o^2 \quad \text{za smicanje} \quad (9.24)$$

Dakle, gustina energije elastične deformacije tela proporcionalna je kvadratu krajnje relativne deformacije.

#### 9.4. Mehanika fluida. Pritisak.

Tečnosti i gasovi se nazivaju **fluidi**. Oni mogu da menjaju oblik pod dejstvom vrlo malih sila, za razliku od čvrstih tela. Tečnosti, pri tome, imaju stalnu zapreminu. Gasovi su, za razliku od njih, stišljivi.

Postupak očvršćavanja je misaoni postupak izdvajanja dela tečnosti radi razmatranja njegovog položaja i ponašanja u odnosu na ostatak fluida. Kao primer, na slici 9.6. je izdvojen deo



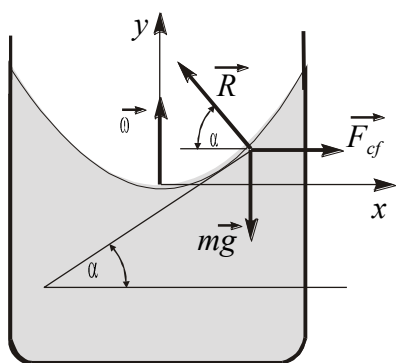
Slika 9.6. Postupak očvršćavanja

tečnosti mase  $m$  koji se nalazi na površini. Na njega sa svih strana deluju neke sile. Posmatrani delić tečnosti je u miru kada su sve sile uravnotežene. Unutrašnje sile, u fluidu, su u principu uvek izjednačene po principu akcije i reakcije. Moguće spoljašnje sile su gravitaciona  $m\vec{g}$  i površinske sile,  $\vec{F}_p$ . Površinske sile potiču od dejstva susednih delova tečnosti u graničnom sloju. Uslov za mirovanje dela tečnosti je da je rezultanta spoljašnjih sila jednaka nuli, odnosno:  $m\vec{g} + \vec{F}_p = 0$ .

Slobodna površina tečnosti se postavlja, odnosno zauzima položaj normalno na pravac dejstva rezultante svih spoljašnjih sila. Kako na tečnost na površini Zemlje deluju gravitacione sile, nivo tečnosti je horizontalan jer je normalan na  $\vec{g}$ . Primer za to je svaka površina vode koja miruje.

PRIMER: Kakva je površina tečnosti u sudu koji rotira? Prema crtežu na slici 9.7, diferencijalna jednačina kretanja elementa tečnosti mase  $m$  na slobodnoj površini uključivaće gravitacionu silu, centrifugalnu silu u neinercijalnom sistemu koji rotira ugaonom brzinom  $\vec{\omega}$  i silu reakcije  $\vec{R}$  kojom unutrašnji delovi tečnosti deluju na uočeni element. Sila  $\vec{R}$  je normalna na površinu tečnosti, odnosno paralelna je sa vektorom površine u datoj tački. Centrifugalna sila će biti:

$$\vec{F}_{cf} = m\omega^2 \cdot x \cdot \vec{i} \quad (9.25)$$



Slika 9.7. Površina tečnosti u sudu koji rotira  
dobijamo:

Diferencijalna jednačina kretanja će glasiti:

$$m\vec{g} + m\omega^2 x \vec{i} + \vec{R} = 0 \quad (9.26)$$

Projekcije ove vektorske jednačine na x- i y-osu daće dve skalarnе jednačine, i to:

$$x: \quad m\omega^2 x = R \sin \alpha \quad (9.27)$$

$$y: \quad mg = R \cos \alpha \quad (9.28)$$

Deljenjem ove dve jednačine eliminiše se sila reakcije, te

$$\frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{\omega^2 x}{g} \quad (9.29)$$

Kako je  $dy/dx = \tan \alpha$ , razdvajanjem promenljivih i integracijom dalje dobijamo:

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 \quad (9.30)$$

pri čemu je koordinatni sistem postavljen tako da je konstanta integracije jednaka nuli. Ovo je jednačina parabole, a površina tečnosti formira takozvani rotacioni paraboloid.

**Pritisak** u fluidima se definiše kao sila po jedinici normalne površine i analogan je ranije definisanom naponu kod elastičnih deformacija

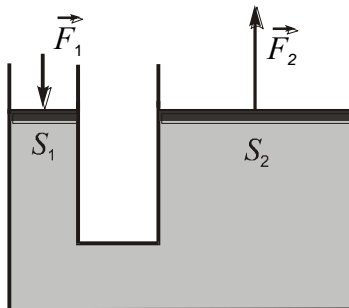
$$P = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (9.31)$$

Kako je u stacionarnim uslovima sila uvek normalna na površinu, to je  $\vec{F} \parallel \vec{S}$ , sledi da je pritisak skalarna veličina. U suprotnom se uočeni element tečnosti ne bi nalazio u miru.

Jedinica za pritisak u SI sistemu je  $N/m^2 = Pa$  (Pascal).

### 9.5. Osnovni zakoni hidrostatičke. Paskalov i Arhimedov zakon.

**PASKALOV ZAKON** (Pascal, 1650) govori o prostiranju pritiska u fluidima. Ako se sila Zemljine teže zanemari, iz uslova ravnoteže sila koje deluju na proizvoljni element zapremine tečnosti sledi da je pritisak u svim delovima tečnosti konstantan. Da nije tako sila  $\Delta F = P \cdot \Delta S$  bi pokretala tečnost. Ova činjenica je izražena u Paskalovom zakonu: Pritisak u proizvoljnom delu mirne tečnosti jednak je u svim pravcima i prenosi se podjednako po celoj zapremini. Dokaz ovog zakona je već naveden, a brojne su njegove praktične primene.



Slika 9.8. Hidraulična presa

PRIMER: hidraulična presa. Na slici 9.8. ilustrovan je princip rada takozvane hidraulične prese, uređaja koji se sastoji iz jednog rezervoara ispunjenog fluidom (ulje), sa dva cilindra različitih poprečnih preseka u kojima se nalaze pokretni klipovi. Na osnovu Paskalovog zakona je:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = P = \text{const} \quad (9.32)$$

tj.:

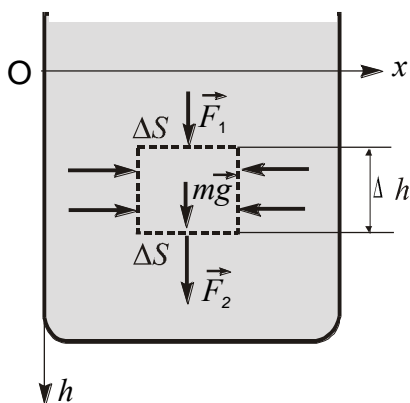
$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \quad (9.33)$$

Na taj način se na klipu  $S_2$ , ukoliko je presek znatno veći od  $S_1$ , može dobiti znatno veća sila, pa se uređaj koristi i kao hidraulična dizalica.

### Raspodela pritiska u tečnostima. Nestišljiv fluid.

Za nestišljiv fluid je karakteristično da mu je gustina stalna:  $\rho = dm/dV = \text{const}$ , bez obzira na pritisak i spoljašnje uslove. U realnim uslovima na fluid deluje sila Zemljine teže. Na niže slojeve tečnosti slojevi iznad njih deluju svojom težinom, pa se stoga pritisak menja po dubini. Sila  $F_2$  će biti veća od sile  $F_1$  za iznos težine uočene zapremine fluida na slici 9.9. Uslov za mirovanje uočene zapremine je ravnoteža sila:

$$F_1 + mg = F_2$$



Slika 9.9. Pritisak u tečnosti

odnosno

$$P_1\Delta S + mg = P_2\Delta S$$

Ako se masa uočene zapremine izrazi kao proizvod gustine i zapremine, dalje je:

$$P_1\Delta S + \rho g\Delta h\Delta S = P_2\Delta S$$

i

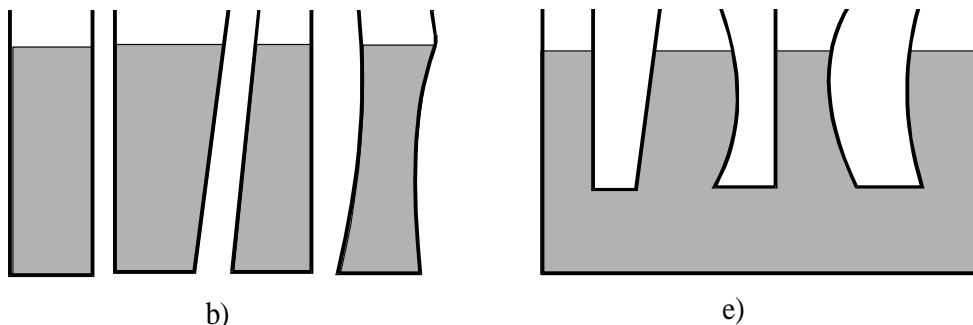
$$\rho g\Delta h = P_2 - P_1 = \Delta P$$

Prelaskom sa konačnih na beskonačno male veličine sledi da je  $\rho g dh = dP$ , a integracijom ovog izraza konačno dobijamo:

$$P - P_0 = \rho gh \quad \text{odnosno} \quad P = P_0 + \rho gh \quad (9.34)$$

pri čemu  $h$  označava rastojanje od površine odnosno dubinu tečnosti. Dakle, pritisak tečnosti se povećava linearno sa dubinom. Ovo je važan zaključak, a njegove posledice se mogu izraziti na sledeći način:

- Pritisak je jednak u svim tačkama na istoj dubini  $h$ . Površine sa istim pritiskom se nazivaju izobarnim površinama. Svaka slobodna površina tečnosti je izobarna.
- Oblik suda ne utiče na pritisak, slika 9.10.b).
- Razlika pritisaka na dva nivoa jednaka je težini vertikalnog stuba tečnosti jediničnog preseka.
- Razlika pritisaka na dva nivoa ne zavisi od spoljašnjeg pritiska  $P_0$ . Ovo je direktna posledica Paskalovog zakona.
- Slobodne površine u spojenim sudovima imaju iste niveoe, sl. 9.10.e). Ako se tečnosti ne mešaju u spojenim sudovima nivoi će se odnositi kao gustine tečnosti:  $\rho_1/\rho_2 = h_2/h_1$ .



Slika 9.10. nezavisnost pritiska od oblika suda i spojeni sudovi

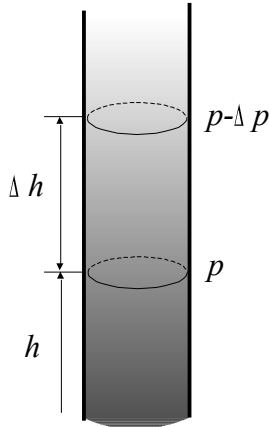
### Raspodela pritiska u gasu. Stišljiv fluid. Barometarska formula.

Gasovi, za razliku od tečnosti, nemaju stalnu zapreminu. Zauzimaju zapreminu suda i nemaju slobodnu površinu. Gasovi su stišljivi. Posledica toga je činjenica da se pritisak u gasovima ne menja linearno sa visinom, kao kod tečnosti.

Da bi smo razmotrili ponašanje pritiska u gasovima počićemo od Bojl-Mariotovog (Boyle-Mariotte) zakona koji glasi da je, za izotermnu sredinu, proizvod pritiska i zapremine iste količine gasa konstantan:  $PV = P_0V_0 = \text{const}$  ( $P_0$  i  $V_0$  su poznate vrednosti pritiska i zapremine). Odavde se može izraziti zavisnost gustine od pritiska:

$$\rho = \rho(P) = \frac{m}{V} = \frac{mP}{P_0 V_0} = \rho_0 \frac{P}{P_0} \quad (9.35)$$

Posmatrajmo gas u zamišljenom vertikalnom cilindru, kao na slici 9.11. Pritisak gasa na nekoj visini proporcionalan je težini gasa iznad te visine. Pritisak, dakle, opada sa porastom visine. Visini  $h+dh$  odgovara manji pritisak,  $P-dP$ . Kako je pritisak jednak težini stuba gasa iznad određenog preseka po jedinici površine, to je:



Slika 9.11. Gas u gravitacionom polju

$$-dP = \rho(P) \cdot g \cdot dh \quad (9.36)$$

Zamenom izraza za gustinu (9.35) u izraz (9.36) dobijamo:

$$-dP = \rho_0 \frac{g}{P_0} P dh \quad (9.37)$$

Razdvajanjem promenljivih u ovom izrazu dobijamo:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} dh$$

a njegovom integracijom:

$$\ln \frac{P_h}{P_0} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} (h - h_0)$$

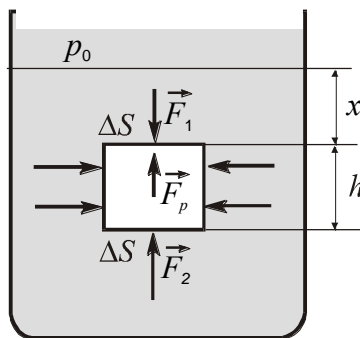
gde je sa  $P_0$  označen pritisak na uočenom preseku stuba gasa na visini  $h_0$ . Konačno se antilogaritmovanjem dobija:

$$P_h = P_0 \exp \left[ -\frac{\rho_0 g}{P_0} (h - h_0) \right] \quad (9.38)$$

Ovo je barometarska formula, koja ukazuje da pritisak u gasovima eksponencijalno opada sa visinom. Posebno se za vazduh u atmosferi Zemlje (u odnosu na njenu površinu,  $h_0=0$ , ako se za  $P_0$  uzme vrednost pritiska na površini), za pritisak na visini  $h$  može pisati:

$$P = P_0 \exp \left( -\frac{\rho_0 g}{P_0} h \right) \quad (9.39)$$

**ARHIMEDOV ZAKON** (Archimedes). Zbog promene pritiska sa visinom fluida na zaronjeno strano telo deluje sila potiska ili Arhimedova sila jednaka razlici sila pritisaka na donjoj i gornjoj površini tela. Za slučaj ilustrovan na slici 9.12., sila potiska se može izraziti na sledeći način:



Slika 9.12. Sila potiska

$$F_p = F_2 - F_1 = P_2 \Delta S - P_1 \Delta S$$

U slučaju nestišljivih fluida, odnosno tečnosti, ovaj izraz se može pisati kao:

$$F_p = \{P_0 + \rho g(x+h)\} \Delta S - (P_0 + \rho g x) \Delta S$$

odnosno:

$$F_p = \rho g h \Delta S = \rho g \Delta V = g \Delta m = \Delta Q \quad (9.40)$$

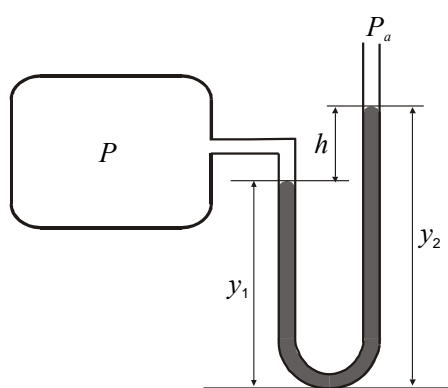
gde je  $\Delta Q$  težina telom istisnute tečnosti, obzirom da je u izrazu (9.40) korišćena gustina fluida, a ne gustina zaronjenog tela. Ovo je ujedno smisao Arhimedovog zakona, koji glasi: **Sila potiska brojno je jednaka težini telom istisnutog fluida.** Sila ima vertikalni pravac naviše i prolazi kroz centar mase zapremine istisnutog fluida.

Arhimedov zakon ima značajnu ulogu u ponašanju stranih tela u tečnostima. Ako je  $F_p - Q > 0$  telo će plivati na površini tečnosti, bez obzira na svoju gustinu. Pri tome je presudna zapremina tela. Bitan je i uslov da pri plivanju tela njegovo težište mora da bude ispod napadne tačke sile potiska, kako spreg ovih sila ne bi izazvao prevrtanje tela.

## 9.6. Merenje pritiska.

Sprave za merenje pritiska se nazivaju **manometri**. Postoji više tipova manometara, a mi ćemo ovde navesti neke od njih.

**A) Manometar sa otvorenom cevi** - je najjednostavniji tip manometra i prikazan je na slici 9.13. Na posudu u kojoj se pritisak meri nastavljena je savitljiva cev u obliku slova-U ispunjena tečnošću gustine  $\rho$ -obično živom. Sama cev je u stvari manometar. Uslov da živa na odgovarajućim nivoima u krajevima cevi miruje je da su pritisci u njenom levom i desnom kraku izjednačeni:



$$\begin{aligned} \text{pritisak levo:} & P + \rho g y_1 \\ \text{" desno:} & P_a + \rho g y_2 \end{aligned}$$

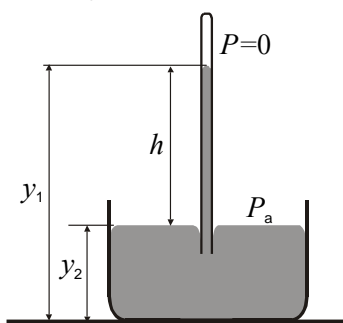
Biće, dakle:

$$P - P_a = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h$$

Ovde je  $P_a$ -atmosferski, poznat pritisak,  $P$  je tzv. apsolutni, a  $P - P_a$  relativni pritisak, koji se meri.

Slika 9.13. Otvoreni U manometar

**B) Toričelijev manometar** služi za merenje atmosferskog pritiska na način prikazan na slici 9.14. Staklena cev, duža od 1m se napuni živom, okrene i zaroni otvorenim krajem u veću posudu sa živom. Nivo žive u cevi će se spustiti dok se pritisak živinog stuba ne izjednači sa atmosferskim pritiskom na slobodnoj površini žive u sudu. Tada je:

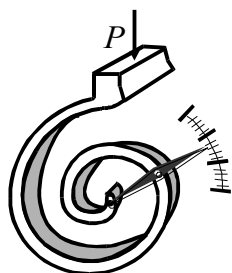


$$P_a = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h$$

Uz pomoć ovog izraza možemo takođe izraziti pritisak koji odgovara jednom milimetru živinog stuba, obzirom da se ova veličina često uzima za jedinicu pritiska. Zamenom odgovarajućih vrednosti biće:  $1 \text{ mmHg} = 13,6 \times 9,81 \times 0,001 \text{ Pa} = 133,3 \text{ Pa}$ .

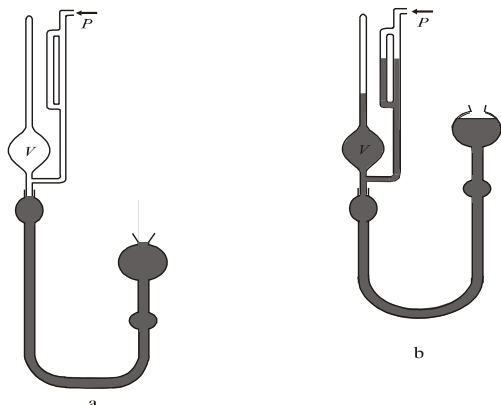
Slika 9.14. Toričelijev manometar

**C) Burdon (Bourdon) -ov manometar** se najčešće primenjuje u tehnici i sastoji se od spiralne elastične cevi pljosnatih zidova, kao na slici 9.15. Spoljašnja strana cevi ima veću površinu od unutrašnje strane, zbog većeg radijusa krivine, pa je sila pritiska,  $F = PS$ , na nju veća nego na unutrašnji zid cevi. Posledica toga je ispravljanje cevi čime se pokreće kazaljka prikačena na njenom kraju i nepokretnom osloncu. Skala, koja je prethodno kalibrisana, na taj način pokazuje pritisak gasa u sudu na koji je manometar prikačen. Ovaj manometar služi za merenje pritiska većih od atmosferskog.



Slika 9.15. Metalni barometar

D) **Makleod-ov (McLeod) manometar** služi za merenje veoma malih pritisaka, znatno manjih od atmosferskog. Može da meri pritiske do  $7 \times 10^{-4}$  Pa ili  $5 \times 10^{-6}$  mmHg.



Slika 9.16. Makleodov manometar

Ovaj manometar je prikazan na slici 9.16. u dva položaja. Zapremina  $V$  je tzv. merna zapremina i obično je veća od 1 litra. Pre merenja gas unutar zapremine  $V$  je na pritisku  $P$  koji se meri. Dizanjem rezervoara sa živom, zapremina  $V$  se puni živom pa se zapremina gasa svodi na  $V'$ , slika 9.16.b), u kojoj vlada pritisak  $P'$ . Kada se pritisci uravnoteže u levom i desnom kraku manometra, važi sledeća relacija:

$$P' = P + \rho gh$$

odavde se uz pomoć Bojl-Mariotovog zakona, ( $P'V = PV'$ ) može eliminisati  $P'$ , što daje:

$$P(V/V' - 1) = \rho gh$$

Na taj način, s obzirom da je  $V' \ll V$ , za mereni pritisak dobijamo:

$$P = \frac{\rho g V'}{V - V'} h \cong \frac{V'}{V} \rho gh$$

Kako je  $V' \ll V$  sledi  $P \ll \rho gh$ , tako da je moguće meriti pritiske znatno manje od 1 mmHg (133 Pa).

E) **Jonizaciona merila** služe za merenje još nižih pritisaka, do oko  $10^{-6}$  ili čak  $10^{-8}$  Pa. Njihov rad se zasniva na merenju električne provodnosti razredjenog gasa. Sastoje se od jedne niti koja se zagreva emitujući elektrone. Oko nje je postavljena spiralna elektroda na kojoj se sakupljaju joni gasa jonizovanog elektronima. Broj sakupljenih jona o jedinici vremena, odnosno struja jona je proporcionalna pritisku gasa, te se pritisak na taj način može tačno i precizno meriti.

### 9.7. Kretanje idealne tečnosti. Jednačina kontinuiteta.

Oblast fizike koja proučava zakonitosti kretanja fluida naziva se dinamika fluida, a posebno kada su u pitanju tečnosti naziva se hidrodinamika. Prema ponašanju fluida u toku kretanja možemo ih podeliti na idealne i viskozne.

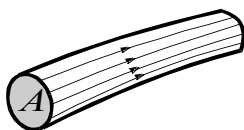
Idealni, ili ispravnije idealizovani fluidi se odlikuju dvema bitnim karakteristikama:

- idealni fluidi su nestišljivi, dakle to su tečnosti,
- ne ispoljavaju unutrašnje trenje ili viskoznost.

Ovakvi fluidi praktično ne postoje, ali neki, kao što je recimo voda, imaju zanemarljiv unutrašnji otpor, pa se mogu smatrati idealnim.

Za kretanje idealnih fluida karakteristična je **linija toka** odnosno putanja kojom se kreće uočeni element fluida. Brzina na liniji toka je u opštem slučaju promenljiva i po smeru i po intenzitetu. Strujanje je stacionarno kada svaki element fluida koji se nadje u jednoj tački prostora vrši kretanje po istoj liniji toka, sa istom brzinom i ubrzanjem.

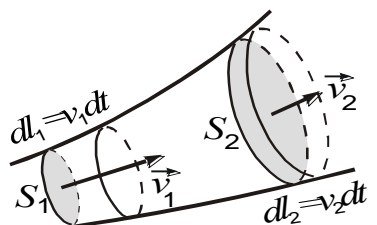
**Linija strujanja** je kriva čija je tangenta u svakoj tački usmerena u pravcu brzine fluida u toj tački. Kod stacionarnog strujanja linija strujanja se poklapa sa linijom toka. Sve linije strujanja koje prolaze kroz periferiju jednog površinskog elementa-A, čine **strujnu cev**, slika 9.17. Pri stacionarnom strujanju fluid ne može da izađe iz strujne cevi niti da u nju udje. Strujne linije i strujne cevi pri kretanju fluida



Slika 9.17. Strujna cev

moгу se posmatrati upuštanjem obojenih mlazeva tečnosti ili sitnih čestica koje u njoj plivaju. Osnovne zakonitosti pri kretanju idealnih fluida izražene se jednačinom kontinuiteta i Bernulijevom jednačinom.

**Jednačina kontinuiteta** je posledica zakona održanja mase u zatvorenoj zapremini fluida. Posmatrajmo kretanje fluida kroz jednu strujnu cev različitog preseka, kao što je to prikazano na slici 9.18. Kroz proizvoljne preseke  $S_1$  i  $S_2$  fluid se kreće brzinama  $v_1$  i  $v_2$ . Masa fluida koja prodje kroz jedan presek je jednaka proizvodu iz gustine i zapremine:



Slika 9.18. Jednačina kontinuiteta

$$dm = \rho \cdot S \cdot v \cdot dt \quad (9.41)$$

Mase tečnosti koje prodju kroz dva uočena preseka biće međusobno jednake:

$$dm_1 = dm_2$$

odnosno

$$\rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt$$

Odavde je očigledno:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (9.42)$$

što predstavlja opšti oblik jednačine kontinuiteta. Dakle brzina strujanja kroz određeni presek strujne cevi obrnuto je proporcionalna površini tog preseka.

Za stišljive fluide, odnosno gasove, jednačina kontinuiteta ima drugačiji oblik, odnosno:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (9.43)$$

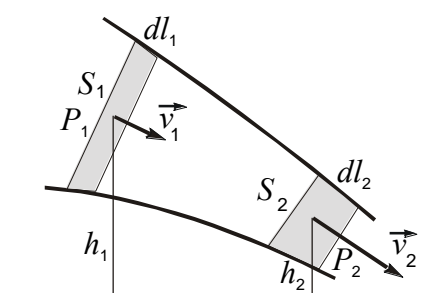
i odnosi se na zatvorenu površinu fluida. Oznaka "div" predstavlja divergenciju vektora odnosno protok fluida kroz uočenu površinu. Za  $\rho = \text{const}$  je  $\text{div}(\vec{v})_s = 0$ , protok nestišljivog fluida kroz zatvorenu površinu je nula, koliko fluida udje toliko i izadje.

### 9.8. Bernulijeva (Bernoulli) jednačina. Primena.

Za stacionarno strujanje idealnog, nestišljivog fluida duž strujne cevi u gravitacionom (potencijalnom) polju, zakon održanja mehaničke energije izražava se Bernulijevom jednačinom.

Razmotrimo sa energijskog stanovišta kretanje fluida kroz strujnu cev prikazanu na slici 9.19. Masa fluida koja za vreme dt protokne kroz bilo koji presek strujne cevi je:

$$dm = \rho \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot dt = \rho \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot dt$$



Slika 9.19. Bernulijeva jednačina

Energija uočenog elementa fluida je zbir njegove kinetičke i potencijalne energije, odnosno u presecima  $S_1$  i  $S_2$  je:

$$E_1 = \frac{dm \cdot v_1^2}{2} + dmgh_1$$

$$E_2 = \frac{dm \cdot v_2^2}{2} + dmgh_2$$

Razlika ovih energija,  $dE$ , jednaka je radu spoljašnjih sila utrošenom na premeštanje elementa tečnosti iz preseka  $S_1$  u presek  $S_2$ :

$$dE = d(E_k + U) = dE_k + dU = \delta A \quad (9.44)$$

Izvršeni rad  $\delta A$  jednak je razlici radova sila pritiska koji deluju na presecima  $S_1$  i  $S_2$ :

$$\vec{F}_1 = P_1 S_1 \vec{n}_1 \text{ i } \vec{F}_2 = P_2 S_2 \vec{n}_2$$

Obzirom da se brzine poklapaju sa pravcem normala, izvršeni rad je:

$$\delta A = F_1 d\ell_1 - F_2 d\ell_2 = P_1 S_1 v_1 dt - P_2 S_2 v_2 dt = (P_1 - P_2) S_1 v_1 dt \quad (9.45)$$

pri čemu je primenjena i jednačina kontinuiteta:  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ .

Izjednačavanjem promene mehaničke energije sa izvršenim radom dobijamo sledeći izraz:

$$\frac{1}{2} dm(v_2^2 - v_1^2) + dm g(h_2 - h_1) = (P_1 - P_2) S_1 v_1 dt \quad (9.46)$$

Posle skraćivanja sa  $S_1 v_1 dt = dm/\rho$  i sredjivanja, dobija se:

$$P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = P_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \quad (9.47)$$

Pošto su  $S_1$  i  $S_2$  izabrani proizvoljno, za svaki presek strujne cevi će važiti:

$$P + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const} . \quad (9.48)$$

Ovo je Bernulijeva jednačina. Svi članovi u ovoj jednačini imaju dimenzije pritiska ( $F/S$ ) ili specifične energije, odnosno gustine energije ( $E/V$ ). Zbog toga ovi članovi imaju dvostruku interpretaciju:

$P$  - pritisak u datom preseku strujne cevi / rad sile pritiska nad jediničnom zapreminom.

$\rho v^2/2$  - dinamički pritisak / kinetička energija jedinice zapremine.

$\rho g h$  - hidrostatički pritisak / potencijalna energija jedinične zapremine.

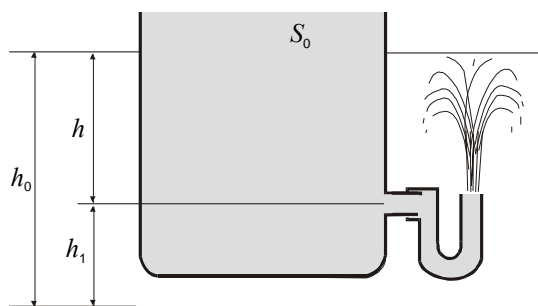
Bernulijeva jednačina se primenjuje za izračunavanja parametara kretanja fluida.

### A) Brzina isticanja tečnosti. Toričelijeva teorema.

Razmotrićemo primer isticanja tečnosti kroz otvor  $S_1$  iz otvorenog suda velike zapremine, kao na slici 9.20. Ako napišemo Bernulijevu jednačinu za naznačene preseke  $S_0$  i  $S_1$ , uz pretpostavku da je  $S_0 \gg S_1$ , nivo  $S_0$  će se veoma sporo kretati, tako da je  $v_0 = 0$ . Kako je  $P_0 = P_1 = P$ , iz Bernulijeve jednačine sledi:

$$v_1^2 = 2g(h_0 - h_1) = 2gh$$

Brzina  $v_1$  se naziva brzina isticanja tečnosti i kao što se vidi jednaka je brzini koju bi tečnost stekla kada bi slobodno padala od nivoa gornje površine do nivoa otvora na sudu. Ova tvrdnja predstavlja Toričelijevu teoremu, a upravo je dokazana navedenim izvodjenjem. Posledica ovoga



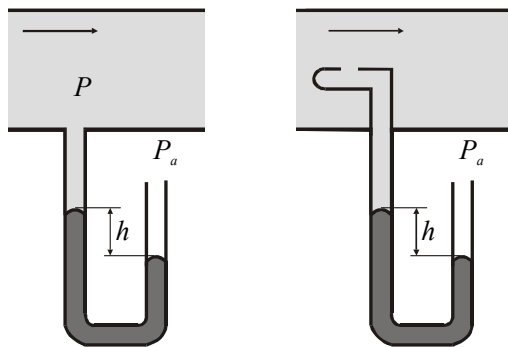
Slika 9.20. Toričelijeva teorema

je, pošto brzina ne zavisi od pravca strujanja fluida, da bi mlaz idealne tečnosti usmeren naviše dostigao nivo slobodne površine.

Brzina isticanja tečnosti pod pritiskom većim od atmosferskog ( $P > P_a$ ), bi bila data sledećim izrazom:

$$v_{1p} = 2 \frac{P - P_a}{\rho} + 2gh \quad (9.49)$$

### B) Merenje pritiska kod fluida u kretanju.



Slika 9.21. Merenje pritiska u fluidu

Ako bi se otvoren manometar sa fluidom gustine  $\rho$  postavio u odnosu na struju fluida na jedan od dva načina, slika 9.21., na krajevima savijene cevi bi se mogla primeniti Bernulijeva jednačina. Pošto se fluid u manometru ne kreće, članovi hidrodinamičkog pritiska se mogu zanemariti, pa se dobija:

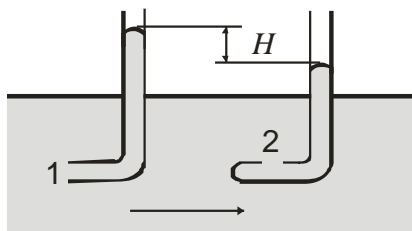
$$P_a - P = \rho gh$$

odnosno:

$$P = P_a - \rho gh \quad (9.50)$$

### C) Određivanje brzine strujanja. Pitotova cev.

Brzina strujanja fluida u cevi se može odrediti ako se u njega zarone dve cevi sa različito postavljenim otvorima, kao na slici 9.22. Na otvorima, odnosno presecima  $S_1$  i  $S_2$  će biti:



Slika 9.22. Pitotova cev

$$S_1: \quad v_1=0, P_1, h_1=0$$

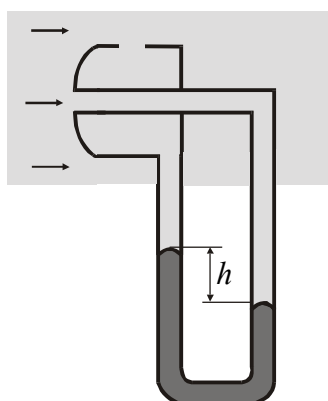
$$S_2: \quad v_2, P_2, h_2=0$$

Na osnovu toga sledi iz Bernulijeve jednačine:

$$P_1 - P_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (9.51)$$

Sa druge strane, razlika statičkih pritisaka jednaka je hidrostatičkom pritisku manometra, odnosno  $P_1 - P_2 = \rho g \Delta h$ , pa je kombinovanjem sa gornjim

izrazom, konačno:  $v_2^2 = 2g\Delta h$ .



Slika 9.23. Prandtlova cev

### D) Prandtlova cev

Prandtlova cev je verzija Pitotove cevi, koja služi za merenje relativne brzine strujanja fluida, na primer za određivanje brzine aviona u odnosu na vazduh, odnosno brzine vetra.

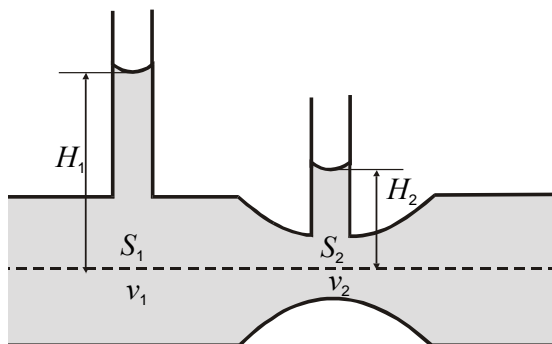
Prandtlova cev je prikazana na slici 9.23. Primenom Bernulijeve jednačine na gornji i bočni otvor cevi i očitavanjem manometra ( $\Delta h$ ), dobija se:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho mg \Delta h \quad (9.52)$$

odakle se određuje brzina  $v$ .

### E) Venturijeva cev (vodomer).

Služi za merenje protoka tečnosti,  $Q$ , kroz cev preseka  $S_1$  i prikazana je na slici 9.24. Cev je na jednom mestu sužena sa  $S_1$  na presek  $S_2$ . Pošto se preseki  $S_1$  i  $S_2$  nalaze na istoj visini hidrostatički pritisak u preseje izjednačen, pa Bernulijeva jednačina za ovaj slučaj daje:



$$P_1 - P_2 = \rho \frac{v_1^2 - v_2^2}{2}$$

Sa druge strane razlika pritiska se očitava iz razlike nivoa tečnosti u vertikalnim cevima, kao manometru:

$$P_1 - P_2 = \rho g(H_1 - H_2)$$

Iz jednačine kontinuiteta sledi:

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}$$

Slika 9.24. Venturijeva cev

Kombinovanjem gornjih izraza jednostavno možemo dobiti sledeću jednakost:

$$\rho g(H_1 - H_2) = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{v_1 S_1}{S_2} \right)^2 - v_1^2 \right] \quad (9.53)$$

odnosno:

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2g(H_1 - H_2)}{S_1^2 - S_2^2}} \quad (9.54)$$

Za protok fluida kroz cev konačno dobijamo sledeći izraz:

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g(H_1 - H_2)}{S_1^2 - S_2^2}} = k \sqrt{H_1 - H_2} \quad (9.55)$$

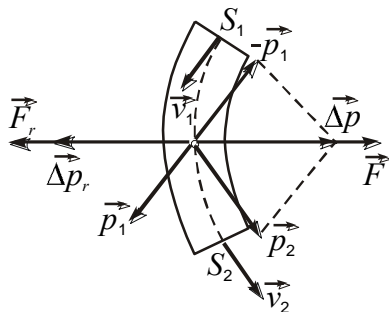
Ovde je  $k$ -konstanta Venturijeve cevi i određuje se eksperimentalno, a izraz (9.55) služi za merenje protoka, odnosno potrošnje vode. U savremenim vodomerima, međutim, protok se ne određuje ovako, već (uz manju tačnost) uz pomoć elise zaronjene u tečnost i satnog mehanizma.

Pri velikim brzinama strujanja, u slučaju Venturijeve cevi ili slične konstrukcije, dolazi do znatnog smanjenja pritiska u suženom delu cevi, pa čak i do usisavanja vazduha što izaziva mešanje vazduha i tečnosti u sitne kapi posle suženja. To se koristi kod tzv. pulverizatora, vodenih pumpi, kao i kod karburatora motora sa unutrašnjim sagorevanje.

### 9.9. Impuls tečnosti pri proticanju.

Zakon održanja impulsa može se svakako primeniti i na fluide. Razmotrićemo primer strujanja fluida kroz zakrivljenu cev, kao na slici 9.25. Neka su preseki jednaki,  $S_1 = S_2 = S$ , tada su na osnovu

jednačine kontinuiteta i brzine jednake po intenzitetu,  $v_1 = v_2 = v$ , ali su zbog zakrivljenosti cevi različite po pravcu.



Slika 9.25. Impuls tečnosti pri proticanju

U preseku cevi  $S_2$  impuls fluida će biti isti po intenzitetu kao u  $S_1$ , ali će mu pravac biti drugačiji, kao što je prikazano na slici 9.25. Dakle, pri proticanju fluida došlo je do promene njegovog impulsa.

Promena impulsa je grafički prikazana sa  $\Delta \vec{p}$ , a iznosi:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta \vec{p} = \rho \cdot S \cdot v \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \Delta t \quad (9.56)$$

Po II Njutnovom zakonu promena impulsa izazvana je silom, pa je:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \rho \cdot S \cdot v \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad (9.57)$$

Ovo je sila kojom je cev delovala na fluid, menjajući mu impuls. Na osnovu III Njutnovog zakona, fluid je na cev delovao silom reakcije:

$$\vec{F}_r = \vec{F} = \rho \cdot S \cdot v \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\vec{F} \quad (9.58)$$

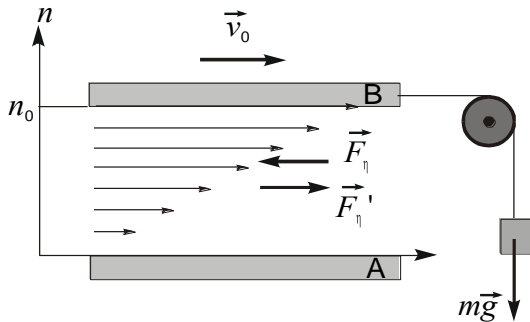
Sila  $\vec{F}_r$  se naziva reakcija struje fluida. Na principu reakcije struje fluida zasniva se rad niza tehničkih uređaja: turbine (vodene i parne), rotacione prskalice, pogon raketnih motora, itd.

### 9.10. Viskoznost tečnosti. Stoksov zakon.

Viskoznost je unutrašnje trenje fluida i manifestuje se otporom koji se javlja pri kretanju jednog sloja fluida u odnosu na drugi. Realni fluidi su viskozni, kod tečnosti je viskoznost više izražena nego kod gasova.

Zamislimo eksperiment u kome su jedna nepokretna i jedna pokretna ploča potopljene u fluid, slika 9.26., i neka se pokretna ploča kreće pod dejstvom sile  $\vec{F}$ . U početku je kretanje ploče B ubrzano, sve dok se ne postigne neka stacionarna brzina  $\vec{v}_0$ . Pošto se ploča više ne ubrzava pod dejstvom spoljašnje sile, znači da postoji neka sila koja je uravnotežuje. To je sila trenja,  $\vec{F}_\eta$ , odnosno sila viskoznosti i očigledno je da ona zavisi od brzine kretanja ploče B.

Ako se fluid između ploča misaono podeli na tanke paralelne slojeve-lamele (laminarno = slojevito ili stacionarno strujanje), eksperimentalno se može utvrditi linearna promena brzine slojeva u pravcu normale  $\vec{n}$  na ploče, tj. biće:  $dv/dn = v_0/n_0$ , gde je  $n_0$  razmak između ploča. Dakle, kretanje se prenosi sa sloja na sloj sve do donje ploče, i to preko medjudejstva slojeva silama  $\vec{F}_\eta$  (donji na gornji) i  $\vec{F}'_\eta$  (gornji na donji).



Slika 9.26. Sila trenja kod laminarnog proticanja

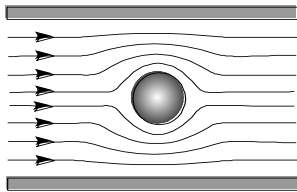
Merenjem brzine  $v_0$ , površine ploča  $S$  i rastojanja medju njima  $n$ , eksperimentalno je utvrđena sledeća zavisnost koja predstavlja Njutnovu formulu za viskoznost:

$$F_{\eta} = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dn} \quad (9.59)$$

gde je  $\eta$ -koeficijent viskoznosti, a član  $dv/dn$  se naziva gradijent brzine strujanja. Koeficijent viskoznosti  $\eta$  zavisi od prirode i temperature fluida i ima za jedinicu  $1 \text{ Ns/m}^2 = 1 \text{ Pa.s}$ .

**Stoksov zakon** se odnosi na silu viskoznosti koja se javlja pri relativnom kretanju sfernog tela u struji fluida, kao što je to ilustrovano na slici 9.27. Kada idealan fluid teče oko sfernog tela ili se ono kreće kroz fluid, pritisci na prednjoj i zadnjoj strani polusfere u odnosu na smer kretanja su isti i rezultujuća sila na telo je jednaka nuli.

Ako je, međjutim, fluid viskozna na telo u kretanju će delovati sila viskoznosti. Izraz za ovu silu nećemo izvoditi iz zakona toka viskoznog fluida, zbog složenosti, ali ćemo razmotriti od čega ona zavisi. Sila mora zavisti od koeficijenta viskoznosti  $\eta$ , od poluprečnika sfere  $r$ , i od njene brzine,  $v$ , u odnosu na fluid. Dimenziono se pokazuje da sila zavisi od proizvoda ovih veličina. Detaljnija analiza pokazuje da u izraz za silu treba uvesti i konstantu  $6\pi$ , pa je sila jednaka:



Slika 9.27. Sfera u struji fluida

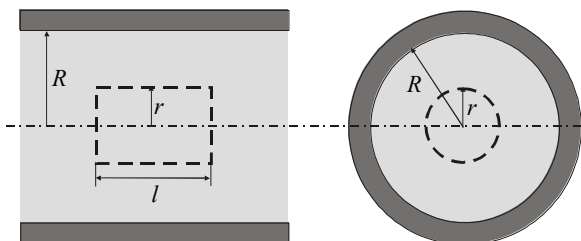
$$F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (9.60)$$

Ovaj izraz predstavlja Stoksov zakon (1845) za silu viskoznosti za sferno telo.

Stoksov zakon se, izmedju ostalog, koristi za određivanje koeficijenta viskoznosti tečnosti, što se radi i na eksperimentalnim vežbama. Na sličan način se u Milikenovom eksperimentu određuje naelektrisanje elektrona.

### 9.11. Raspodela brzina u cevi. Isticanje viskozne tečnosti.

Videli smo na primeru paralelnih ploča sa slike 9.26., da je raspodela brzine medju njima linearna. Fluidi se češće kreću kroz cevi, pa je interesantno videti kakava je raspodela brzina viskoznog fluida u njima. U tu svrhu u struji fluida uočimo jedan element fluida oblika cilindra dužine  $\ell$  i poluprečnika  $r$ , kao na slici 9.28. Na uočeni element fluida u stacionarnom toku delovaće sila viskoznosti  $F_{\eta}$  i sila koja potiče od razlike pritisaka  $P_1$  i  $P_2$  na krajevima cilindra, zbog koje se i kreće. U stacionarnom režimu ove sile će biti uravnotežene, pa je:



Slika 9.28. Fluid u cevi

$$P_1 r^2 \pi - P_2 r^2 \pi = -\eta 2\pi r \ell \frac{dv}{dr}$$

Znak  $-$  ispred sile viskoznosti označava da je  $dv/dr < 0$  odnosno da brzina opada sa  $r$ . Iz navedenog izraza, razdvajanjem promenljivih, sledi:

$$dv = \frac{(P_1 - P_2)}{2\ell\eta} r \cdot dr \quad (9.61)$$

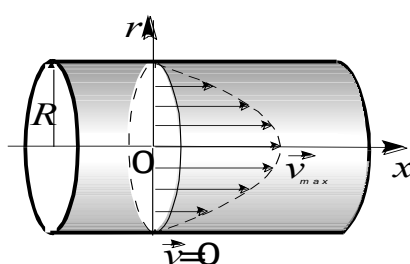
Integracijom ovog izraza od  $(R, v=0)$  do  $(r, v)$  se dobija:

$$v = \frac{(P_1 - P_2)}{2\ell\eta} (R^2 - r^2) \quad (9.62)$$

Dakle, zavisnost brzine od  $r$  je kvadratna odnosno parabolična funkcija, pri čemu je za  $r=0$ :

$$v_{\max} = \frac{(P_1 - P_2)}{2\ell\eta} R^2 \quad (9.63)$$

i za  $r=R$ ,  $v=0$ , što je ilustrovano na slici 9.29.



Slika 9.29. Raspodela brzina u cevi

Pomoću relacije (9.62) može se za slučaj viskozne tečnosti izračunati protok  $Q=dV/dt$ , odnosno zapremina viskozne tečnosti koja proteče kroz cev u jedinici vremena. To ćemo uraditi integracijom, deleći zapreminu cevi na tanke šuplje cilindre poluprečnika  $r$  i debljine  $dr$ , za koje se zbog cilindrične simetrije može tvrditi da imaju približno konstantnu brzinu. Element protoka  $dQ$  kroz poprečni presek šupljeg cilindra  $dS=2\pi r dr$ , uočenog cilindra brzine  $v$  iznosiće u jedinici vremena:

$$dQ = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot v \quad (9.64)$$

Ukupan protok biće integral ovog izraza, uz zamenu izraza za brzinu, u granicama od  $r=0$  do  $r=R$ :

$$Q = \frac{2\pi(P_1 - P_2)}{4\ell\eta} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = v = \frac{\pi(P_1 - P_2)}{8\ell\eta} R^4 \quad (9.65)$$

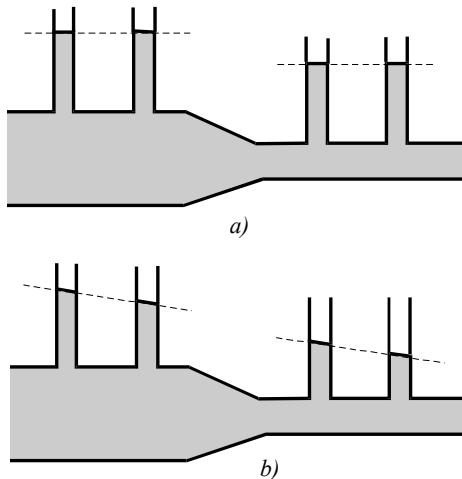
Ova relacija se naziva Poazejev (Poiseuille) zakon. Po njemu protok zavisi od  $R^4$ ,  $(P_1 - P_2)/\ell$  i recipročne vrednosti koeficijenta viskoznosti  $\eta$ .

Na osnovu jednačine kontinuiteta protok je u svim presecima cevi konstantnog prečnika isti i ne zavisi od dužine cevi  $\ell$ , odnosno:

$$\frac{dQ}{d\ell} = 0 \quad \text{ili} \quad Q = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\eta \ell} = \text{const} \quad (9.66)$$

Odavde je i  $(P_1 - P_2)/\ell = \Delta P/\ell = \text{const}$ , odnosno  $\Delta P/\ell$ -moduo gradijenta pritiska je konstantan, pa je  $\Delta P = \ell \cdot \text{const}$ .

Dakle, pritisak u strujnoj cevi opada sa dužinom cevi, što nije bio slučaj kod idealnog fluida, gde je prema Bernulijevoj jednačini za  $h_1=h_2$  i  $v_1=v_2$ ,  $P_1=P_2$  odnosno  $\Delta P=0$ . Ova razlika izmedju idealnog i viskoznog fluida je ilustrovana uz pomoć otvorenih manometara na slici 9.30. Ovaj rezultat se primenjuje u raznim eksperimentima za određivanje koeficijenta viskoznosti. **Ostvald-ov viskozimetar** se zasniva na merenju vremena  $t$  isticanja istih zapremina etalonske i tečnosti nepoznatog  $\eta$  kroz istu kapilarnu vertikalnu cev, visine  $h$ .



Slika 9.30. Razlika između idealnog i viskoznog fluida

Izjednačavanjem zapremina se na osnovu izraza (9.65) dobija sledeća relacija:

$$\eta = \eta_0 \frac{\Delta P}{\Delta P_0} \frac{t}{t_0} = \eta_0 \frac{\rho g h}{\rho_0 g h} \frac{t}{t_0} = \eta_0 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{t}{t_0} \quad (9.67)$$

gde su  $\rho$  i  $\rho_0$  gustine nepoznate i etalonske tečnosti.

### 9.12. Laminarno i turbulentno strujanje. Dinamički potisak.

Laminarno ili slojevito strujanje je ono u kome se mogu odrediti strujne linije i gde svaka tačka prostora ima jednoznačno određen vektor brzine strujanja u svakom trenutku vremena, što se matematički izražava poznavanjem funkcije  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ . Dogadja se pri malim brzinama strujanja i može biti stacionarno i nestacionarno.

Turbulentno kretanje se karakteriše energičnim mešanjem slojeva fluida i dešava se pri velikim brzinama strujanja. Odlikuje se:

- nepostojanjem strujnih linija i cevi,
- haotičnim kretanjem celokupne mase fluida sa obrazovanjem lokalnih turbulencija (vrtloga),
- strujanje je nestacionarno,  $dv/dt \neq 0$  za proizvoljnu tačku,
- vrednosti brzine i pritiska osciluju oko nekih srednjih vrednosti, koje se sada uzimaju kao karakteristike kretanja,
- pad pritiska nije linearna, već kvadratna funkcija brzine (ne važi Poazejev zakon).

Na osnovu eksperimentalnog posmatranja Reynolds je utvrdio da karakter strujanja viskoznog fluida zavisi od vrednosti jednog bezdimenzionog broja koji je dat sa:

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle R}{\eta} = \frac{\langle v \rangle R}{\nu} \quad (9.68)$$

gde je  $\rho$ —gustina fluida,  $\eta$ —koeficijent viskoznosti,  $\langle v \rangle$  srednja brzina strujanja i  $R$ -poluprečnik cevi. Odnos  $\nu = \eta/\rho$  se naziva kinematička viskoznost i potpunije karakteriše ulogu viskoznosti pri turbulentnom strujanju.  $Re$ -se naziva Reynoldsov broj i određuje karakter strujanja, tako da se uzima:

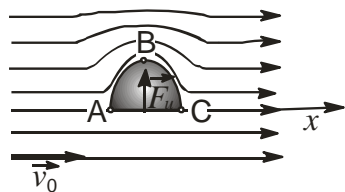
$Re < 2000$	-strujanje je laminarno
$Re > 3000$	" turbulentno
$2000 < Re < 3000$	" nestabilno

Na taj način se u određenim uslovima može odrediti kritična srednja brzina strujanja, vskr, do koje je strujanje laminarno.  $Re$  određuje takodje i tzv. kriterijum dinamičke sličnosti strujanja, na osnovu koje se recimo avioni ili trkački automobili ispituju u specijalnim tunelima umesto u vožnji.

**Dinamički potisak-sila uzgona** nastaje kao posledica sledećih pojava:

- asimetričnosti tela u struji fluida,
- obrtanja tela u struji viskoznog fluida-Magnusov efekat,
- obrazovanja vrtloga iza tela u struji viskoznog fluida.

A) Prema Euler-ovom paradoksu strujanje idealnog fluida ne deluje nikakvom silom ako je opticanje oko tela simetrično. Medjutim, ako je telo asimetrično u odnosu na pravac strujnih linija, obrazovaće se asimetričan tok, kao na slici 9.31, i po Bernulijevoj jednačini asimetrična raspodela pritiska.



Slika 9.31. Asimetrično telo u struji fluida

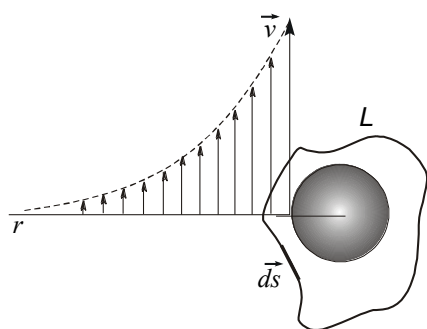
U tački B brzina proticanja i dinamički pritisak su veći zbog jednačine kontinuiteta, pa je statički pritisak niži nego u tačkama na ravni AC. Ova razlika pritisaka izaziva pojavu transverzalne sile uzgona -  $\vec{F}_u$ , odnosno sile dinamičkog potiska.

Slična pojava se događa i u viskoznim fluidima, sa razlikom što se kod njih javljaju još i čeonu otpor,  $\vec{F}_\epsilon$ -kao sila viskoznog trenja i sila izazvana postojanjem uzdužnog gradijenta pritiska  $\vec{F}_p$ . Ukupna sila potiska je u tom slučaju

jednaka zbiru:

$$\vec{F} = \vec{F}_u + \vec{F}_\epsilon = \vec{F}_u + \vec{F}_\eta + \vec{F}_p.$$

B) Posmatrajmo sferno telo koje rotira u mirnom viskoznom fluidu, kao na slici 9.32. Površina tela deluje na fluid i on zbog svoje viskoznosti počinje u slojevima da se obrće zajedno sa telom. Brzina strujanja v slojeva fluida opada sa rastojanjem r. Uzmimo da je  $v=k/r$ . Za takvo kretanje definiše se pojam cirkulacije vektora brzine strujanja:



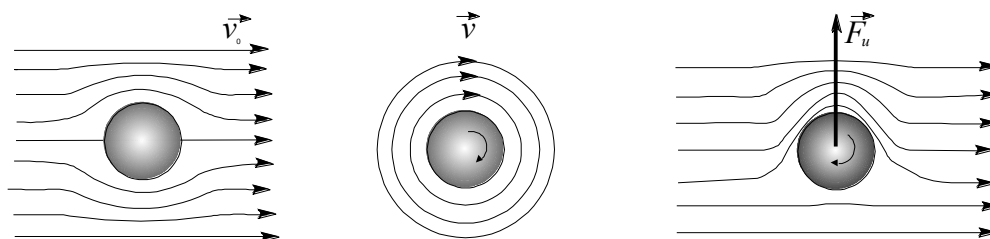
$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{k}{r} \oint ds = \frac{k}{r} 2\pi r = 2\pi k$$

gde je ds element zatvorene konture oko tela. Vidimo da cirkulacija ne zavisi od r. Dakle, cirkulacija po različitim konturama je ista. To važi i za proizvoljne, nepravilne konture. Cirkulacija  $\Gamma$  jednoznačno određuje karakter kružnog strujanja oko tela i uzrokuje, kao što ćemo videti, pojavu sila potiska na telo.

Slika 9.32. Sferno telo rotira u mirnom fluidu

Neka telo rotira u viskoznom fluidu koji teče oko njega. Na priloženoj slici prikazane su strujne linije i brzine fluida i to na prvom delu za slučaj kada telo

miruje, a fluid teče, na drugom delu kada se telo obrće izazivajući cirkulisanje "mirnog" fluida oko sebe i na trećem delu kada istovremeno fluid teče, a telo se obrće. Brzine  $\vec{v}_0$  i  $\vec{v}$  se vektorski sabiraju, što znači da se u gornjem delu sredine brzine sabiraju, a u donjem oduzimaju tako da se javlja asimetrična raspodela brzina. Posledica toga je cirkulacija različita od nule,  $\Gamma \neq 0$ . U fluidu iznad tela brzina strujanja, a time i hidrodinamički pritisak su veći, te je na osnovu Bernulijeve jednačine "statički" pritisak manji nego u donjem delu sredine. Razlika pritisaka izaziva silu dinamičkog potiska,  $\vec{F}_u$ , kao na slici 9.33. Ova pojava se naziva Magnusov efekat.



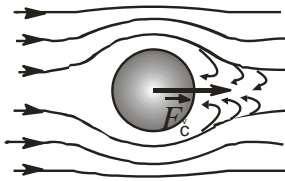
Slika 9.33. Magnusov efekat

Navedena sila dinamičkog potiska se naziva sila Žukovskog, a njen intenzitet je dat sledećim izrazom:

$$F_u = \rho \cdot v_o \cdot D \cdot \Gamma \quad (9.69)$$

gde je  $\rho$ -gustina fluida,  $v_o$ -njegova brzina strujanja,  $D$ -dužina cilindra (valjkastog tela koje rotira) i  $\Gamma$ -cirkulacija.

**C)** Za velike brzine strujanja,  $v > v_{kr}$  tj.  $R_e > R_{e,kr}$ , iza tela se javljaju vrtlozi-turbulencije u kojima je pritisak manji nego ispred tela. Usled razlike pritisaka nastaje čeona sila usmerena duž toka fluida i to tako da usporava kretanje, kao na slici 9.34. Njen intenzitet je dat sledećim izrazom:



Slika 9.34. Pojava čeone sile

$$F_{\check{c}} = C_x \cdot S \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} \quad (9.70)$$

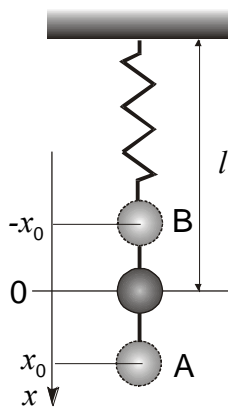
gde je  $S$ -najveći presek tela normalno na tok fluida,  $\rho$ -gustina,  $C_x$ -bezdimezionna konstanta koja zavisi od oblika tela. Sa daljim povećanjem brzine sila prelazi iz kvadratne u kubnu zavisnost od brzine  $F_{\check{c}} \cong v^3$ . Kada brzina dostigne brzinu zvuka sila je najveća, a iza toga se opet smanjuje, što se zapaža pri proboju zvučne barijere.

Pri specijalnoj konstrukciji tela-avionska krila (kapljicaoblik, nesimetričan i nagnut), vrtlozi imaju poseban raspored i smer vrtloženja odnosno moment impulsa koji se zbog zakona održanja prenosi na ostatak fluida oko krila. To izaziva cirkulaciju fluida i silu uzgona koja potpomaže letenje aviona. Osnovne pojave koje omogućavaju let aviona su svakako promena impulsa fluida zbog nagiba krila i sila uzgona zbog asimetrije krila.

## X

### MEHANIČKE OSCILACIJE

Oscilacije predstavljaju posebnu vrstu kretanja ili nekog fizičkog procesa koji poseduje neki stepen ponovljivosti. Takva kretanja su, na primer, kretanje tela obešenog o oprugu, klatna, vibracije žice ili vazdušnog stuba, oscilovanje atoma u molekulu, itd. Oscilatorno kretanje se naziva periodično ako su njegove karakteristike: put, brzina i ubrzanje, periodične funkcije vremena. Vremenski interval u kome se oscilatorno kretanje ponavlja, naziva se period oscilovanja  $T$ . Periodičnost neke funkcije matematički se izražava jednakošću:  $f(t+T)=f(t)$ . Ako se karakteristike oscilovanja opisuju prostim trigonometrijskim funkcijama oscilovanje se naziva harmonijsko



Slika 10.1. Harmonijsko oscilovanje

Uzrok harmonijskog oscilovanja su sile restitucije. Telo vrši harmonijsko oscilovanje pod dejstvom sile čiji je intenzitet proporcionalan pomeranju (paragraf 3.8.3.). Ovo svojstvo u prvom redu imaju elastične sile čiji je intenzitet po Hukovom zakonu proporcionalan elastičnoj deformaciji tela. Razmotrićemo takvo kretanje tela uz pomoć slike 10.1. Ako se kuglica mase  $m$  obešena o elastičnu oprugu pomeri iz ravnotežnog položaja  $O$  u položaj  $A$ , po oslobadjanju počeeće da se kreće nazad u ravnotežni položaj pod dejstvom sile:

$$\vec{F} = -k \cdot x \cdot \vec{i} \quad (10.1)$$

Zbog stečene kinetičke energije telo se ne zaustavlja u tački  $O$ , već nastavlja po inerciji da se kreće do položaja  $B$ . U ovom položaju telo je izgubilo svu kinetičku energiju, a kako sila (10.1) na njega i dalje deluje, telo se vraća prema položaju  $A$ . Kretanje će se ponoviti, i na taj način telo osciluje oko svog ravnotežnog položaja. U realnim uslovima, zbog otpora vazduha ovo kretanje neće trajati beskonačno dugo, mada teorijski ima uslove za to.

Oscilovanje se javlja i kod matematičkog klatna pod dejstvom aktivne komponente sile zemljine teže, koja je za male oscilacije srazmerna pomeranju (videti paragraf 3.12.1). U kristalnoj rešetci i u molekulima atomi osciluju pod dejstvom elektrostatičkih sila, itd. Gravitaciona i elektrostatička sila u suštini nisu elastične. Neelastične sile koje izazivaju oscilatorno kretanje nazivaju se kvazielastične sile.

Definišimo karakteristične veličine za harmonijsko kretanje na primeru oscilovanja tela obešenog o elastičnu oprugu:

**Amplituda** je maksimalno udaljenje tela od ravnotežnog položaja. Obeležava se sa  $x_0$ . Ukupan domen kretanja je, znači,  $2x_0$ .

**Elongacija** je udaljenje tela od ravnotežnog položaja u ma kom trenutku vremena, to je tekuća koordinata  $x$ .

**Oscilacija** je jedan zatvoren ciklus kretanja, recimo  $O-A-O-B-O$ , ili  $A-O-B-O-A$ , u zavisnosti odakle je kretanje započelo, sl. 10.1.

**Faza** je argument funkcije koja opisuje kretanje u proizvoljnom trenutku vremena. U slučaju harmonijskog oscilovanja faza ima značenje ugla.

**Početna faza** je vrednost argumenta ili ugao koji odgovara položaju tela koji je uočen u početku posmatranja kretanja, recimo  $O$ , ili  $A$ , ili  $B$ , ili neki drugi položaj.

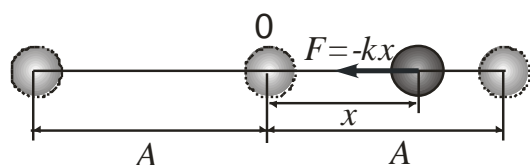
**Period kretanja**,  $T$ , je vreme potrebno da telo izvrši jednu punu oscilaciju i ne zavisi od faze.

**Učestanost** je broj oscilacija u jedinici vremena. Očigledno je to recipročna vrednost perioda:  $\nu=1/T$ . ( $T=0,2$  s ;  $\nu=5$  1/s = 5 Hz).

**Kružna učestanost** je broj oscilacija u  $2\pi$  sekundi,  $\omega = 2\pi\nu$ .

### 10.1. Jednačina harmonijskog oscilovanja. Put, brzina i ubrzanje.

Ovde se očigledno ne mogu primeniti jednačine kretanja sa konstantnim ubrzanjem, pošto se ubrzanje neprekidno menja sa vremenom. Posmatrajmo kretanje tela mase  $m$  pod dejstvom sile  $F=-kx$  duž x-ose, slika 10.2. Po drugom Njutnovom zakonu biće:



odnosno:

$$F = -kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (10.2)$$

Slika 10.2. Delovanje restitucione sile

Ovo je diferencijalna jednačina drugog reda funkcije  $x$  po vremenu  $t$ . Obzirom da sadrži drugi izvod funkcije i samu funkciju, ne može se direktno integrirati. Jedan od načina da se jednačina reši primenjen je u paragrafu 3.8.3 i ovde ćemo navesti samo krajnje rešenje, u sledećem obliku:

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \theta_0) \quad (10.3)$$

Dakle, rešenje je sinusna funkcija vremena,  $A$  je amplituda oscilovanja,  $\omega = (k/m)^{1/2}$ , a izraz u zagradi je faza ili fazni ugao i izražava se u radijanima. Ugao  $\theta_0$  je početna faza ili početni fazni ugao.

Period oscilovanja  $T$  smo definisali kao vreme potrebno za jednu punu oscilaciju. Koordinata  $x$  će imati istu vrednost u trenutku  $t$  i  $t+T$ , dakle fazni ugao raste za  $2\pi$  za vreme  $T$ :

$$\omega(t+T) + \theta_0 = (\omega t + \theta_0) + 2\pi \quad \text{pa je} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (10.4)$$

Vidimo da  $T$  zavisi samo od  $m$  i  $k$ , a ne recimo od  $A$ . Za dato  $m$  i  $k$  period  $T$  je isti bez obzira da li je amplituda velika ili mala, za takvo kretanje kažemo da je izohrono. Učestanost  $\nu$  ili broj punih oscilacija u jedinici vremena je recipročna vrednost perioda  $T$ :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (10.5)$$

Odavde se može dobiti fizički smisao kružne učestanosti,  $\omega = 2\pi\nu$ , odnosno kružna učestanost predstavlja broj oscilacija u  $2\pi$  sekundi.

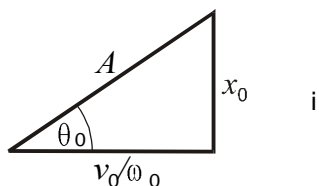
Diferenciranjem jednačine kretanja (10.3) po vremenu dobijaju se izrazi za brzinu i ubrzanje :

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \theta_0) \quad (10.6)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta_0) \quad (10.7)$$

Očigledna je direktna veza između  $a$  i  $x$ ,  $a = -\omega^2 x$ . Veličine  $A$  i  $\theta_0$  se jednostavno mogu povezati sa početnim uslovima oscilovanja, položajem  $x_0$  i brzinom  $v_0$  u trenutku  $t=0$ . Zamenom početnih uslova u

izraze (10.3) i (10.6) dobijamo:  $\sin\theta_0=x_0/A$  i  $\cos\theta_0=v_0/\omega A$ . Ako ove odnose predstavimo kao na slici 10.3., jednostavno dobijamo sledeće relacije, čime su integracione konstante potpuno određene:

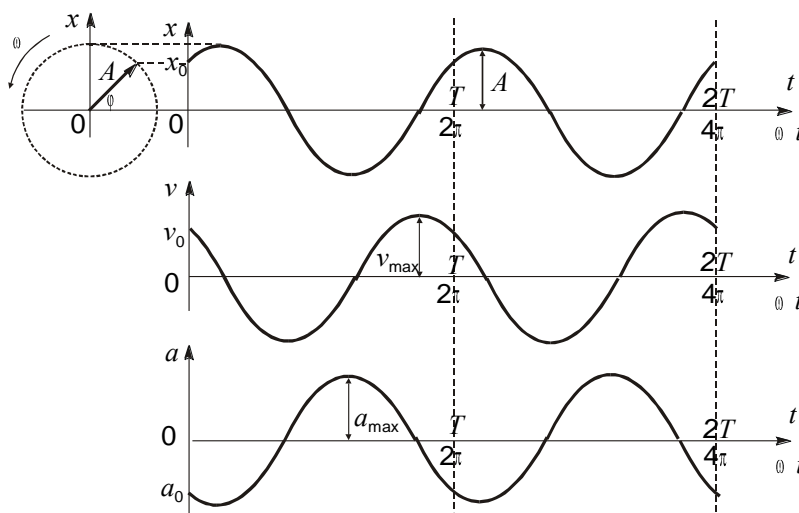


$$\operatorname{tg}\theta_0 = \omega \frac{x_0}{v_0} \quad (10.8)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0 / \omega)^2} \quad (10.9)$$

Slika 10.3. Veza amplitude i početne faze sa početnim uslovima oscilovanja

Radi ilustracije, na slici 10.4., prikazane su zavisnosti  $x$ ,  $v$  i  $a$  od vremena  $t$  odnosno od ugla  $\omega t$ , za slučaj kada je početna faza  $\theta_0=\pi/4$  rad.



Slika 10.4. Zavisnost elongacije, brzine i ubrzanja od vremena

Drugi pogodan način za predstavljanje oscilovanja je pomoću dijagrama na krugu poluprečnika  $A$ , prikazanom takodje na slici 10.4. Ovaj način se naziva vektorski način predstavljanja. **PRIMER:** Neka je masa posmatranog tela, sa slike 10.1., 25 g, neka je  $k=0,004$  N/cm i neka se pomeri 10 cm udesno od ravnotežnog položaja ( $x_0$ ), gde mu se saopšti brzina ( $v_0$ ) od 40 cm/s. Izračunati  $T$ ,  $\nu$ ,  $\omega$ ,  $E$ ,  $A$ ,  $\theta_0$ ,  $v_{\max}$ ,  $a_{\max}$  i vrednosti za  $x$ ,  $v$  i  $a$  u trenutku kada se fazni ugao promeni za  $\pi/8$  od početka kretanja.

( $T=1.57$  s,  $\nu=0,64$  Hz,  $\omega=4$  rad/s,  $A=14,14$  cm,...)

## 10.2. Matematičko i fizičko klatno.

Matematičko klatno je čestica mase  $m$  obešena o neistegljivu nit bez težine koja je drugim svojim krajem učvršćena, kao na slici 10.5. Kada se čestica izvede iz ravnotežnog položaja za ugao  $\theta$ , javlja se restituciona sila:

$$F = -m \cdot g \cdot \sin\theta \quad (10.10)$$

kao aktivna komponenta sile zemljine teže. Druga komponenta,  $mg\cos\theta$  je uravnotežena sa silom zatezanja niti  $F_z$  i ne uzima se u razmatranje. Pomeranje  $s=L\theta$  je srazmerno sa  $\theta$ , dok je restituciona sila srazmerna sa  $\sin\theta$ , dakle diferencijalna jednačina kretanja nije homogena i kretanje nije harmonijsko. Medjutim za mali otklon, ako je  $\theta$ -malo, može se uzeti da je približno  $\sin\theta=\theta$ , pa je:

$$F = -mg\theta = \frac{mg}{L}s. \quad (10.11)$$

U tom slučaju se može smatrati da je kretanje, dakle za male oscilacija, harmonijsko. Diferencijalna jednačina oscilovanja je:

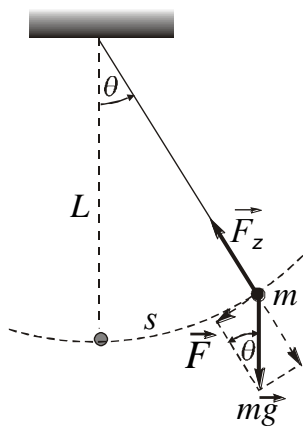
$$m\ddot{s} + \frac{mg}{L}s = 0 \quad (10.12)$$

a jednačina kretanja će, na osnovu paragrafa 3.12.1, biti:

$$s = s_0 \sin(\omega t + \theta_0) \quad (10.13)$$

Efektivna konstanta klatna je  $k=mg/L$ , a period oscilovanja:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (10.14)$$



Ovo je približna, ali dosta dobra vrednost za T. Ako je  $\phi = \theta_{\max}$  ugao pri maksimalnom odklonu klatna, tačna vrednost za T data je izrazom:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \frac{1}{2^2} \frac{3^2}{4^2} \sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right) + \dots \right\}$$

Slika 10.5. Matematičko klatno

Za  $\phi = 15^\circ$ , na primer, razlika između gornje približne i ove prave vrednosti za T manja je od 0,5%.

Ovde, naravno, važe sve formule za harmonijsko kretanje. Nije teško odgovoriti gde je čestica najbrža. Gde je ubrzanje najveće? Šta se događa i kakvo je kretanje ako je nit klatna istegljiva?

Period oscilovanja matematičkog klatna ne zavisi od amplitude oscilovanja, kretanje je izohrono. Zbog toga, recimo, časovnik sa klatnom radi dobro i pri relativno slaboj "navijenosti".

Matematičko klatno može da posluži, merenjem L i T za veoma tačno određivanje ubrzanja zemljine teže - g. Preko promene g zbog promenjene gustine tla mogu se ispitivati nalazišta ruda.

**Harmonijsko kretanje po delu kružne putanje** je matematički potpuno analogno linearnom harmonijskom kretanju. Ukoliko na kruto telo koje se obrće oko stalne ose deluje moment restitucione sile srazmeran pomeranju  $f$ , tada se može pisati

$$M = -k' \cdot \phi \quad (10.15)$$

Sličan izraz smo već sreli u Kevendiševom ogledu. Ako su momenti sila trenja zanemarljivi, tada je na osnovu zakona rotacionog kretanja diferencijalna jednačina sledećeg oblika:

$$M = I \cdot \alpha \quad (10.16)$$

odnosno u razvijenom obliku, će biti:

$$I \frac{d^2\phi}{dt^2} + k' \phi = 0 \quad \text{ili} \quad \ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0 \quad (10.16)$$

Ova jednačina ima oblik identičan jednačini za linearno oscilovanje, s tim što je funkcija ugaono, a ne linijsko pomeranje. Oblik rešenja će takodje biti isti, odnosno njeno rešenje je:

$$\phi = \phi_o \cdot \sin(\omega t + \theta_o) \quad (10.18)$$

gde je kružna učestanost jednaka:  $\omega = \omega = \sqrt{k'/I}$ .

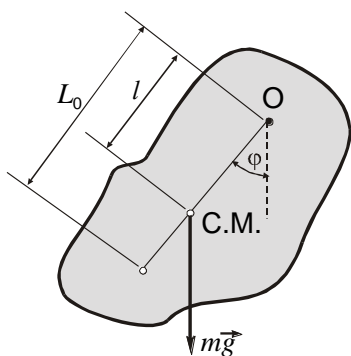
**FIZIČKO KLATNO** je telo proizvoljnog oblika koje se obrće oko stalne ose, kako je to ilustrovano na slici 10.6. Kod ovog slučaja se javlja moment restitucione sile ili restitucioni moment sile koji iznosi, na osnovu gornjih razmatranja:

$$M = - m \cdot g \cdot \ell \cdot \sin\phi \quad (10.19)$$

Za male uglove otklona,  $\sin\phi \approx \phi$ , kretanje se može smatrati harmonijskim, odnosno biće:

$$M = -(mg \ell) \phi \quad (10.20)$$

$$k' = mg \ell \quad (10.21)$$



Slika 10.6. Fizičko klatno

Kretanje će biti opisano jednačinom oblika:

$$\phi = \phi_o \sin(\omega t + \theta_o) \quad (10.22)$$

Pri tom je  $\omega = \sqrt{k'/I} = \sqrt{mg\ell/I}$  a period  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I/mg\ell}$ . Ovim je oscilovanje fizičkog klatna u potpunosti opisano, ako je poznat moment inercije tela oko date ose. Kod fizičkog klatna se takodje definiše tzv. "ekvivalentna dužina klatna" kao dužina matematičkog klatna iste mase koje bi imalo isti period

oscilovanja kao dato fizičko klatno. Ta dužina je data jednostavnom vezom:

$$L_o = \frac{I}{m\ell} \quad (10.23)$$

Tačka koja se nalazi na rastojanju  $L_o$  od ose rotacije O, na pravcu koji prolazi kroz centar mase datog tela naziva se centar oscilovanja.

Fizičko klatno se na osnovu merenja perioda oscilovanja može uspešno primeniti za određivanje momenta inercije I za tela nepravilnog oblika.

### 10.3. Energija harmonijskog oscilatornog kretanja.

Oscilator, odnosno telo koje vrši harmonijsko oscilatorno kretanje, pri kretanju neprekidno menja položaj i brzinu, što znači da raspolaže određenom kinetičkom i potencijalnom energijom. Ova energija saopštena je oscilatoru na početku oscilovanja, kroz početne uslove oscilovanja. Pri tome, obzirom da je takav sistem zatvoren, važiće i zakon o održanju mehaničke energije. Već smo pisali da je  $mv^2/2 + kx^2/2 = E$ . Sada ćemo ove veličine izraziti preko karakteristika oscilovanja.

Izraz za potencijalnu energiju dobićemo zamenom odgovarajućeg izraza za x u potencijalnu energiju sistema:

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \theta_o) = \frac{m\omega^2 A^2}{4} \{1 - \cos 2(\omega t + \theta_o)\} \quad (10.24)$$

Dakle, potencijalna energija oscilatora srazmerna je kvadratu elongacije  $x$  i menja se sa frekvencom dva puta većom od frekvence oscilatora. Maksimalna potencijalna energija proporcionalna je kvadratu amplitude  $A$ .

Izraz za kinetičku energiju dobićemo zamenom izraza za brzinu  $u$  u kinetičku energiju, na sledeći način:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \cos^2(\omega t + \theta_0) = \frac{m\omega^2 A^2}{4} \{1 + \cos 2(\omega t + \theta_0)\} \quad (10.25)$$

Dakle, i kinetička energija je srazmerna kvadratu elongacije i menja se sa sa frekvencijom  $2\omega$ , ali je fazno pomerena u odnosu na potencijalnu energiju za ugao  $\pi$ .

Zbir kinetičke i potencijalne energije daje ukupnu energiju oscilatora:

$$E = E_k + U = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \{ \cos^2(\omega t + \theta_0) + \sin^2(\omega t + \theta_0) \} \quad (10.26)$$

odnosno:

$$E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \text{const.} \quad (10.27)$$

Dakle, ukupna energija oscilatornog kretanja je srazmerna kvadratu amplitude oscilovanja. Kinetička energija se menja kao kvadrat kosinusne, a potencijalna kao kvadrat sinusne funkcije, što znači da kada se jedna povećava, druga se smanjuje, i obrnuto. Pošto su srednje vrednosti kvadrata sinusa i kvadrata kosinusa sa vremenom, za duži interval vremena, jednake  $1/2$ , to su i srednje vrednosti  $U$  i  $E_k$  jednake  $E/2$ .

#### 10.4. Slaganje oscilacija istog pravca i perioda.

Šta se događa ako su dva oscilatorna kretanja spregnuta, odnosno ako na isto telo deluju dve nezavisne restitutionone sile, na primer dve opruge? Posmatračemo jednostavan slučaj. Neka su jednačine kretanja pojedinačnih oscilovanja, u odsustvu drugog kretanja:

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (10.28)$$

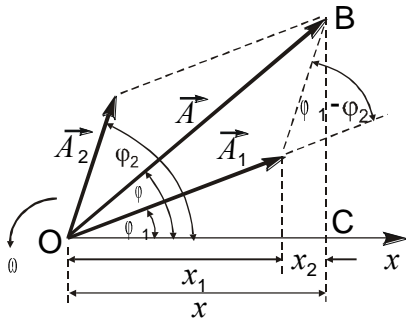
$$x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Ovde su učestanosti medjusobno jednake,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Pošto su pojedinačna oscilovanja istog pravca, rezultujuće oscilovanje će se vršiti po istoj pravoj i biće jednako algebarskom zbiru pojedinačnih pomeranja:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (10.29)$$

Analiza ovog kretanja najjednostavnije se izvodi uz pomoć tzv. "vektorskog dijagrama" ili "amplitudnih vektora-verzora". Ovaj način sabiranja oscilacija prikazan je na slici 10.7. Dijagramsko prdstavljanje oscilovanja na krugu smo već sreli govoreći o grafičkom predstavljanju oscilovanja. Oscilovanje se, kao i na ovoj slici prikazuje kretanjem vrha vektora amplitude oscilovanja po krugu sa ugaonom brzinom  $\omega$ . Ako se oba oscilovanja prikažu na ovaj način, njihov zbir će biti vektor:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \quad (10.30)$$



Slika 10.7. Verzorsko slaganje oscilacija

Pošto se sva tri amplitudna vektora-verzora obrću istom ugaonom brzinom, njihov uzajamni položaj se ne menja sa vremenom, fazna razlika između bilo koja dva od njih je konstantna:  $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ ,  $\varphi_2 - \varphi = \text{const}$  i  $\varphi_1 - \varphi = \text{const}$ . Oscilacije za koje važe ovi uslovi odnosno oscilacije iste učestanosti se nazivaju "koherentne" oscilacije.

Na osnovu gornje slike, projekcije rezultujućeg verzora na proizvoljnu osu jednake su algebarskom zbiru projekcija komponenta pojedinih verzora na istu osu, pa se rezultujuće oscilovanje u opštem obliku da izraziti kao:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.31)$$

Potrebno je samo još odrediti  $A$  i  $\varphi$ . Amplituda se može odrediti sa slike 10.7 uz pomoć kosinusne teoreme (za  $t=0$ ):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos\{\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)\} = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (10.32)$$

a početni fazni ugao je, sa priložene slike, određen izrazom:

$$\text{tg} \varphi = \frac{BC}{OC} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (10.33)$$

Isti rezultat, odnosno isti izrazi mogu se dobiti iz polaznih jednačina primenom trigonometrijskih transformacija.

Ovde treba istaći da rezultujuća amplituda,  $A$ , ne zavisi samo od  $A_1$  i  $A_2$ , već i od fazne razlike  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ . Pošto je  $-1 < \cos\alpha < 1$ , to sledi da je:

$$A_1 - A_2 \leq A \leq A_1 + A_2 \quad (10.34)$$

pa čak može biti i nula, za  $A_1 = A_2$ .

Isti postupak važi i za sabiranje većeg broja koherentnih harmonijskih oscilacija. Za nekoherentne oscilacije postupak je, međutim, znatno složeniji, jer su u tom slučaju i faze funkcije vremena,  $\varphi_1(t)$  i  $\varphi_2(t)$ , preko faktora  $\omega t$ . To znači da će i amplituda biti funkcija vremena, a amplitudski dijagram se ne može primeniti.

### 10.5. Slaganje oscilacija različitih perioda. Izbijanje.

Neka oscilator istovremeno učestvuje u dva harmonijska oscilovanja istog pravca, smeru, amplitude i početne faze, a različitih perioda, odnosno različitih učestanosti:

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (10.35)$$

$$x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

i neka je  $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 + \omega_2$  odnosno  $\omega_1 \cong \omega_2$ . Rezultujuće oscilovanje se dobija primenom trigonometrijske transformacije za zbir kosinusa:

$$x = x_1 + x_2 = A \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + A \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_0)$$

odnosno:

$$x = 2A \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 t + \varphi_0 - \omega_1 t - \varphi_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 t + \varphi_0 + \omega_1 t + \varphi_0}{2}\right) \quad (10.36)$$

tj.

$$x = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_0\right) \quad (10.37)$$

Kao što vidimo rezultujuće oscilovanje nije harmonijsko oscilovanje, već je proizvod dva harmonijska oscilovanja. Prvi činilac se može izraziti kao:

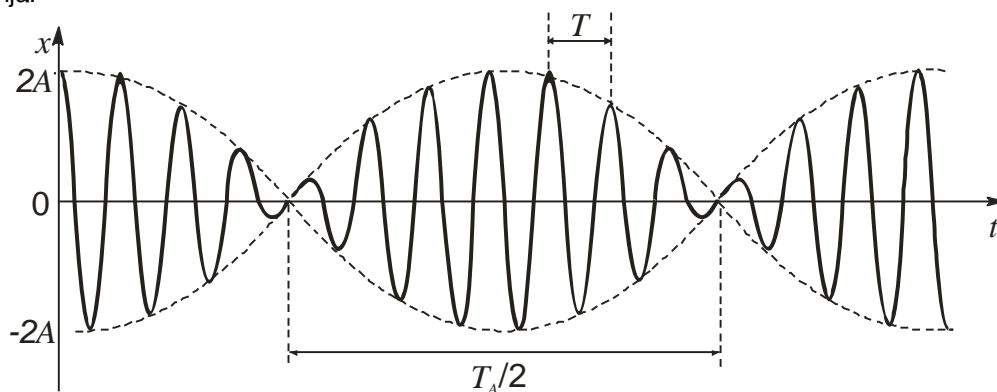
$$A(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) = 2A \cdot \cos(\omega_A t) \quad (10.38)$$

gde je  $\omega_A = (\omega_2 - \omega_1)/2$ . Pod učinjenom pretpostavkom,  $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_A$  je veoma malo, a  $T_A = 2\pi/\omega_A = 4\pi/(\omega_2 - \omega_1)$  je veoma veliko, pa je  $A(t)$  skoro konstantno i može se smatrati sporo promenljivom amplitudom oscilovanja. U graničnom slučaju za  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $T_A$  teži beskonačnosti a  $A(t) \rightarrow 2A$ .

Drugi činilac izraza (10.37)  $\cos\{(\omega_1 + \omega_2)t/2\}$  ima frekvencu koja je srednja vrednost početnih:  $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$  i period približno jednak periodu osnovnih oscilovanja:  $T = 2\pi/\omega = 4\pi/(\omega_1 + \omega_2)$ . Dakle vidi se jasno da je  $T_A \gg T$ , čime se još jednom potvrđuje da se  $A(t)$  može smatrati amplitudom, iako se, mada sporo, menja sa vremenom. Dakle, oscilovanje je skoro harmonijsko i dato je izrazom:

$$x = A(t) \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_0\right) \quad (10.39)$$

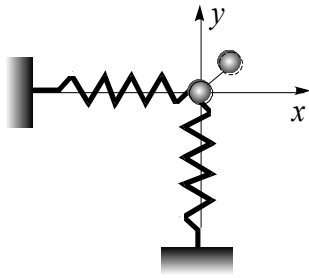
Obzirom da se amplituda ipak menja sa vremenom, ovo oscilovanje se periodično smanjuje i pojačava, a naziva se **izbijanje**. Ovakvo oscilovanje je grafički prikazano na slici 10.8. Sa slike se jasno vidi da je  $T_A$  znatno veće od  $T$ , kao i smisao samog naziva "izbijanje" za ovaj tip složenog oscilovanja.



Slika 10.8. Izbijanje pri slaganju oscilacija bliskih vrednosti perioda

### 10.6. Slaganje uzajamno normalnih harmonijskih oscilacija.

Razmotrimo rezultujuće oscilovanje materijalne tačke koja istovremeno osciluje pod dejstvom dve međusobno normalne restitucione sile, odnosno koja učestvuje u dva međusobno normalna harmonijska oscilovanja, istih perioda. Podsetimo se pri tome diskusije o oscilovanju matematičkog klatna sa istegljivom niti. Izaberimo koordinatni sistem  $xOy$  tako da mu se početak poklapa sa ravnotežnim položajem tačke, slika 10.9. Neka je pri tome kretanje duž  $x$  i  $y$ -ose opisano sledećim jednačinama:



Slika 10.9. Slaganje uzajamno normalnih oscilacija

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) \quad (10.40)$$

$$y = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Za ovaj slučaj ove dve jednačine predstavljaju ustvari jednačinu putanje tačke u parametarskom obliku. Eliminisanjem vremena  $t$  iz njih može se dobiti jednačina putanje u eksplicitnom obliku. U tom cilju primenom trigonometrijskih transformacija za kosinus zbira može se pisati:

$$\frac{x}{A_1} = \cos(\omega t) \cdot \cos\varphi_1 - \sin(\omega t) \cdot \sin\varphi_1$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t) \cdot \cos\varphi_2 - \sin(\omega t) \cdot \sin\varphi_2 \quad (10.41)$$

Množenjem prve od ovih jednačina sa  $\cos\varphi_2$ , a druge sa  $\cos\varphi_1$  i njihovim oduzimanjem, dobija se:

$$\frac{x}{A_1} \cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos\varphi_1 = \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (10.42)$$

Množenjem prve sa  $\sin\varphi_2$  a druge sa  $\sin\varphi_1$  i oduzimanjem se dobija:

$$\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin\varphi_1 = \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (10.43)$$

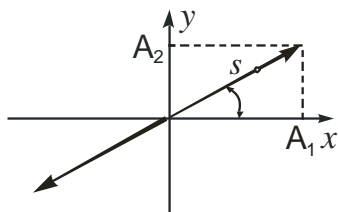
Dizanjem zadnje dve jednačine na kvadrat i njihovim sabiranjem dobićemo jednačinu putanje materijalne tačke u eksplicitnom obliku:

$$\left(\frac{x}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{A_2}\right)^2 - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (10.44)$$

Ovo je u opštem slučaju jednačina ELIPSE čije karakteristike zavise od fazne razlike  $\varphi_2 - \varphi_1$ , za određene vrednosti amplituda  $A_1$  i  $A_2$ . Razmotrićemo nekoliko posebnih slučajeva jednačine (10.44), odnosno nekoliko karakterističnih oblika kretanja.

**Slučaj a).** Neka je fazna razlika oscilovanja  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  ili  $2k\pi$ , ( $k=1,2,3,\dots$ ). Tada se jednačina kretanja svodi na:

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0 \quad \text{odnosno} \quad y = \frac{A_2}{A_1} x \quad (10.45)$$



Slika 10.10. Linearno polarizovano oscilovanje

Ovo je jednačina prave koja prolazi kroz koordinatni početak, dakle u tom slučaju imaćemo oscilovanje po pravoj liniji sa sledećim koeficijentom pravca:  $\tan \varphi = A_2/A_1$ ; kao što je prikazano na slici 10.10. U opštem slučaju, ovakvo oscilovanje se naziva LINEARNO POLARIZOVANO. Položaj tačke na pravoj u odnosu na tačku 0 određen je udaljenjem  $s$  koje je dato sledećim izrazom:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A_1^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + A_2^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.46)$$

Dakle, period oscilovanja je isti kao za pojedinačna oscilovanja,  $T=2\pi/\omega$ , ali je amplituda oscilovanja veća,  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ .

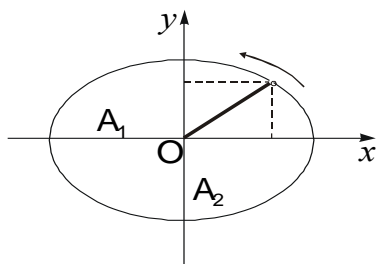
**Slučaj b).** Neka je fazna razlika  $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$ , ( $k=1,2,3\dots$ ), odnosno neparnom umnošku od  $\pi$ . Tada je:

$$\left( \frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} \right)^2 \quad \text{odnosno} \quad y = -\frac{A_2}{A_1} x \quad (10.47)$$

Ovo kretanje je identično sa slučajem a), samo što se odvija po drugoj pravoj, koja seče II i IV kvadrant koordinatnog sistema. Period oscilovanja je takodje nepromenjen, a amplituda se izračunava na identičan način.

**Slučaj c).** Neka je fazna razlika  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ . Tada jednačina trajektorije dobija sledeći oblik:

$$\left( \frac{x}{A_1} \right)^2 + \left( \frac{y}{A_2} \right)^2 = 1 \quad (10.48)$$



Slika 10.11. Eliptično polarizovano oscilovanje









što predstavlja jednačinu elipse sa poluosama  $A_1$  i  $A_2$ , slika 10.11. Ovakvo oscilovanje se naziva ELIPTIČNO POLARIZOVANO. Specijalno za slučaj  $A_1=A_2=A$ , jednačina  $x^2+y^2 = A^2$  predstavlja krug poluprečnika  $A$ , a oscilovanje se naziva CIRKULARNO ili KRUŽNO POLARIZOVANO. Oblici trajektorija mogu da budu i znatno složeniji.

**LISAŽUOVE FIGURE** (Lissajous) su krive linije koje predstavljaju putanje materijalne tačke koja istovremeno osciluje u dva međusobno normalna pravca. U opštem slučaju, amplitude, periodi i fazne razlike komponentnih oscilovanja mogu biti različiti.

Promena odnosa  $A_1$  i  $A_2$  izaziva promenu elipse kao opštijeg oblika putanje od prave linije do kruga, zadržavajući svoj položaj (nagib) stalnim u odnosu na pravce komponentnih oscilovanja.

Promena fazne razlike  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  izaziva promenu trajektorije i po obliku i po orijentaciji u odnosu na komponentna oscilovanja (nezavisno od odnosa amplituda).

Razlika perioda odnosno učestanosti komponentnih oscilovanja izaziva neprekidnu promenu fazne razlike, što utiče na deformisanje elipse dajući trajektoriji materijalne tačke vrlo komplikovane oblike, koji su zapravo Lisažuove figure. Ovo je ilustrovano za navedene odnose faznih razlika i učestanosti na slici 10.12.

$\Delta \varphi$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
$A_1=A_2$ $\omega_x/\omega_y$ $=1/2$					
$A_1=A_2$ $\omega_x/\omega_y$ $=3/4$					

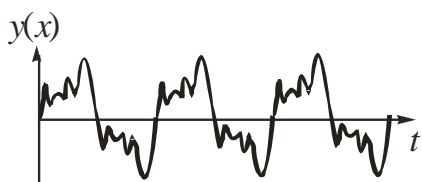
Slika 10.12. Lisažuove figure

**HARMONIJSKA ANALIZA. FOURIEOV RED.** Iz navedenih razmatranja slaganja dva harmonijska oscilovanja vidimo da rezultujuće oscilovanje zavisi od  $A$ ,  $\varphi_0$ ,  $\omega(T)$  i pravca oscilovanja. Mogu se dobiti veoma različita rezultujućša oscilovanja. Slaganjem tri i više komponentnih oscilovanja nastaju još složeniji oblici rezultujućeg oscilovanja. Na slici 10.13. prikazan je slučaj složene Lisažuove figure u parametarskom obliku,  $x$  ili  $y$  koordinata u funkciji vremena.

Obrnuo, svako oscilovanje složenog karaktera može se razložiti na dovoljan broj komponentnih oscilovanja različitih karakteristika. Francuski matematičar Fourier (Fourier) je pokazao da se proizvoljna periodična funkcija  $x=f(\omega t)$  može razložiti na beskonačan trigonometrijski red oblika:

$$x = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + \dots + B_1 \sin(\omega t) + B_2 \sin(2\omega t) + \dots \quad (10.49)$$

Ovaj red se naziva Fourieov red, a  $A_i$  i  $B_i$  su konstante koje se izračunavaju posebnim postupkom preko integrala date funkcije. Razlaganje u trigonometrijski red se naziva "harmonijska analiza".



Slika 10.13. Parametarski oblik Lisažuove figure



Slika 10.14. Spektar oscilacija

Spektar oscilacija je histogramski grafik vrednosti pojedinih amplituda  $A_i$  i  $B_i$  za date vrednosti umnoška kružne učestanosti iz Fourijeve analize, što je ilustrovano na slici 10.14.

### 10.7. Prigušene (amortizovane) oscilacije.

Oscilacije čija amplituda opada sa vremenom nazivaju se amortizovane oscilacije. Uzrok su spoljašnje sile trenja ili otpora sredine. Tako se klatno zbog trenja u tački vešanja i otpora viskozne sredine (vazduha) umiri posle određenog vremena.

Za male brzine, sile otpora sredine, po Stoksovom zakonu, zavise od brzine kretanja, tj.

$$\vec{F} = -r \cdot \vec{v} \quad (10.50)$$

gde je  $r = \text{const}$  - takozvani koeficijent otpora sredine. Jednačina kretanja matematičkog klatna u tom slučaju ima sledeći oblik:

$$m\vec{a} = -kx\vec{i} - r\vec{v} \quad (10.51)$$

Pošto su vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{i}$  i  $\vec{v}$  kolinearni, gornja jednačina se može pisati na sledeći način:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} \quad (10.52)$$

odnosno, ako se uvedu smene  $\omega_0^2 = k/m$  i  $\beta = r/m$ , jednačina dobija sledeći oblik:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta \frac{dx}{dt} \quad (10.53)$$

Ovaj izraz predstavlja homogenu diferencijalnu jednačinu drugog reda, koja se može svesti na jednačinu harmonijskog oscilatora uvodjenjem sledeće smene:

$$x = z e^{-\beta t} \quad (10.54)$$

Prvi i drugi izvod ovog izraza se jednostavno dobijaju i imaju sledeći oblik:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\beta t} \frac{dz}{dt} - \beta z e^{-\beta t} \quad (10.55)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-\beta t} \frac{d^2z}{dt^2} - 2\beta z e^{-\beta t} \frac{dz}{dt} + \beta^2 z e^{-\beta t} \quad (10.56)$$

Zamenom ovih izraza u diferencijalnu jednačinu, deobom sa  $e^{-\beta t}$  i sredjivanjem, dobijamo:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -(\omega_0^2 - \beta^2) \cdot z \quad (10.57)$$

Ovo je diferencijalna jednačina harmonijskih oscilacija po promenljivoj  $z$ , čija se frekvencija odmah prepoznaje:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \quad (10.58)$$

Da bi zadnja jednačina opisivala harmonijsko kretanje, ova frekvencija mora zadovoljavati uslov da je  $\omega^2 > 0$ , odnosno  $\omega_0^2 > \beta^2$ . U protivnom, kretanje je aperiodično.

Diferencijalna jednačina kretanja sa, dakle, svodi na:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 \cdot z \quad (10.59)$$

a njeno rešenje je poznatog oblika:

$$z = A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.60)$$

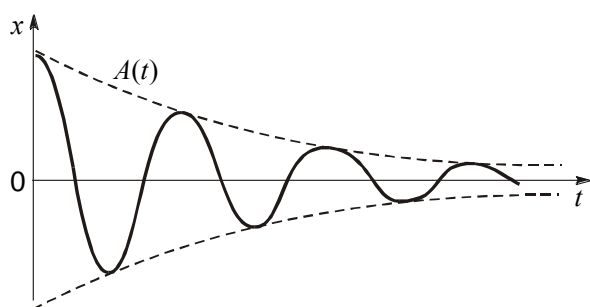
Kako se kretanje vrši po x-koordinati, mora se vratiti na nju uz pomoć ranije uvedene smene  $x = z \exp(-\beta t)$ , pa je konačno rešenje:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) = A(t) \cos(\omega t + \varphi) \quad (10.61)$$

Dakle, biće to oscilovanje čija se amplituda menja sa vremenom, odnosno smanjuje po eksponencijalnom zakonu oblika:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-(r/2m)t} \quad (10.62)$$

Očigledno je da ovakvo kretanje nije periodično, jer se vrednosti amplitude, brzine i ubrzanja ne ponavljaju sa vremenom.



Slika 10.15. Prigušene oscilacije

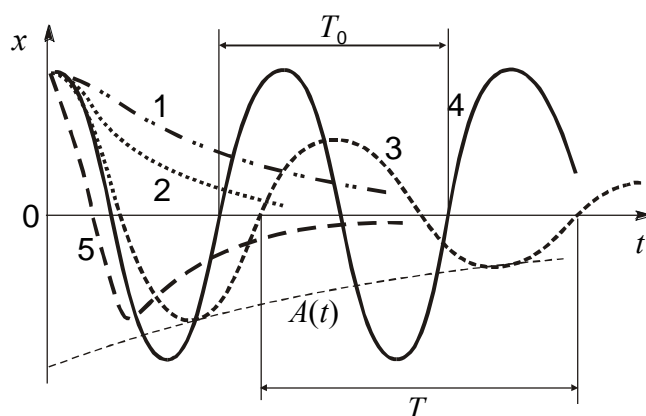
Grafički je ovakvo oscilovanje prikazano na slici 10.15. Ovakvo kretanje se naziva uslovno-periodično ili kvaziperiodično kretanje.

Veličina  $\omega$  uslovno se naziva kružna učestanost prigušenog oscilovanja i pokazuje broj prolaza oscilatora kroz ravnotežni položaj za vremenski period od  $2\pi$  sekundi.

Veličina  $T = 2\pi/\omega = 2\pi m / (km - r^2/4)^{1/2}$  naziva se period prigušenih oscilacija. Lako je videti, pošto je  $\omega < \omega_0$ , da je  $T > T_0$ , drugim rečima, period je veći od perioda bez prigušenja, odnosno oscilovanje je sporije.

Obzirom na odnos vrednosti  $k$  i  $r$ , razlikuju se sledeći slučajevi prigušenog oscilovanja.

1. Za  $r^2 > 4km$ ,  $T$  je kompleksan broj, pa je kretanje APERIODIČNO. Telo izvedeno iz ravnotežnog položaja utroši svu energiju na savladavanje otpora pre nego što se vrati u ravnotežni položaj  $x_0$ , dakle, nikada se ne vrati. Ovaj slučaj je na grafiku sa slike 10.16. prikazan krivama broj 1 i 5.
2. Za  $r^2 = 4km$ ,  $T$  teži beskonačnosti, sistem se vrati u ravnotežni položaj za jako dugo vreme. Ovo je KRITIČNO-APERIODIČNO oscilovanje i prikazano je na grafiku krivom 2.
3. Za  $r < 4km$ ,  $T > 0$  je konačan broj i ovo je pravo KVAZI-PERIODIČNO oscilovanje. Ovakvo oscilovanje je na grafiku prikazano krivom broj 3.
4. Kada  $r \rightarrow 0$ , prigušenje je zanemarljivo i oscilovanje je neprigušeno, odnosno pravo harmonijsko oscilovanje. Prikazano je na slici krivom broj 4.



Slika 10.16. Različite vrste prigušenog oscilovanja

FAKTOR ili STEPEN PRIGUŠENJA (amortizacije) je odnos veličina dve uzastopne amplitude prigušenog oscilovanja i iznosi:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_o \exp(-\beta t)}{A_o \exp(-\beta(t+T))} = e^{\beta T} = e^{(r/2m)T} \quad (10.63)$$

Prirodni logaritam stepena prigušenja označava se sa  $\delta$  i naziva se LOGARITAMSKI DEKREMENT:

$$\delta = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \ln(e^{\beta T}) = \beta T \quad (10.64)$$

Logaritamski dekrement se može eksperimentalno odrediti merenjem odnosa uzastopnih amplituda  $A_n$  i  $A_{n+1}$ , pa se na taj način može odredjivati koeficijent otpora sredine-r.

### 10.8. Prinudne oscilacije. Rezonancija.

Oscilovanje pod dejstvom spoljašnje sile naziva se prinudno oscilovanje. Ako je spoljašnju silu moguće predstaviti sinusnom ili kosinusnom funkcijom vremena onda je to prinudno harmonijsko kretanje.

Neka na telo deluje spoljašnja sila oblika:

$$F = F_o \cdot \cos(\Omega t) \quad (10.65)$$

gde je  $\Omega$  njena kružna učestanost. Tada na oscilator u opštem slučaju deluju tri sile i diferencijalna jednačina kretanja ima oblik

$$m\vec{a} = -kx\vec{i} - r\vec{v} + F_o \cos(\Omega t)\vec{i} \quad (10.66)$$

odnosno, pošto su sve sile kolinearne:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{F_o}{m} \cos(\Omega t) \quad (10.67)$$

Uvodjenjem sledećih smena:

$$\frac{k}{m} = \omega_o^2, \quad \frac{r}{m} = 2\beta \quad \text{i} \quad \frac{F_o}{m} = f_o \quad (10.68)$$

diferencijalna jednačina konačno dobija oblik:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_o^2 x - 2\beta \frac{dx}{dt} + f_o \cos(\Omega t) \quad (10.69)$$

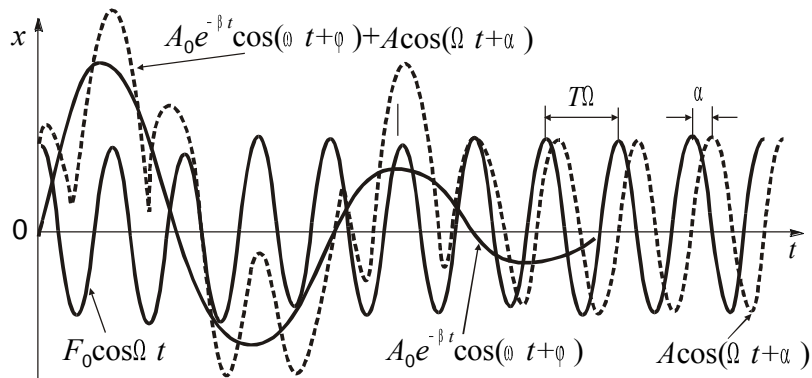
Ovo je nehomogena diferencijalna jednačina drugog reda (nehomogena jer sadrži član bez  $x$ ). Opšte rešenje jedne ovakve jednačine jednako je zbiru opšteg rešenja homogenog dela i parcijalno rešenja nehomogenog dela. Opšte rešenje homogenog dela je slobodno prigušeno oscilovanje, a parcijalno rešenje je stacionarno oscilovanje pod dejstvom prinudne sile, pa je:

$$x = A_o \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi) + A \cdot \cos(\Omega t + \alpha) \quad (10.70)$$

Prvi član ovog izraza eksponencijalno opada sa vremenom i relativno brzo se može zanemariti, pa preostaje stacionarno oscilovanje:

$$x = A \cdot \cos(\Omega t + \alpha) \quad (10.71)$$

sa kružnom frekvencom  $\Omega$ , koju ima i pobudna sila, i fazno pomerenom za fazni ugao  $\alpha$ , i to zbog inercije oscilatora. Razvoj ovakvog oscilovanja u vremenu prikazan je na slici 10.17.



Slika 10.17. Prinudne oscilacije

Dakle, posle dovoljno dugog vremena, oscilovanje se svodi samo na stacionarno prinudno oscilovanje. Da bi kretanje u stacionarnom režimu bilo određeno, neophodno je naći  $A$  i  $\alpha$  u zavisnosti od karakteristika samog oscilatora i prinudne sile. Da bi to učinili moramo početi od činjenice da navedeni oblik rešenja mora da zadovoljava diferencijalnu jednačinu kretanja u punom obliku. Zato treba naći prvi i drugi izvod pretpostavljenog rešenja:

$$\frac{dx}{dt} = -A \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t + \alpha) \quad (10.72)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t + \alpha) \quad (10.73)$$

Ove izraze treba uvrstiti u diferencijalnu jednačinu, čime se dobija sledeći izraz:

$$-A \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t + \alpha) = -\omega_0^2 \cdot A \cos(\Omega t + \alpha) + 2\beta A \Omega \sin(\Omega t + \alpha) + f_0 \cos(\Omega t) \quad (10.74)$$

Ako se ovde primene trigonometrijske jednakosti za složene argumente i izjednače svi članovi sa obe strane jednakosti koji se nalaze uz član  $\sin \Omega t$  i uz član  $\cos \Omega t$ , odnosno uz uslov da je jednačina zadovoljena za svako  $t$ , dobijaju se sledeće dve jednačine:

$$-A \cdot \Omega^2 \cdot \cos \alpha = -\omega_0^2 \cdot A \cos \alpha + 2\beta A \Omega \sin \alpha + f_0 \quad (10.75)$$

$$A \cdot \Omega \cdot \sin \alpha = \omega_0^2 \cdot A \sin \alpha + 2\beta A \Omega \cos \alpha \quad (10.76)$$

odnosno, grupisanjem članova ove jednačine dobijaju sledeći oblik:

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot \cos \alpha - 2\beta A \Omega \cdot \sin \alpha = f_0 \quad (10.77)$$

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot \sin \alpha + 2\beta A \Omega \cdot \cos \alpha = 0 \quad (10.78)$$

Iz ove dve jednačine možemo da odredimo nepoznate  $A$  i  $\alpha$ . Fazni pomak  $\alpha$  dobijamo jednostavno iz druge jednačine preko:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (10.79)$$

Amplitudu  $A$  možemo odrediti dizanjem obe prethodne jednačine na kvadrat i sabiranjem, sledi:

$$A^2\{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2\} = f_0^2 \quad (10.80)$$

Odavde konačno dobijamo:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \quad (10.81)$$

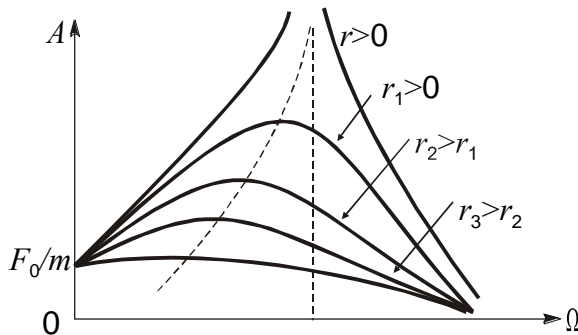
I konačno, jednačina prinudnog oscilovanja glasi:

$$x = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}} \cos\left\{\Omega t + \operatorname{arctg} \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right\} \quad (10.82)$$

Dakle, dobili smo zavisnost  $A$  i  $\alpha$  od karakteristika oscilatora, otporne sredine i prinudne sile:  $m$ ,  $k$ ,  $r$ ,  $F_0$  i  $\Omega$ , a time i jednačinu prinudnih oscilacija.

Prema izvedenoj jednačini, oscilator ima istu frekvencu  $\Omega$  kao i prinudna sila i ne zavisi od početnih uslova obzirom da jednačina važi posle prelaska u stacionarno oscilovanje, kada se početna faza  $\varphi$  može zanemariti.

Ako su  $F_0$ ,  $m$  i  $\beta$  konstantni, amplituda  $A$  prinudnih oscilacija zavisi od odnosa  $\omega_0$  i  $\Omega$ . Ta zavisnost je veoma karakteristična i prikazana je na slici 10.18. u funkciji učestanosti  $\Omega$ .



Slika 10.18. Zavisnost amplitude prinudnih oscilacija od odnosa  $\omega_0$  i  $\Omega$

Ako je  $\beta=0$  ( $r=0$ ) tada, prema izrazu za  $A$ , amplituda raste tako da pri  $\Omega=\omega_0$  postaje praktično beskonačno velika, a zatim se smanjuje. U graničnom slučaju sa porastom  $\Omega$  teži nuli.

Ako je  $\beta \neq 0$  postoji prigušenje i amplituda oscilovanja zavisi od vrednosti  $\beta$ . Maksimum amplitude će biti za minimum njenog imenioca, odnosno kada je:

$$\frac{d}{d\Omega} \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2} = 0 \quad (10.83)$$

Odavde je:

$$-4(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\beta^2\Omega^2 = 0 \quad (10.84)$$

odnosno:

$$\Omega = \Omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (10.85)$$

Za ovu vrednost  $\Omega$ , kružne učestanosti prinudne sile, amplituda ima maksimalnu vrednost koja iznosi:

$$A_{\text{max}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)}} \quad (10.86)$$

Vrednost  $\Omega = \Omega_{\text{rez}}$  se naziva rezonantna učestanost, a sama pojava odnosno porast amplitude na ovoj frekvenci naziva se **REZONANCIJA**.

Budući da energija oscilatora zavisi od njegove amplitude, može se postaviti pitanje otkuda potiče veliki iznos energije koju oscilator poseduje u rezonanciji. Odgovor je jednostavan, energija nastaje iz rada koji vrši spoljašnja sila. Radi ilustracije, kod obične ljuljaške velika amplituda odnosno energija se dobija akumuliranjem energije od svakog pojedinačnog zamaha.

Pojava rezonancije je česta u fizici a sreće se i u raznim oblastima tehnike: konstrukcija mostova, radiotehnika, akustika, optika, nuklearna fizika, itd.

## XI

### TALASNO KRETANJE

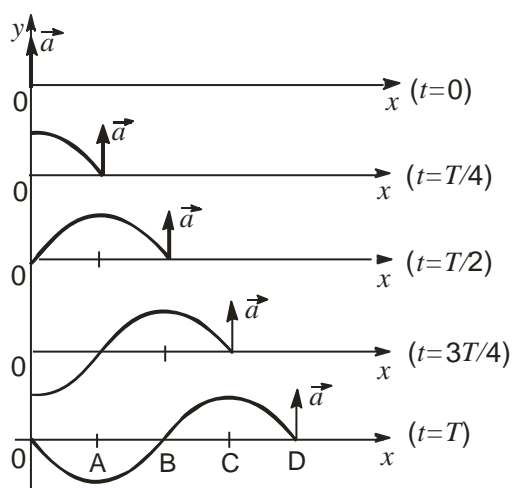
#### 11.1. Prostiranje oscilacija u elastičnoj sredini. Jednačina talasa.

Ako se tačka koja osciluje nalazi u elastičnoj sredini, čiji su svi delići međusobno povezani, kretanje tačke će se prenositi na susedne deliće. Energija oscilovanja se predaje okolnim česticama i izaziva njihovo oscilovanje. Dakle, susedne tačke će takodje početi da osciluju. Njihovo oscilovanje je u stvari prinudno oscilovanje, koje smo već sreli. Frekvencija tog oscilovanja je ista kao i pobudnog oscilovanja s tom razlikom da fazno kasne za njim.

Pojava širenja oscilovanja u nekoj elastičnoj (neprekidnoj) sredini naziva se **MEHANIČKI TALAS**. Primeri za to su kamen bačen u vodu, koji na površini izaziva talas, oscilovanje jednog kraja konopca ili gumenog creva izaziva talas, itd.

Pravac u kome se oscilovanje prenosi naziva se **pravac prostiranja talasa**. Pri tome se delići sredine koji osciluju ne premeštaju zajedno sa talasom, nego i dalje osciluju oko svojih ravnotežnih položaja. Ako delići osciluju po pravcu duž koga se prostire talas, takav talas se naziva **longitudinalan** ili uzdužan, a ako je oscilovanje delića oko ravnotežnih položaja normalno na pravac prostiranja talasa, takav talas se naziva **transverzalan** ili poprečan talas.

Pošto se u suštini radi o oscilovanju, očigledno je i talasno kretanje periodično, oscilovanje svake pojedinačne čestice će se ponoviti posle vremena  $T$ , koje predstavlja period pobudnog oscilovanja. Kako nastaje i prostire se talas prikazano je šemom na slici 11.1., za transverzalan talas (elastično gumeno crevo).

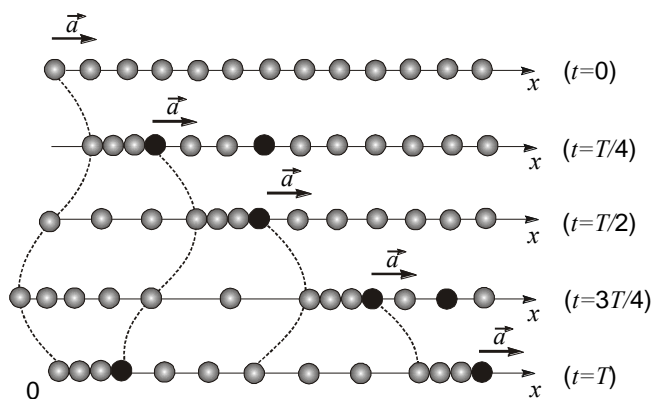


Slika 11.1. Prostiranje transverzalnog talasa

Na ovoj slici koordinata  $x$  predstavlja pravac prostiranja talasa, ordinatna osa je pravac oscilovanja delića oko ravnotežnog položaja, a  $t$  je parametar koji u stvari predstavlja vreme posmatranja stanja sredine. Sa  $\vec{a}$  je označeno ubrzanje pojedinih delića sredine u datom trenutku vremena. Treba uočiti da za vreme  $T$  tačka  $O$  izvrši jednu punu oscilaciju, a tačka  $D$ , kasneći za njom tek tada počinje da osciluje.

Sličan slučaj je i sa longitudinalnim talasom. Razlika je jedino u tome što je pravac oscilovanja pojedinih delića paralelan pravcu prostiranja talasa, pa se talas manifestuje u periodičnom zgušnjavanju i razredjenju sredine, što je šematski prikazano na slici 11.2. Oscilovanje se ovde vrši takodje u smeru  $x$ -ose, a sve ostale oznake su iste.

U tečnostima i gasovima, zbog slabe veze medju delićima, postoje samo longitudinalni talasi, dok u čvrstim telima postoje i transverzalni i longitudinalni.



Slika 11.2. Prostiranje longitudinalnog talasa

Za opisivanje ovakvog kretanja, talasa, za razliku od oscilovanja, u obzir se moraju uzeti tri veličine:

**y-elongacija** ili udaljenje posmatrane čestice od svog ravnotežnog položaja,

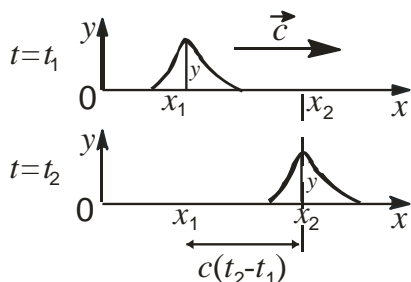
**x-položaj** posmatrane čestice u pravcu prostiranja talasa u odnosu na izvor pobude, i

**vreme-t.**

Dakle, traži se funkcionalna zavisnost:

$$y = f(x,t) \tag{11.1}$$

Tražena funkcija je funkcija dve nezavisno promenljive veličine. Da bi smo utvrdili njen oblik posmatrajmo transverzalni talas i to samo jedan njegov deo, tzv. kratkotrajni talasni impuls, kratak poremećaj koji se prostire kroz zategnutu žicu. Ovaj poremećaj će putovati kroz žicu, duž x-ose, nekom brzinom- $c$ , kao na slici 11.3. Ovu brzinu treba razlikovati od brzine oscilovanja,  $v=dy/dt$ , delića sredine oko svog ravnotežnog položaja, duž y-ose.



Slika 11.3. Prostiranje poremećaja

Ako je impuls formiran u trenutku  $t_1$ , do trenutka  $t_2$  će biti pomeren udesno za rastojanje  $c(t_2-t_1)$ . Amplituda impulsa u tom položaju i vremenskom trenutku biće ista kao u položaju  $x_1$  u trenutku  $t_1$ , dakle:

$$f(x_2,t_2) = f(x_1,t_1)$$

Pri tome je  $x_2=x_1+c(t_2-t_1)$ , odnosno:

$$x_2-c.t_2 = x_1-c.t_1 = x-c.t \tag{11.3}$$

Predpostavimo da je ovo i oblik argumenta tražene funkcije. Odavde takodje vidimo da postoji veza između  $x$  i  $t$  i da oni nisu potpuno nezavisni. Za argument oblika  $x-ct$  uslov (11.2) je zadovoljen, tj:

$$f(x_1-c.t_1) = f(x_2-c.t_2) \tag{11.4}$$

Takodje se može pokazati da će za prostiranje talasa ulevo brzinom  $c$  funkcija imati oblik  $y=f(x+ct)$ .

Sada treba naći i oblik funkcije, pod uslovom da argument funkcije znamo. Oblik funkcije se može izvesti ako se posmatra kretanje samo jedne čestice: tačke  $x=0$ . Neka je to prosto harmonijsko oscilovanje:

$$y = -Y\sin(\omega t) \tag{11.5}$$

jer smo pošli od činjenice da je talas samo prenošenje oscilovanja kroz materijalnu sredinu u kojoj čestice deluju jedna na drugu. Znak (-) se može pripisati fazi oscilovanja, ali se on uvodi radi pogodnosti daljeg izvodjenja.

Znači, funkcionalna zavisnost od  $t$  za  $x=0$  je SINUSNA. Takva treba da ostane i zavisnost za proizvoljno  $x$ , te će, dakle, biti:

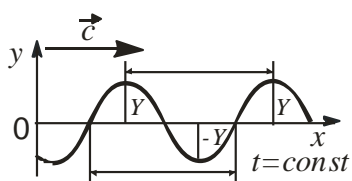
$$y = f(x-ct) = Y\sin\left[(x-ct)\frac{\omega}{c}\right] \tag{11.6}$$

Iz ove jednačine dobijamo gornji granični uslov za  $x=0$ , što sugerije da je ona dobra. Ako uvedemo oznaku  $k=\omega/c$ , tzv. konstantu prostiranja, za jednačinu prostiranja talasa dobijamo izraz:

$$y = Y \sin(kx - \omega t) \quad (11.7)$$

gde  $(kx - \omega t)$  predstavlja fazu talasa.

Ova jednačina, videli smo, za  $x=0$  (ili  $x=\text{const}$ ) opisuje oscilovanje jedne tačke. Šta se dobija ako se posmatra stanje sredine nakon vremena  $t$  od početka oscilovanja? U posmatranom trenutku dobijamo položaje čestica duž pravca prostiranja talasa, kao što je to prikazano na slici 11.4. Ova kriva predstavlja položaj svake čestice u odnosu na njen ravnotežni položaj u posmatranom trenutku vremena. Razlikujemo pozitivna i negativna udaljenja od ravnotežnog položaja, bregove i dolje.



Slika 11.4. Položaj čestica duž pravca prostiranja

Rastojanje dva brega, dve dolje ili bilo koje dve čestice sa istom elongacijom-udaljenjem od ravnotežnog položaja se naziva talasna dužina i obeležava sa  $\lambda$ . Dakle, to je rastojanje bilo koje dve tačke čija je fazna razlika  $2\pi$ , što je iz jednačine talasa ekvivalentno uslovu:

$$(kx_1 + k\lambda - \omega t) = \{(kx_1 - \omega t) + 2\pi\} \quad (11.8)$$

Odavde se dobija relacija  $k=2\pi/\lambda$ . Konstanta prostiranja  $k$ , koja se naziva i talasni broj, je obrnuto srazmerna talasnoj dužini. Kako je  $k$  uvedeno kao  $k=\omega/c$ , a znamo da je  $\omega=2\pi\nu=2\pi/T$ , gde je  $\omega$  kružna učestanost,  $\nu$  obična učestanost i  $T$  period oscilovanja, lako je izvesti vezu medju karakterističnim veličinama talasa:

$$c = \lambda \cdot \nu \quad (11.9)$$

Brzina prostiranja talasa  $c$  jednaka je proizvodu talasne dužine i učestanosti oscilovanja. Ova relacija se jednostavno dobija i iz činjenice da se talasni oblik pomeri za jednu talasnu dužinu za vreme jednog perioda:  $\lambda = cT = c/\nu$ , odakle je  $c = \lambda\nu$ .

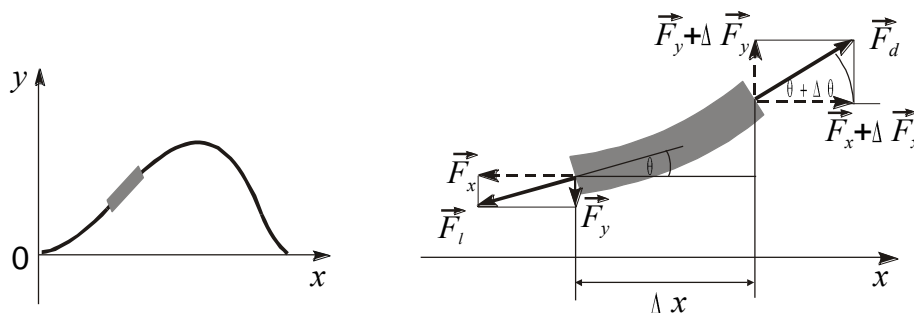
Jednačina talasa se, u zavisnosti od početne faze, može pisati i kao kosinusna funkcija, kao i u drugim pogodnim oblicima. Jednačina sinusnog talasa, koji se prostire ulevo, po negativnoj  $x$ -osi je:

$$y = Y \sin(kx + \omega t) \quad (11.10)$$

gde su sve oznake istog značenja kao i ranije.

## 11.2. Jednačine ravnih i sfernih talasa.

Priroda i jednačine ravnih talasa, koji se prostiru u jednom datom pravcu, su slične za razne sredine, a diferencijalnu jednačinu talasa razmotrićemo na primeru tzv. zategnute žice.



Slika 11.5. Prostiranje talasa kroz žicu

Uočimo jedan element zategnute žice, kao na slici 11.5., i razmotrimo njegovo kretanje za slučaj malih amplituda.

Zatezanje žice, odnosno sila zatezanja, na njenom levom kraju se može razložiti na komponente:

$$F_y = F \sin \theta \quad \text{i} \quad F_x = F \cos \theta \quad (11.11)$$

Za male amplitude, malo  $\theta$ , je  $\sin \theta = \tan \theta = dy/dx$ , pa se može pisati

$$F_y = F \frac{dy}{dx} \quad (11.12)$$

Slične relacije važe i za desnu stranu uočenog elementa žice. Posmatrajmo rezultantu sila zatezanja na elementu žice dužine  $\Delta x$ . Kako je i  $\theta + \Delta \theta$  malo, biće i  $F_x(x + \Delta x)$  približno jednako  $F_x(x)$ , tako da je rezultanta duž x-ose približno jednaka nuli. Rezultanta duž y-ose je  $\Delta F_y$  i može se pisati preko svog prvog izvoda kao:

$$\Delta F_y = \frac{dF_y}{dx} \Delta x \quad (11.13)$$

Iz izraza (11.12) za  $F_y$ , obzirom da je  $F$  približno konstantno, diferenciranjem se dobija:

$$\frac{dF_y}{dx} = F \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (11.14)$$

Ovo kombinovano sa izrazom (11.13) daje za silu zatezanja:

$$\Delta F_y = F \frac{d^2 y}{dx^2} \Delta x \quad (11.15)$$

Sa druge strane, masa tog dela žice jednaka je proizvodu linijske gustine  $m$  i dužine:  $\Delta m = \mu \Delta x$ . Na osnovu II Njutnovog zakona biće:

$$\Delta F_y = \Delta m \cdot a_y = \mu \Delta x \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (11.16)$$

gde je  $a_y$  ubrzanje uočenog dela žice. Izjednačavanjem ovog i izraza (11.15) za  $\Delta F_y$  i skraćivanjem sa  $\Delta x$ , konačno za jednačinu kretanja elementa žice dobijamo izraz:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{F}{\mu} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (11.17)$$

Funkcija  $y$  je očigledno funkcija dve promenljive  $y=f(x,t)$ , pa izvod po jednoj ili drugoj promenljivoj (pri čemu je druga odnosno prva promenljiva konstantna) treba shvatiti kao tzv. parcijalne izvode, a samu jednačinu kao "parcijalnu diferencijalnu jednačinu II reda", pa je treba pisati u obliku:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (11.18)$$

Za rešavanje ove jednačine postoje standardne matematičke metode, a rešenje se traži u obliku:

$$y = f.\left[x \pm \sqrt{\frac{F}{\mu}} t\right] \quad (11.19)$$

Za trenutak uporedimo ovaj oblik sa ranijim oblikom funkcije talasa. Vidimo da koren uz  $t$  nije ništa drugo do brzina prostiranja talasa, dakle brzina prostiranja talasa u ovom slučaju jednaka je kvadratnom korenu iz odnosa sile zatezanja žice i linijske gustine iste:  $c = \sqrt{F/\mu}$ .

Rešenja diferencijalne jednačine mogu da budu razne konkretne funkcije (sinusna, kosinusna, eksponencijalna, itd.). Uzmimo na primer oblik sinusne funkcije. Ako je parcijalno diferenciramo dvostruko po  $t$  i po  $x$  i odgovarajuće izvode zamenimo u parcijalnu diferencijalnu jednačinu, moramo dobiti identitet. Pokažimo to.

$$y = Y\sin(kx - \omega t) \quad (11.20)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 Y\sin(kx - \omega t) \quad (11.21)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 Y\sin(kx - \omega t) \quad (11.22)$$

Zamenom ovih izraza u (11.18), uz  $\omega^2 = (F/\mu)k^2$ , odnosno  $\omega = kc$ , dobija se identitet, što znači da je pretpostavljeno rešenje dobro.

Istaknimo ovde još jednom da je  $c$  funkcija od sile zatezanja i gustine žice, dakle zavisi od osobina sredine a ne od amplitude ili talasne dužine. Svi talasi u datoj sredini će se prostirati istom brzinom.

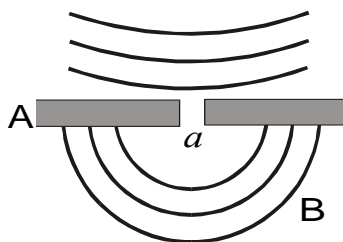
Sićna razmatranja se mogu izvesti za talase u štapu, fluidu, itd. Razlikovaće se samo u brzini koja je, kako ćemo videti kasnije, povezana sa gustinom i modulom elastičnosti sredine. Oblici talasnih jednačina su uvek isti.

Za razliku od ovih "ravnih" talasa koji se prostiru duž jedne prave ili jednog pravca, u elastičnoj sredini su mogući i drugi oblici talasa - na primer "sferni talasi". Kod njih se energija talasa prenosi na sve okolne tačke radijalno, pa se amplituda smanjuje, obrnuto proporcionalno rastojanju  $r$  - od izvora oscilovanja. Zavisnost elongacije od koordinate  $r$  i vremena  $t$  ima sledeći oblik:

$$y = \frac{A}{r} \cos\left\{\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right\} = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr) \quad \text{sa } k = \frac{\omega}{c} \quad (11.23)$$

Pvršina jednakih faza, u odredjenom trenutku vremena, odredjuje se jednačinom  $r = \text{const}$ , tj. predstavlja u ovom slučaju sferu radijusa  $r$ , zbog čega se ovi talasi nazivaju sferni talasi.

### 11.3. Hajgensov princip. Difrakcija talasa.

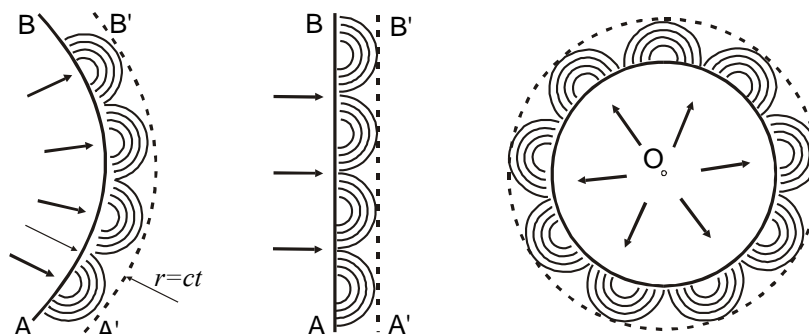


Slika 11.6. Hajgensov princip

Zamislamo da tačka od koje se šire talasi (centar oscilovanja) osciluje u neprekidnoj sredini. Oscilacije se šire od centra na sve strane. Geometrijsko mesto tačaka do kojih je u trenutku  $t$  doprlo oscilovanje naziva se talasni front. U slobodnoj sredini talasni front je sfera.

Postavlja se pitanje kako se talasi prostiru u neprekidnoj sredini i kakvog je oblika talasni front. Odgovor je formulisan u Hajgensovom principu, utvrdjenom još 1690. godine. Razmotrimo talasni front proizvoljnog oblika koji se prostire na površini vode. Postavimo na put talasa zaklon A sa otvorom a,

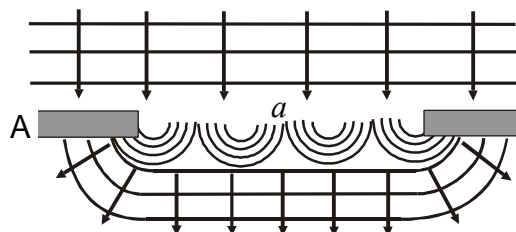
čije su dimenzije male u poredjenju sa  $\lambda$ . Kada talas stigne do A odbija se, a otvor na zaklonu postaje novi izvor talasa koji se šire iza zaklona. Pri tome će nezavisno od prvobitnog oblika talasa iza otvora da se širi polusferni talas B. Ovo navodi na sledeći zaključak koji predstavlja tzv. Hajgensov princip i koji glasi: ***Svaka tačka sredine do koje stigne talas postaje novi izvor talasa.***



Slika 11.7. Hajgensov princip za razne oblike talasa

Ako posmatramo talasni front AB i uočimo na njemu niz tačaka, kao na slici 11.7., prema Hajgensovom principu svaka od njih postaje novi izvor polusfernih talasa koji za vreme  $t$  predju put  $ct$ . Tako se formiranjem obvojnice tih novih talasa dobija novi talasni front A'B' čime se objašnjava prostiranje talasa kroz neprekidnu sredinu. Ovo važi za svaki oblik talasa, pa i za ravne i sferne, ilustrovane na slici 11.7. Strelice predstavljaju pravce prostiranja talasa, normalne su na talasni front i nazivaju se zraci.

**DIFRAKCIJA.** Poseban fenomen se događa kada otvor na prepreci ravnog talasa nije mali. Posmatrajmo slučaj nailaska ravnog talasa na prepreku sa otvorom većim od  $\lambda$ , slika 11.8. Primenjujući Hajgensov princip u konstrukciji novog talasnog fronta iza zaklona zaključićemo da on

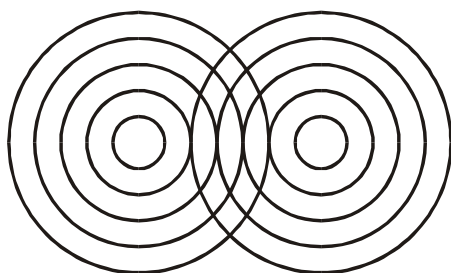


Slika 11.8. Pojava difrakcije

nije ni polusferni ni ravan. Novi talasni front se na krajevima savija, zraci menjaju svoj prvobitni pravac. Ovo savijanje talasnog fronta odnosno skretanje talasnih zraka se naziva DIFRAKCIJA talasa. Da bi se difrakcija potpunije opisala potrebno je "složiti" odnosno sabrati oscilacije koje dolaze iz različitih tačaka otvora uzimajući u obzir njihove fazne razlike. O tom slaganju se upravo govori u interferenciji talasa, koja sledi.

Zadržimo se još za čas na difrakciji. Vidimo da ona zavisi od veličine otvora i od talasne dužine, odnosno od odnosa  $a/\lambda$ . Ova pojava se, kao što ćemo kasnije videti, može koristiti za razlaganje ili razdvajanje talasa po talasnim dužinama.

#### 11.4. Interferencija talasa.



Slika 11.9. Prostiranje dva talasa kroz vodu

U nekoj sredini mogu da se šire talasi koji dolaze iz različitih centara oscilovanja. Ako se u vodu bace istovremeno dva kamena, širiće se dva talasa, prolaziti jedan kroz drugi i razilaziti u prvobitnom obliku koncentričnih krugova, slika 11.9.

Ako se dva različita sistema talasa, iz različitih izvora, poklapaju u nekoj oblasti, a zatim ponovo razilaze, svaki od njih će se dalje kretati kao da se nisu ni sreli. Ovaj princip nezavisnosti širenja talasa naziva se "**princip superpozicije**".

U oblasti preklapanja talasi se superponiraju jedan

na drugi, dolazi do njihovog "slaganja" odnosno INTERFERENCIJE talasa. Rezultat je pojava jačih ili slabijih amplituda oscilovanja u pojedinim tačkama sredine.

Posebno je interesantan slučaj kada izvori talasa imaju istu frekvencu, isti pravac oscilovanja i istu fazu ili stalnu faznu razliku. Za takve talase kažemo da su - **koherentni**.

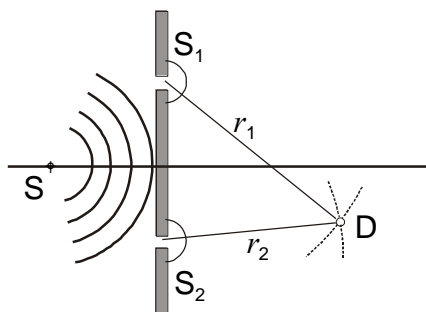
Koherentni izvori mogu se dobiti stvaranjem dva nova izvora  $S_1$  i  $S_2$  od jednog,  $S$ , na osnovu Hajgensovog principa kao što je to prikazano na slici 11.10. Neka su oscilacije izvora  $S_1$  i  $S_2$  date sa:

$$y_1 = A_0 \cos \omega t \quad \text{i} \quad y_2 = A_0 \cos \omega t$$

U tački D ćemo imati dva talasa odnosno oscilovanja data sa:

$$y_1 = A_1 \cos 2\pi \left( vt - \frac{r_1}{\lambda} \right) \quad (11.24)$$

$$y_2 = A_2 \cos 2\pi \left( vt - \frac{r_2}{\lambda} \right) \quad (11.25)$$



Slika 11.10. Slaganje koherentnih talasa

gde je  $v = \omega/2\pi$  frekvencija talasa, ista za oba talasa. Članovi  $r_1/\lambda$  i  $r_2/\lambda$  predstavljaju faze u posmatranoj tački, a fazna razlika i amplituda rezultujućeg talasa su dati sa:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \quad (11.26)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (11.27)$$

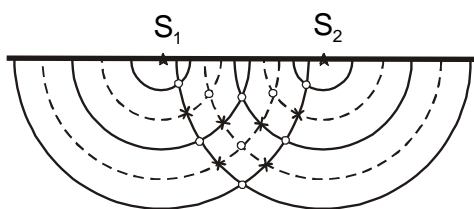
kao kod slaganja oscilovanja istog pravca i perioda oscilovanja. Kod koherentnih talasa, kao što vidimo, rezultujuća amplituda zavisi od fazne razlike. Ako je fazna razlika nula ili  $2k\pi$  amplituda ima maksimalnu vrednost jednaku  $A_1 + A_2$  ili  $2A_0$ , ako je  $A_1 = A_2 = A_0$ . Ako je fazna razlika jednaka  $(2k+1)\pi$ , rezultujuća amplituda je jednaka nuli. Dakle od fazne odnosno putne razlike talasa zavisi da li će u tački A biti minimum ili maksimum amplitude. Uslov za pojavu maksimalne amplitude je

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.28)$$

odakle je  $|r_2 - r_1| = k\lambda$ , odnosno maksimum amplitude dobija se u onim tačkama prostora u kojima je putna razlika talasa jednaka nuli ili celobrojnom umnošku talasnih dužina  $\lambda$ .

Uslov za pojavu minimalne amplitude je:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k+1)\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11.29)$$



Slika 11.11. Interferencija dva sferna talasa

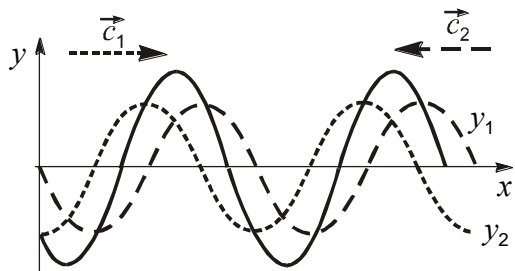
odnosno  $|r_2 - r_1| = (2k+1)\lambda/2$ . Minimum amplitude je u tačkama u kojima je putna razlika ovih talasa jednaka neparnom umnošku polovine talasne dužine. Za vrednosti između minimuma i maksimuma javljaju se srednji efekti jačanja ili slabljenja oscilovanja.

Za dva izvora  $S_1$  i  $S_2$  kao na slici 11.11., pune linije predstavljaju bregove, a isprekidane dolje oscilovanja.

U preseku dva brega ili dve dolje nastaju maksimumi oscilovanja (o), a u preseku brega i dolje javljaju se minimumi (x). Ova slika je stalna tj. vremenski nezavisna.

### 11.5. Stojeći talasi.

Poseban slučaj interferencije je slaganje dva talasa koji imaju iste amplitude, iste frekvence i talasne dužine, a suprotne smerove prostiranja. Najjednostavniji primer za postizanje navedenih uslova predstavljaju talasi odbijeni o prepreku ili granicu dveju neprekidnih sredina. Odbijeni talas u principu je koherentan sa upadnim, ali ima suprotan smer prostiranja. Takav jedan primer je prikazan šematski na slici 11.12.



Slika 11.12. Interferencija dva koherentna talasa u slučaju kada je  $\vec{c}_2 = -\vec{c}_1$

Neka uočeni talasi imaju početne faze jednake nuli i neka je koordinatni sistem izabran tako da talasi imaju iste početne faze. Tada će njihove jednačine glasiti:

$$y_1 = A \cos 2\pi \left( vt - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (11.30)$$

$$y_2 = A \cos 2\pi \left( vt + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (11.31)$$

respektivno za talas koji se prostire udesno i ulevo. Rezultujući talas, kao zbir ova dva, biće na osnovu trigonometrijske transformacije:

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cdot \cos \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \cos(2\pi vt) \quad (11.32)$$

Faktor  $\cos(2\pi vt)$  pokazuje da će rezultujući talas imati istu frekvencu kao i početni talasi. Faktor  $2A \cos(2\pi x/\lambda)$ , koji ne zavisi od t, predstavlja amplitudu  $A(x)$ . Ova amplituda zavisi samo od koordinate x i menja se od nule do 2A. Tačke sa  $A(x)=2A$  se nazivaju trbusi talasa, a tačke sa  $A(x)=0$  čvorovi talasa. Vizuelan utisak je da se takav talas ne prostire jer sadrži čvorove kao fiksirane tačke pa se zbog toga ova pojava naziva "**stojeći talas**".

U kojim tačkama se nalaze trbusi i čvorovi? Amplituda  $A(x)$  ima maksimum za  $|\cos(2\pi x/\lambda)|=1$ , odnosno  $2\pi x/\lambda = \pm k\pi$  sa  $k=0,1,2,3,\dots$ . Dakle, koordinate trbuha su u tačkama

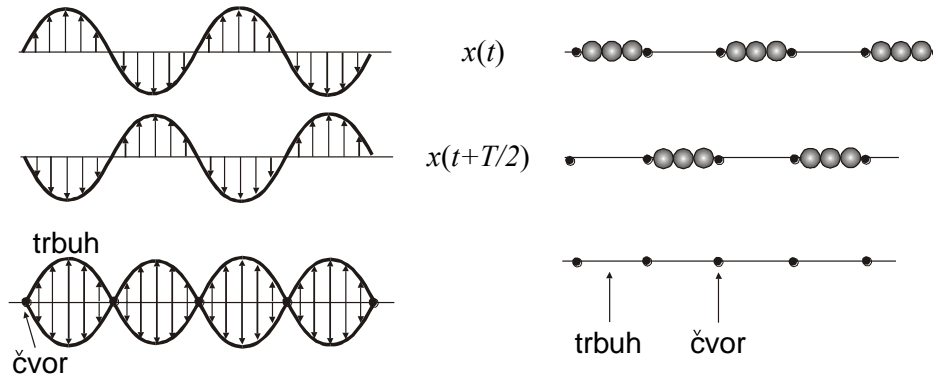
$$x = \pm k \frac{\lambda}{2} \quad k=0,1,2,3,\dots \quad (11.33)$$

Rastojanje izmedju dva uzastopna trbuha iznosi  $x_{k-1} - x_k = \lambda/2$ . Uslov za postojanje čvorova je da je  $\cos(2\pi x/\lambda)=0$ , odnosno u tačkama za koje je  $2\pi x/\lambda = \pm(2k+1)\pi/2$ . Koordinate čvorova su dakle:

$$x = \pm(2k+1) \frac{\lambda}{4} \quad k=0,1,2,3,\dots \quad (11.34)$$

Rastojanje izmedju dva čvora je takodje  $\lambda/2$ , a rastojanje od čvora do najbližeg trbuha je  $\lambda/4$ .

Čvorovi se, za razliku od trbuha, obrazuju tamo gde talasi imaju medjusobno suprotne faze. Kako izgleda stojeći talas u datom trenutku vremena prikazano je na slici 11.13.



Slika 11.13. Transverzalni i longitudinalni stojeći talasi

Stojeći talasi se obično obrazuju pri interferenciji talasa koji se prostire kroz neku sredinu i odbijenog talasa, kao što smo već istakli. Primeri za to su konopac pričvršćen na jednom kraju, vazdušni stub, vodeni stub, itd. Šta se događa na granici sredine u kojoj se talas prostire? Ako talas prelazi iz redje u gušću sredinu, na granici se javlja čvor stojećeg talasa (pričvršćeni kraj konopca, vazdušni stub ograničen površinom vode). Obrnuto, pri prelasku iz gušće u redju sredinu na granici se javlja trbuh talasa (slobodan kraj konopca).

U prvom slučaju, pri prelasku talasa iz redje u gušću sredinu na granici se faza menja u suprotnu, kažemo gubi se polutalas. U drugom slučaju faza se ne menja i rezultat sabiranja je trbuh. Ovo se može i dokazati u teoriji elastičnosti, primenom graničnih uslova na prostiranje talasa. Slaganje talasa je i jedan od uzroka zašto su talasi na vodi pri obali jači.

### 11.6. Doplerov efekat.

Razmotrimo kakav odnos postoji između talasa koje izvor emituje i onih koje prima detektor, ako se izvor i detektor kreću relativno jedan u odnosu na drugi. Neka izvor emituje talase frekvence  $\nu = 1/T$  i neka je frekvencija koju detektor registruje  $\nu'$ . Označimo brzinu kojom se izvor kreće sa  $u$ , a detektor sa  $v$ . Uzmimo da su brzine za sada kolinearne i neka je  $u$  pozitivno ako se izvor približava detektoru, a negativno ako se udaljava. Neka je  $v$  pozitivno ako se detektor približava izvoru, a u suprotnom negativno. Razmotrimo posebno četiri moguće kombinacije kretanja.

**I SLUČAJ:**  $u=0, v=0$ . Izvor A i detektor B miruju. U tom slučaju su i brzina prostiranja talasa i talasna dužina konstantne, pa je:

$$\nu' = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{cT} = \frac{1}{T} = \nu \quad (11.35)$$

dakle, detektor prima istu frekvenciju, što je i za očekivati.

**II SLUČAJ:**  $u=0, v \neq 0$ . Izvor miruje, a detektor se kreće. Predpostavimo prvo da je a)  $v > 0$ . Brzina kojom talas dolazi do detektora je  $c+v$ , pa će detektor primiti veću frekvenciju:

$$\nu' = \frac{c+v}{\lambda} = \frac{c+v}{cT} = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\nu \quad \nu' > \nu \quad (11.36)$$

Za slučaj b)  $v < 0$ , na sličan način se dobija izraz  $\nu' = (1 - v/c)\nu$ . Dakle, u ovom slučaju frekvencija je manja. Pojava promenjene frekvencije koju detektor registruje pri svom kretanju ili kretanju izvora naziva se **Doplerov efekat**.

U posebnom slučaju, ako bi bilo  $v=c$ , detektor se udaljava zajedno sa talasom i ne prima ni jednu oscilaciju,  $\nu'=0$ . Ako bi bilo  $v > c$ , talasi bi zaostajali za detektorom i on bi registrovao da mu talasi dolaze iz suprotnog smera, u susret.

**III SLUČAJ:**  $u \neq 0$ ,  $v = 0$ . Izvor se kreće brzinom  $u$ , u odnosu na sredinu, a detektor miruje. Neka je prvo a)  $u > 0$ . Pošto se izvor približava detektoru, u trenutku prijema talasa izvor je bliži detektoru i talasna dužina je prividno skraćena, za iznos  $uT$ , pa je:

$$\lambda' = \lambda - uT = cT - uT = (c - u)T \quad (11.37)$$

i

$$v' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{(c - u)T} = \frac{c}{(c - u)} v \quad (11.38)$$

dakle, frekvencija je u ovom slučaju opet povećana. Za slučaj b)  $u < 0$  se talasna dužina povećava, tako da je frekvencija manja,  $c/(c+u)$  puta.

**IV SLUČAJ:**  $u \neq 0$ ,  $v \neq 0$ . Ovaj slučaj je kombinacija prethodna dva. Usled kretanja detektora menja se prividna brzina talasa, a usled kretanja izvora talasna dužina registrovanih talasa, tako da je rezultujući efekat dat sledećim izrazom:

$$v' = \frac{c \pm v}{cT \mp uT} = \frac{c \pm v}{c \mp u} \frac{1}{T} = \frac{c \pm v}{c \mp u} v \quad (11.39)$$

Ukoliko brzine  $u$  i  $v$  nisu upravljene duž rastojanja izvor-detektor u razmatranje se uzimaju njihove komponente odnosno projekcije na to rastojanje.

Doplerov efekat se može uočiti pri prolasku automobila ili voza sa uključenom sirenom pored nepokretnog posmatrača. Frekvencija oscilovanja određuje visinu tona, veća frekvencija predstavlja viši ton. Dakle, posmatrač registruje nižu frekvenciju pri dolasku, a višu pri udaljavanju vozila.

### 11.7. Energija talasa. Gustina energije.

Zamislimo talas, koji se prostire kroz sredinu gustine  $\rho$  duž  $x$ -ose, čija je jedenačina:

$$y = A \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} \quad (11.40)$$

Energija sredine kroz koju se talas prostire sastoji se od kinetičke energije,  $E_k$ , delića sredine i potencijalne energije,  $E_p$ . Neka je zapremina uočenog dela sredine  $\tau$ , ( $\tau \ll \lambda^3$ ), njegova masa  $m$ , i trenutna brzina oscilovanja  $v$ .

Iz izraza za brzinu uočenog delića,  $v = dy/dt$ , i veze  $m = \rho\tau$ , zamenom u izraz za kinetičku energiju, dobijamo:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \tau A^2 \omega^2 \sin^2 \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (11.41)$$

Potencijalna energija elastične sredine podvrgnute relativnoj deformaciji  $\Delta L/L$  je, prema relaciji (9.22):

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{ES}{L} \Delta L^2 \quad (11.42)$$

gde je  $S$  površina bazisa, a  $L$  dužina uočene zapremine  $\tau$ . Uvodeći umesto Young-ovog modula  $E$ , koeficijent elastičnosti  $\alpha = 1/E$  i množeći gornji izraz sa  $L/L$ , biće:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\Delta L}{L} \right)^2 L \cdot S \quad (11.43)$$

Ovde je  $LS = \tau$  zapremina deformisanog tela, dela sredine, a  $\Delta L/L$  se može izraziti kao  $dy/dx$ . Tada je:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \tau \quad (11.44)$$

Kako je iz jednačine talasa  $dy/dx = (A\omega/c)\sin\omega(t-x/c)$ , biće:

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha} A^2 \omega^2 \frac{\tau}{c^2} \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (11.45)$$

Poredeći (11.41) i (11.45) vidimo da se  $E_k$  i  $E_p$  menjaju u istoj fazi, istovremeno dostižu maksimalne odnosno minimalne vrednosti. Ovo je bitna razlika od energije oscilovanja izolovanog tela, gde je pri maksimalnoj vrednosti  $E_k$  bilo minimalno  $E_p$ , i obrnuto.

Dalje, pri oscilovanju izolovane tačke je ukupna energija te tačke konstantna. Kod talasa, pak, za jedan element sredine energija nije konstantna. Energija se pri tom prenosi sa uočenog na susedne delove sredine.

Sabiranjem  $E_k$  i  $E_p$  dobijamo ukupnu energiju talasa:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\alpha c^2} + \rho \right) A^2 \omega^2 \tau \cdot \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (11.46)$$

Pošto je brzina širenja talasa u elastičnoj sredini data izrazom

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha \rho}} \quad (11.47)$$

konačno za energiju talasa dobijamo izraz:

$$E = \rho A^2 \omega^2 \tau \cdot \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (11.48)$$

Dakle, energija dela elastične sredine kroz koju se prostire talas proporcionalna je kvadratu amplitude oscilovanja, kvadratu frekvence talasa i gustini sredine, i "teče sa talasom". Naglasimo takodje da je zbog kvadrata sinusne funkcije frekvencija promene energije u uočenom delu sredine dva puta veća od frekvence talasa.

**Gustina energije**,  $\varepsilon$ , definiše se kao odnos energije uočenog dela sredine i njegove zapremine:

$$\varepsilon = \frac{E}{\tau} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right] \quad (11.49)$$

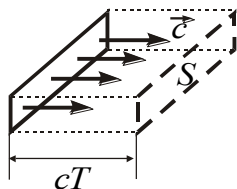
Dakle, gustina energije je promenljiva kao i sama energija. Posle polovine perioda gustina energije ponovo dobija prvobitnu vrednost. Pošto je srednja vrednost kvadrata sinusa sa vremenom jednaka  $1/2$ , za jedan period, to je:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (11.50)$$

Kako energija nije lokalizovana u datom delu sredine, već se prenosi zajedno sa prostiranjem talasa kroz sredinu, to se može uvesti pojam **fluksa energije**. Fluks energije je energija koja prodje kroz uočenu površinu sredine u jedinici vremena. Kroz površinu  $S$  će za vreme  $T$ , krećući se brzinom prostiranja talasa  $c$ , proteći energija

$$E = \langle \varepsilon \rangle \cdot c \cdot T \cdot S \quad (11.51)$$

Odavde će srednji fluks, za vreme  $T$ , biti



Slika 11.14. Fluks energije

$$\langle P \rangle = \langle \varepsilon \rangle \cdot c \cdot S = (1/2) \rho A^2 \omega^2 c \cdot S \quad (11.52)$$

Dakle srednji fluks energije kroz površinu normalnu na pravac prostiranja talasa srazmeran je proizvodu srednje gustine energije, brzine  $c$  i površine  $S$ , slika 10.14.

**Gustina fluksa energije** je fluks po jedinici površine, to jest

$$\langle U \rangle = \langle \varepsilon \rangle \cdot c \quad (11.53)$$

Pošto je brzina talasa ustvari vektorska veličina i  $\langle U \rangle$  se može smatrati vektorom i naziva se po ruskom naučniku Umovljejev vektor.

U slučaju sfernih talasa može se pokazati da je srednja gustina fluksa energije obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja od izvora talasa

$$\langle U \rangle = \frac{\langle P \rangle}{S} = \frac{\langle P \rangle}{4\pi R^2} \propto \frac{1}{R^2} \quad (11.54)$$

Ovo je i bilo logično očekivati pošto energija zavisi od kvadrata amplitude  $A$ , a ova se kod sfernih talasa menja kao  $1/R$ , sa udaljenjem od izvora.

Sve ovo važi u idealizovanom slučaju. U realnosti se deo energije apsorbuje pretvarajući se u unutrašnju energiju sredine (toplotu), zbog postojanja unutrašnjeg trenja sredine (Zato su morski talasi topli!).

Gubitak energije se manifestuje preko smanjenja amplitude talasa. Ako to smanjenje izrazimo kao  $-dA=rAdx$ , sledi da je amplituda  $A = A_0 e^{-rx}$ , odnosno gustina energije  $\varepsilon(x) = \varepsilon_0 e^{-2rx} = \varepsilon_0 e^{-kx}$  pri čemu se  $k=2r$  naziva koeficijentom apsorpcije talasa.

### 11.8. Brzina prostiranja talasa u elastičnoj sredini.

Sa brzinom prostiranja talasa smo se već sreli, videli smo njenu vezu sa frekvencijom i talasnom dužinom. U slučaju zategnute žice videli smo da ona zavisi od osobina sredine, gustine ( $\mu=m/l$ ), i sile zatezanja žice ( $T$ ):

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (11.55)$$

U opštem slučaju pri prostiranju talasa kroz elastičnu sredinu njihova brzina zavisi od elastičnih i mehaničkih osobina sredine.

Brzina širenja longitudinalnih talasa obrnuto je srazmerna kvadratnom korenu iz koeficijenta elastičnosti sredine  $\alpha$  i njene gustine  $r$ :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\alpha\rho}}, \quad \text{odnosno} \quad c = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \quad (11.56)$$

gde je  $E_y$  Young-ov modul elastičnosti sredine.

Brzina širenja transferzalnih talasa zavisi od modula smicanja  $N$ :

$$c = \sqrt{\frac{N}{\rho}} \quad (11.57)$$

Brzina prostiranja talasa  $c$  predstavlja brzinu kojom se širi površina istih faza talasa, te se naziva i faznom brzinom talasa,  $c=x/t$  ili  $c=r/t$ . Treba stalno praviti razliku između fazne brzine i brzine oscilovanja pojedinog delića sredine oko svog ravnotežnog položaja,  $v=dy/dt$ .

Fizičar Rejli je pokazao da pored fazne brzine talasa ima smisla uvesti i pojam **grupne brzine**. Ova se odnosi na slučaj prostiranja "složenih" talasa koji nisu sinusoidnog karaktera, već su superpozicija više harmonijskih talasa, i to u sredini gde fazna brzina zavisi od frekvence.

Ukoliko je talas složenijeg oblika po Furijeovoj teoremi se može razložiti na niz harmonijskih talasa različitih frekvencija. Tada govorimo praktično o prostiranju grupe talasa. Grupna brzina je data sa

$$u = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (11.58)$$

i može biti veća ili manja od  $c$  u zavisnosti od znaka  $dc/d\lambda$ . Ova brzina ima specifičan karakter i nije u suprotnosti sa teorijom relativnosti.

Pojmovi vezani za talasne grupe ili talasne pakete su od posebnog značaja za kurseve kvantne fizike.

### 11.9. Zvučni talasi i njihovo prostiranje. Interferencija zvuka.

U vazduhu, kao i u svakom drugom gasu, odnosno fluidu, mehaničko oscilovanje se prenosi u vidu longitudinalnih talasa. Ovi talasi, ukoliko su im frekvence u intervalu od 20–20.000 Hz mogu da izazovu specifičan osećaj u ljudskom uhu koji se naziva zvukom.

Ukoliko je frekvencija talasa ispod 20 Hz, takvi talasi se nazivaju infrazvuk, a talasi sa frekvencijom iznad 20.000 Hz se nazivaju ultrazvuk.

Brzina prostiranja zvučnih oscilacija je, prema prethodnom izlaganju, data sa:

$$c = \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \quad (11.59)$$

Ovde je  $E_y$  Jung-ov modul i po definiciji predstavlja odnos napona i relativne deformacije:  $E_y = \sigma/(\Delta L/L)$ . Za stub gasa je  $\sigma$  u stvari promena pritiska  $\Delta P$ , a relativna deformacija suba vazduha se potpunije izražava zapreminskom deformacijom  $\Delta V/V$ , pa se može pisati:  $E_y = \Delta P/(\Delta V/V)$ .

Ako predjemo na beskonačno male veličine, male promene  $\Delta P$  i  $\Delta V$  zamenimo sa  $dP$  i  $dV$ , a pri tome se zbog obrnute zavisnosti  $P$  i  $V$  uvede i znak minus, sledi:  $E_y = -VdP/dV$ . Fizičke promene parametara sredine su pri prostiranju zvuka veoma brze zbog relativno visokih frekvencija, tako da se mogu smatrati adijabatskim, pa za gas važi Poasonova formula za opisivanje stanja:

$$PV^\gamma = \text{const}, \quad \text{pri čemu je } \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (11.60)$$

Ovde su  $C_p$  i  $C_v$  specifične toplote gasa pri stalnom pritisku odnosno zapremini. Diferenciranjem Poasonove formule i zamenom u izraz za  $E_y$  dobićemo:

$$V^\gamma dP + \gamma V^{\gamma-1} P dV = 0, \quad \frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V}, \quad \text{i} \quad E_y = \gamma P \quad (11.61)$$

Na osnovu toga, za brzinu zvuka dobijamo sledeći izraz:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (11.62)$$

Ako gustinu izrazimo iz jednačine gasnog stanja:  $PV = PM/\rho = RT$ , gde je  $P$ -pritisak,  $T$ -temperatura,  $M$ -molekulska masa,  $\rho$ -gustina i  $R$ -univerzalna gasna konstanta, dobićemo  $\rho = PM/RT$ . Konačno za brzinu zvuka u gasovima dobijamo izraz:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (11.63)$$

Dakle, brzina zvuka proporcionalna je kvadratnom korenu iz temperature i ne zavisi od pritiska gasa. Zavisnost od molekulske mase gasa je takodje pokazana. Navešćemo radi ilustracije nekoliko primera brzina zvuka u zavisnosti od molekulske mase gasa, na  $0^\circ \text{C}$ :

Molekulska masa (ajm)	gas	brzina zvuka $c$ (m/s)
28	vazduh	331 m/s
32	kiseonik	315
2	vodonik	1261
44	ugljendioksid	258

Napomenimo da brzina zvuka zavisi još i od vlažnosti, vetra, nehomogenosti atmosfere, itd. Iz brzine  $c$  se može eksperimentalno odrediti  $C_p/C_v$  gasa.

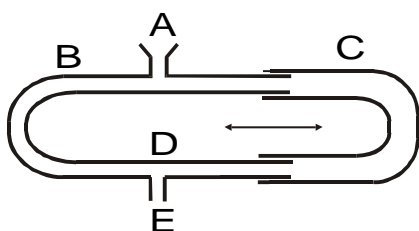
Prostiranje zvuka, kao longitudinalni talas, izaziva periodično sabijanje i razredjenje vazduha. Najveća razlika pritisaka (od normalnog) naziva se amplituda zvuka, a izražava se u barima.

Srednja vrednost promene pritiska je nula, medjutim uvek se javljaju izvesne nelinearne oscilacije viših redova, pa zvučni talas ipak vrši određeni pritisak na preprekama. Po P.N.Lebedevu pritisak na prepreku pri odbijanju zvuka od nje se može izraziti kao:

$$P = \frac{1}{2} \langle \varepsilon \rangle (\gamma + 1) \quad (11.64)$$

gde je  $\langle \varepsilon \rangle$  srednja gustina energije stojećeg talasa oko prepreke, a  $\gamma = C_p/C_v$ .

Sve ono što je rečeno o interferenciji talasa važi i za zvuk. Interferencija zvučnih talasa, kao i određivanje njihove talasne dužine može se posmatrati uz pomoć Kvinkeove cevi, slika 11.15. Sa  $A$  je označen izvor zvuka, sa  $E$  detektor. Talas se u cevi deli na dva dela, jedan se prostire granom  $ABD$ , a drugi  $ACD$  i spajaju se u tački  $D$ , odnosno u detektoru. U zavisnosti od putne razlike talasa u ove dve grane:  $ABD - ACD = d$  u detektoru,  $E$ , će se zvuk pojačavati ili oslabiti. Ako je  $d = (2k)\lambda/2$ , gde je  $k$  ceo broj,  $k=0,1,2,\dots$ , u tački  $E$  zvuk će biti pojačan. Kada je medjutim  $d = (2k+1)\lambda/2$ , zvuk će biti slabiji nego u izvoru.



Slika 11.15. Kvinke-ova cev

Pomoću ovog uređaja može da se meri talasna dužina zvuka i to tzv. interferencionim metodom. Pomeraj kraka C između dva uzastopna pojačanja zvuka predstavlja polovinu talasne dužine.

Na ovaj način se u stvari mere srednje talasne dužine zvuka, obzirom da je on obično sastavljen iz talasa sa više različitih frekvencija, odnosno talasnih dužina. Tako je za istu sredinu, na primer za vazduh pri brzini zvuka od  $c=331$  m/s, prema vezi  $c=\lambda\nu$ , talasna dužina za komponente različitih frekvencija

sledeća:

$\nu = 20$ Hz	$\lambda = 331/20$ m = 16.5 m
500 Hz	66.2 cm
20.000 Hz	1.65 cm

Odredjivanje talasne dužine, pa čak i vizuelna predstava o talasima, moguća je korišćenjem Kuntove cevi, prikazane na slici 11.16. U vodoravnoj staklenoj cevi je dužinu vazdušnog stuba moguće menjati pomoću klipa U. Ako se stub pobudi zvučnom viljuškom pri određenoj dužini će se uspostaviti stojeći talas nakon odbijanja o drugi kraj cevi. Sitne čestice plute u horizontalnoj cevi će dati sliku stojećih talasa.



Slika 11.15. Kuntova cev

Sposobnost čoveka za ocenjivanje pravca zvuka zasniva se na binauralnom efektu-sposobnosti zvučnih receptora i nervnog sistema da registruju fazne razlike dospelog zvuka u oba uha (stereo).

### 11.10. Subjektivne karakteristike zvuka. Infrazvuk.

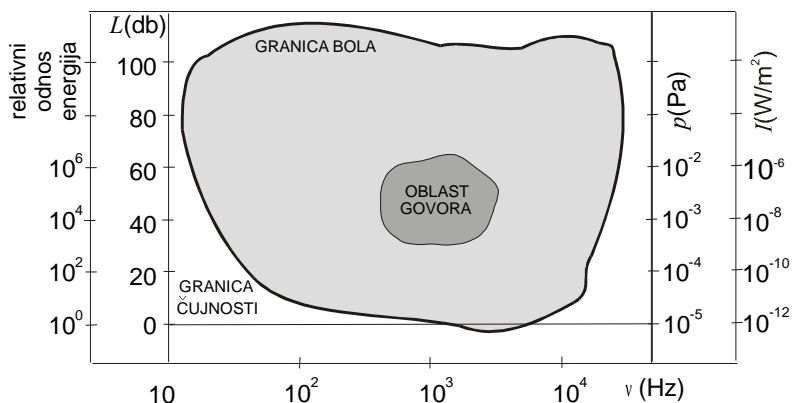
Pri subjektivnom osećaju zvuka razlikuju se tri njegove osobine: visina, boja i jačina.

**Visina zvuka** određena je njegovom frekvencom, viši zvukovi odgovaraju talasima sa većom frekvencom, i obrnuto.

**Boja** je određena karakterom oscilovanja, obično zvuk nije harmonijski već složen. Složenost talasa određuje boju zvuka.

**Jačina** je određena količinom energije koju zvučni talasi prenesu u jedinici vremena kroz jediničnu površinu normalno na pravac prostiranja. Ta energija, odnosno jačina, kao što smo već videli, zavisi od kvadrata amplitude i kvadrata frekvencije, dakle zavisi i od visine zvuka.

Ljudsko uho međutim nije podjednako osetljivo na sve frekvencije. Na slici 11.17. predstavljena je zavisnost pritiska i energije zvuka, u tzv. oblasti čujnosti, u zavisnosti od frekvencije zvuka.



Slika 11.17. Zavisnost raznih karakteristika zvuka od frekvence

Subjektivna jačina ne može tačno da se meri kvantitativno. Ocena jačine zvuka vrši se na osnovu Veber-Fehnerovog psihofizičkog zakona, po kome je promena intenziteta proporcionalna logaritmu količnika energije nadražaja i energije na pragu čujnosti. Na osnovu toga ustanovljena je skala u kojoj se prag čujnosti uzima za nulti nivo- $I_0$ , i to na frekvenci od 1000 Hz. Subjektivna jačina zvuka data je pri tom sa:

$$L = k \log(I/I_0) \quad (11.65)$$

Za  $k=1$  ova formula za jedinicu jačine zvuka ima 1 Bel, a za  $k=10$ , jedinica je decibel. Češće se koristi decibel. Radi ilustracije u tabeli su prikazane neke karakteristične vrednosti jačine zvuka.

O P I S	L(decibela)	$I(10^{-3} \text{ W/m}^2)$	$P(10^5 \text{ Pa})$
tihi šapat	30	$10^{-6}$	$6.4 \times 10^{-3}$
koraci	40	$10^{-5}$	$2 \times 10^{-2}$
glasan govor	70	$10^{-2}$	0.4
prometna ulica	90	1	6.4
orkestar fortisimo	100	10	20
avionski motor na 3 m	130	$10^{+4}$	1000

Pri tom su energije zvuka relativno male. Govor 2000 ljudi 1,5 časova mogao bi tek da izazove ključanje jedne čaše vode.

**INFRAZVUK** je, kao što je već rečeno, mehanički talas frekvence ispod 20 Hz. Prirodni izvori ovakvog zvuka su: zemljotresi, erupcije vulkana, oluje, udar morskih talasa o hridi, itd. Veštački izvori bi bili: oscilacije u turbinama, SUS motorima, saobraćajnim sredstvima u kretanju, topionicama metala, itd.

Pri prolasku infrazvuka kroz sredinu koeficijent apsorpcije ( $k=2\gamma$ ) je mali, sposobnost prenošenja na veće daljine je izražena.

Rasejanje ovih talasa na nehomogenostima sredine je takodje veoma malo zbog velikih talasnih dužina u poredjenju sa veličinom lokalnih nehomogenosti.

Iz navedenih razloga infrazvuk se može prenositi do na desetine hiljada kilometara. (Ovde treba podvući analogiju sa elektromagnetnim radiotalasima velikih talasnih dužina-malih učestanosti koji se prostiru na velika udaljenja). Sa druge strane kako brzina zvuka ne zavisi od frekvence, brzina infrazvuka je velika u poredjenju sa brzinom širenja nepogoda u smislu prirodnih izvora infrazvuka, odnosno sa brzinom vetra, oluje ili druge nepogode koja emituje infrazvuk i time upozorava na svoje prisustvo.

Infrazvuk niskih frekvencija detektuje se u vazduhu osetljivim barometrima, a zvuk "viših" frekvencija se detektuje korišćenjem mikrofona velikih dimenzija, u vidu radara.

### 11.11. Ultrazvuk i primena.

ULTRAZVUK predstavlja mehaničke talase sa frekvencijom većom od 20.000 Hz, odnosno 20 kHz. Ovo istovremeno podrazumeva veoma male talasne dužine.

Zbog ogromnih frekvenci zvučni izvori ultrazvuka moraju imati male dimenzije - slobodni oscilatori moraju biti manji od 3 mm. Pošto se ovakve oscilacije brzo prigušuju, njihovi izvori moraju biti prinudni oscilatori. Glavni izvori ultrazvuka su:

- obrnuti piezoelektrični efekat,
- magnetostrikcija (i elektrostrikcija).

**Obrnuti piezoelektrični efekat** je pojava da se pločica, izrezana na odredjen način iz piezokristala (kvarc- $\text{SiO}_2$ , amonijum-dihidrogenfosfat- $\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$  i dr.) pod dejstvom promenljivog električnog polja deformiše - rasteže i skuplja. Na taj način se električno oscilovanje pretvara u mehaničko, a ovo predstavlja izvor ultrazvuka. (Direktan piezoelektrični efekat je pojava naelektrisanja

na kristalu koji se mehanički deformiše). Najveća amplituda ovako nastalih talasa se postiže kada se uspostavi rezonancija između frekvence električnog polja i sopstvene frekvence kristala. Na ovaj način se postižu frekvence do 50 MHz, sa gustinom fluksa energije (koji je srazmeran kvadratu učestanosti) i do  $0,5 \text{ kW/cm}^2$ . Ovo je pola miliona puta veće od jačine zvuka velikog orkestra ( $10^{-3} \text{ W/cm}^2$ ).

**Magnetostrikcija** je pojava da štapići od magnetnog materijala (Co, Ni, Fe i njihove legure) menjaju linearne dimenzije pod dejstvom spoljašnjeg magnetnog polja usmerenog duž njihove ose. U rezonanci sa promenljivim magnetnim poljem na taj način se dobija ultrazvuk frekvence do 0,2 MHz.

Takodje neke životinje mogu da proizvode ultrazvuk (delfin, slepi miš).

Za praćenje prostiranja, spektralnu analizu i merenje intenziteta ultrazvučnih talasa primenjuju se piezoelektrični i magnetostrikcioni pretvarači. Prvi se zasniva na direktnom piezoelektričnom efektu: pri sabijanju ili rastezanju piezoelektrične kristalne

pločice ona se polarizuje-na njenim stranama nastaje potencijalna razlika srazmerna deformacionom pritisku. Ovaj promenljivi električni potencijal se registruje prijemnim uređajem i tako se mere frekvencija i amplituda ultrazvučnih talasa. Merenje intenziteta ultrazvuka se pored niza drugih metoda najuspešnije izvodi na osnovu zagrevanja smole koja apsorbira energiju ultrazvuka.

Brzina ultrazvuka zavisi od elastičnih svojstava sredine, kao i kod ostalih zvučnih talasa. Medjutim zbog male talasne dužine ( $\lambda < 17 \text{ mm}$ ), ovi talasi su specifični. Ravan ultrazvučni talas se prostire u elastičnoj sredini u vidu uskih usmerenih snopova koji se nazivaju ultrazvučni "zraci". Njihovo odbijanje i prelamanje se odvija po zakonima geometrijske optike, pa se za njih često koriste i uređaji kao što su ogledala, sočiva i prizme. Ovi uređaji se prave od materijala koji imaju pogodan akustični otpor odnosno određenu vrednost proizvoda gustine i frekvencije zvuka  $\rho v$ .

Zbog visoke frekvencije ultrazvuk raspolaže velikom gustinom fluksa energije. Intenzitet ultrazvuka je takodje mnogo veći nego kod ostalih zvučnih talasa i iznosi od  $10-1000 \text{ W/cm}^2$ . Stoga se ultrazvuk koristi u radu mikrotalasnih pećnica.

Pošto je koeficijent apsorpcije,  $k=2$ , za mehaničke talase proporcionalan frekvenci,  $v$ , i kinetičkoj viskoznosti,  $\eta/\rho$ , ultrazvuk se veoma brzo apsorbira u vazduhu (malo  $\rho$ ), a slabije u vodi.

Zbog svojih fizičkih karakteristika (mehaničkog, toplotnog, fizičko-hemijskog i biološkog dejstva) ultrazvuk ima značajnu primenu u nauci i privredi.

Mehaničko dejstvo na supstancu se manifestuje njenim mikrodeformacijama prouzrokovanim brzim adijabatskim sabijanjem i rastezanjem delova sredine.

Zbog velike frekvencije, amplitude brzine  $\omega A$ , amplitude ubrzanja  $\omega^2 A$  i zvučnog pritiska  $\Delta P_m$ , daleko su veće nego kod zvučnih talasa iste amplitude, što već pri gustini fluksa energije od  $10 \text{ W/cm}^2$  izaziva ireverzibilne efekte drobljenja materijala. Pri gustini fluksa energije od  $40 \text{ W/cm}^2$  je  $\Delta P_m = 1 \text{ MPa}$ , a pri frekvenci od  $v = 1 \text{ MHz}$  amplituda ubrzanja ide do  $\omega^2 A = 4,8 \times 10^6 \text{ m/s}^2$ , što je oko  $5 \times 10^5$  puta veće od ubrzanja sile Zemljine teže. Ovo je još izrazitije ukoliko se talasi fokusiraju na male delove sredine pomoću sabirnih ultrazvučnih sočiva. U tečnim sredinama ultrazvuk izaziva pojavu kavitacije (neprekidno obrazovanje i iščezavanje unutrašnjih šupljina) sredine sa naglim promenama pritiska i gustine.

Ova dejstva ultrazvuka na sredine u kojima se prostiru se koriste u sledeće svrhe:

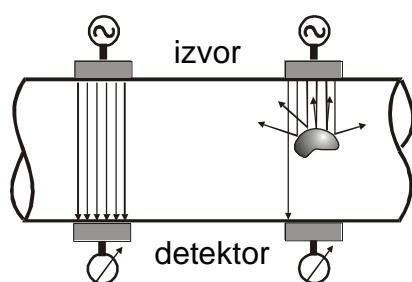
- razaranje čvrstih i tečnih tela, složenih molekula i mikroorganizama,
- za dispergovanje materijala i dobijanje emulzija i suspenzija (boje, lakovi, kozmetika, farmacija, industrija izrade majoneza, margarina, zubne paste, itd.),
- čišćenje zamašćenih površina, odstranjivanje oksida; korišćenjem tzv. ultrazvučnog kupatila,
- za "tačkasto" zavarivanje i spajanje poluprovodničkih elemenata (izrada trioda i dioda),
- razgradjujuće dejstvo znatno se povećava dodavanjem abraziva-polirajućih praškova (Al-oksida, Si-karbid, i dr.),
- koristi se i za bušenje malih otvora u krutim materijalima (staklo, keramika, porcelan) i to posredno korišćenjem abraziva,
- za ubrzanje procesa u lakoj industriji: bojenje tekstila, štavljenje kože,
- ultrazvuk koaguliše aerosole pa se tako "hvataju" čestice dima pri prolasku kroz zaštitne filtre.

Posebno se pravolinijsko i lokalizovano prostiranje ultrazvuka koristi za određivanje lokacije defekata u homogenim sredinama. To se radi tako što se kroz materijal usmeri kratak impuls ultrazvuka i registruje se njegov eho-odbijeni talas o prepreku ili defekat sredine. Udaljenje prepreke od površine će biti  $l = c\Delta t/2$ . Na tom principu rade dubinomeri, hidrolokator u navigaciji brodova, itd. Zbog veće gustine i dometa ovo se naročito koristi u vodi. Na osnovu promene frekvence eho-signalu prema Dopler-ovom efektu se određuje brzina kretanja objekta u vodi (podmornice).

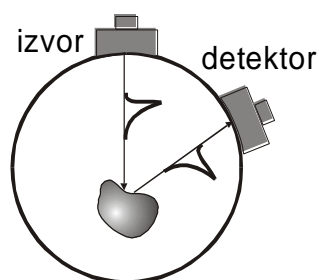
Uloga ultrazvuka je nezamenjiva u ispitivanju krutih tela. U njih svetlost praktično ne prodire, rendgensko zračenje može da se koristi za male dubine, a ultrazvuk može da se koristi za ispitivanje homogenosti i defekata u metalima na dubini do 10 m.

U principu se ultrazvučna defektoskopija zasniva na sledećim metodama:

- metoda "zvučne senke",
- impulsna i
- rezonantna metoda.



Slika 11.18. Metod zvučne senke



Slika 11.19. Impulsni metod

**Metodom "zvučne senke"** materijal koji se ispituje prosvetljava se ultrazvučnim talasima iz pokretnog izvora. Sa druge strane ispitivanog predmeta postavlja se detektor ultrazvuka. Ako u materijalu postoji defekat, talasi će se na njemu pojačano rasejavati, intenzitet talasa u detektoru je slabiji, on se nalazi u senci defekta, koji se na taj način identifikuje, slika 11.18.

**Impulsna metoda** je slična principu rada hidrolokatora, slika 11.19. Iz izvora se kratak ultrazvučni talas u vidu impulsa ili paketa usmeri u središte materijala koji se ispituje. U detektoru koji je u neposrednoj blizini izvora hvata se eho-odbijenog signala. Signal će biti registrovan tek ako usmereni zrak naidje na prepreku u vidu defekta koji se tako utvrđuje.

**Rezonantna metoda** se zasniva na pojavi formiranja stojećih talasa ultrazvuka u ispitivanom materijalu (na primer zid cevi konstantne debljine  $d$ ) i to tako da je frekvencija talasa jednaka  $v = nc/2d$ . Ako defekat postoji u materijalu, nastaje poremećaj uslova

rezonance i narušavaju se stojeći talasi, što se posebno registruje.

Velika prednost primene ultrazvuka u nauci i tehnici je njegova relativno mala brzina (u poredjenju recimo sa brzinom svetlosti), kao i malo  $\lambda$ . Ove pogodnosti su uslovile razvoj nove discipline koja se naziva "molekularna akustika" i izučava mikrofenomene u gasovima i tečnostima.

Ultrazvuk velike energije ispoljava raznovrsne efekte na žive organizme-ubija i razara ćelije efektom kavitacije, oštećuje ili zagreva tkivo. Dosta se koristi u medicini za lečenje (veći intenzitet) ili dijagnostiku (manji intenzitet). Može da se koristi za lečenje Parkinsonove bolesti (tumore mozga), razbijanje kamena u žuči, neurološke operacije, itd. Takodje se koristi i za sterilizaciju, i posebno za sterilizaciju proizvoda (mleka).

Dijagnostika ultrazvukom u medicini se koristi na osnovu primene jedne od metoda: prozračivanje, lokacija, Doplerov efekat. Doplerov efekat se koristi za ispitivanje kretanja organa u organizmu, kao i za ispitivanje trudnoće.

## PRIRODA SVETLOSTI I NJENE OSNOVNE FIZIČKE OSOBINE GEOMETRIJSKA OPTIKA

Prve teorije o prirodi svetlosti su nastale na prelazu iz 17 u 18 vek. Do tada nije bilo ozbiljnijeg pokušaja da se objasni fizički proces koji omogućuje da se "vide" okolni predmeti, ali su konstatovane neke osobine svetlosti. Primećeno je da se predmeti mogu videti i ako ne emituju svoju svetlost, već reflektuju svetlost drugih predmeta. Takodje je konstatovano pravolinijsko prostiranje, odbijanje i prelamanje na granici dveju sredina.

Prvu teoriju je dao Ch. Huygens (1690). On je tvrdio da je svetlost "talasanje hipotetičkog svetlosnog etra", koji se nalazi u svim telima, sredinama, pa i u vakuumu. Uspeo je da objasni zakone odbijanja, prelamanja, pa i dvojnog prelamanja svetlosti, ali ne i pravolinijsko prostiranje svetlosti.

J. Newton (1704) pretpostavlja da iz izvora svetlosti izleću neke "čestice naročite vrste" koje udarom u oko izazivaju osećaj vidjenja. Objasnio je pravolinijsko prostiranje svetlosti, ali prelamanje i odbijanje samo kvalitativno.

Početakom 19 veka Th. Young i J. Frenel ponovo zaključuju da je svetlost talasne prirode i da predstavlja transverzalne talase svetlosnog etra. Dakle etar je morao da ima i osobine čvrstog tela (samo u njima su mogući transverzalni talasi), kao i neke druge protivurečne mehaničke osobine.

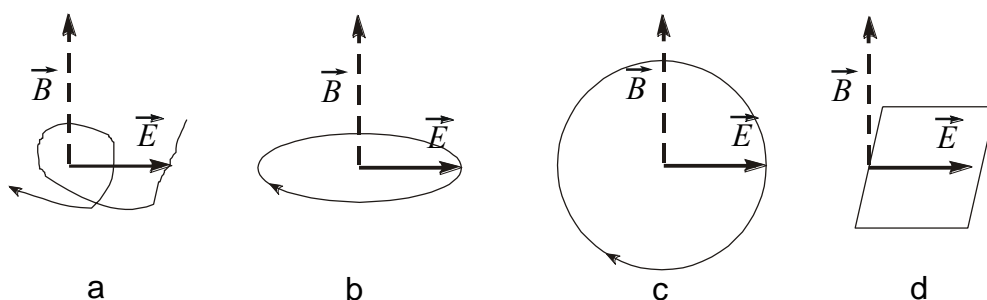
Tek je J. C. Maxwell (1878) svojom teorijom elektro-magnetnog zračenja savladao sve protivurečnosti. Zaključio je da je svetlost elektromagnetni talas, sa veoma malim talasnim dužinama.

Na osnovu ove teorije u pravcu svetlosnog zraka se prostiru istovremeno dva talasanja i to talas električnog polja,  $\vec{E}$ , i talas magnetnog polja,  $\vec{B}$ . Pošto elektromagnetizam nije predmet našeg kursa, ove veličine ćemo samo pojmovno definisati kao posebne vidove fizičkog polja (analogno pojmu gravitacionog polja). Jačina polja i ovde predstavlja silu po jedinici fizičke veličine o kojoj se radi, u našim slučajevima po jedinici naelektrisanja ( $q$ ), odnosno namagnetisanja (ili magnetnog momenta- $m$ ). Podsetimo se takodje pojmova u primeru kretanja naelektrisane čestice pod dejstvom sile  $\vec{F} = \vec{F}(t)$ .

Kretanje naelektrisanja, kao izvora električnog polja  $\vec{E}$ , po harmonijskom zakonu, izaziva harmonijsku promenu polja  $\vec{E}$  odnosno njegovo prostiranje u vidu transverzalnog talasa. Za razliku od mehaničkih talasa, ovde se čestice sredine ne kreću (niti su neophodne), već se prenosi sama promena polja.

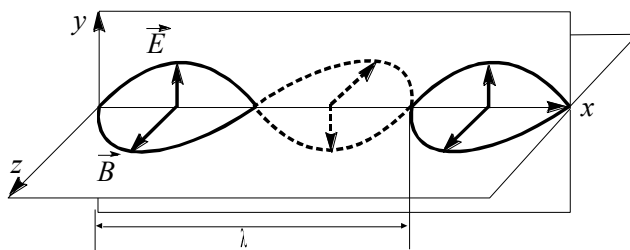
U ravnom elektromagnetnom talasu vektor jačine električnog polja  $\vec{E}$  i vektor magnetne indukcije  $\vec{B}$  osciluju u fazi (jer jedan indukuje drugi) i normalni su uzajamno i na pravac prostiranja svetlosti. Svetlost je prosta ili monohromatska ako su  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  proste harmonijske funkcije vremena. U tom slučaju je definisana frekvencija  $n$  od koje zavisi subjektivni utisak boje svetlosti, ukoliko se vidi, kao i talasna dužina  $l$  i brzina svetlosti  $c$ . Svakako da i ovde važi veza:  $\lambda = c/v = cT$ . Često se kao karakteristika talasa uzima tzv. talasni broj koji je jednak broju talasa na  $2\pi$  jedinica dužine u vakuumu:  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ .

Iz Maxwell-ovih jednačina ne sledi da vektor  $\vec{E}$  treba da ima neki stalni pravac u ravni normalnoj na pravac prostiranja. U opštem slučaju vrh vektora  $\vec{E}$  opisuje proizvoljnu krivu u ravni normalnoj na pravac prostiranja, a). Ako vrhovi vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  monohromatske svetlosti opisuju u ravni normalnoj na pravac prostiranja elipsu, krug ili pravu, svetlost se naziva eliptično, kružno ili linearno polarizovana, slika 12.1., slučaj b), c) ili d).



Slika 12.1. Položaj vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  kod nepolarizovane i polarizovane svetlosti

Pri tome vrh vektora može da rotira udesno ili ulevo (sem za linearnu polarizaciju, gde ne rotira), pa se karakteriše još i nazivom desno ili levo polarizovana svetlost. U slučaju linearno polarizovane svetlosti raspored  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  za talas koji se prostire duž x-ose, u određenom trenutku vremena, prikazan je na sl. 12.2.



Slika 12.1. Položaj vektora  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  kod linearno polarizovane svetlosti

Brzina prostiranja monohromatske svetlosti u vakuumu je konstantna i na osnovu elektromagnetne teorije data je izrazom:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (12.1)$$

gde su  $\epsilon_0$  i  $\mu_0$  dielektrična konstanta i magnetna permeabilnost vakuuma,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F/m, (Farad je jedinica za kapacitet i jednaka je C/V),  $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$  H/m, (Henri je jedinica za induktancu). Na osnovu toga je:

$$c = (2.997925 \pm 0.000003) \times 10^8 \text{ m/s,}$$

odnosno približno  $3 \times 10^8$  m/s

U svakoj drugoj sredini (sem vakuuma), talas izaziva poremećaj sredine koji se povratno odražava i na njega izazivajući kašnjenje odnosno usporavanje talasa. Brzina je u tom slučaju data sa:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (12.2)$$

gde su  $\epsilon_r$  i  $\mu_r$  relativna dielektrična konstanta i magnetna propustljivost date sredine. Pošto se svetlost prostire samo kroz "providne" sredine (vazduh, staklo, voda) koje nemaju magnetna svojstva i za koje je relativna magnetna propustljivost  $\mu_r = 1$ , sledi:

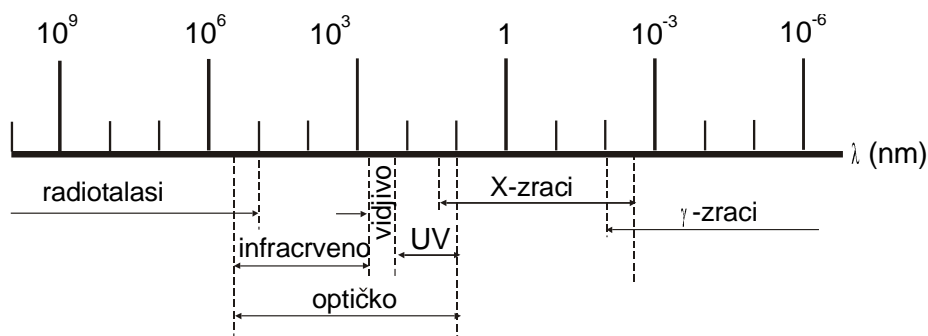
$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (12.3)$$

Odnos brzina svetlosti u vakuumu i u nekoj drugoj sredini naziva se **apsolutni indeks prelamanja** i funkcija je relativne dielektrične propustljivosti te sredine

$$N = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r} \geq 1 \quad (12.4)$$

Za najveći broj prozirnih supstanci apsolutni indeks prelamanja se kreće u granicama  $1,2 \leq N \leq 2,4$ . Karakteristično je da  $\epsilon_r$  za više frekvence zavisi od  $v$ , odnosno smanjuje se sa  $v$ . Na osnovu relacije (12.3) će i brzina svetlosti, za datu sredinu, biti obrnuto proporcionalna frekvenciji.

Elektromagnetno zračenje se prema talasnoj dužini deli na nekoliko vrsta, počev od radiotalasa sa najvećim  $\lambda$ , preko toplotnog, infracrvenog i vidljivog do ultravioletnog-UV, X i  $\gamma$ -zračenja. Opsezi talasnih dužina ove uslovne podele prikazani su na sledećoj, logaritamskoj, skali:



Vidljiva svetlost obuhvata elektromagnetne talase sa talasnim dužinama u intervalu od 400-800 nm, odnosno frekvencom u intervalu od  $(7,5-3,8) \times 10^{14}$  Hz. U praksi se koriste i jedne i druge veličine, odnosno odgovarajuće jedinice, i to ako se detekcija svetlosti vrši električnim putem meri se  $v$ , a optičkim putem meri se  $\lambda$ .

Pomoću Maxwell-ove teorije je bilo moguće objasniti većinu osobina svetlosti, međutim nije bilo moguće objasniti samu prirodu-nastanak zračenja. Ovaj problem je rešen tek kasnije Planck-ovom "kvantnom teorijom zračenja".

Kvantna teorija zračenja je objasnila sam čin nastanka elektromagnetnog zračenja. Po njoj svetlost nastaje prelaskom elektrona sa višeg na niži energijski nivo u atomima i molekulima emitujući pri tom "**kvant**" energije tačno određenog iznosa, koji zavisi od frekvence:

$$E = hv \quad (12.5)$$

gde je  $h = 6,624 \times 10^{-34}$  J.s tzv. Plankova konstanta. Pri prostiranju zračenja ovi kvanti su relativno lokalizovani (tzv.taladni paketi) u prostoru - pomerajući se brzinom talasa. Nazivaju se "**fotoni**".

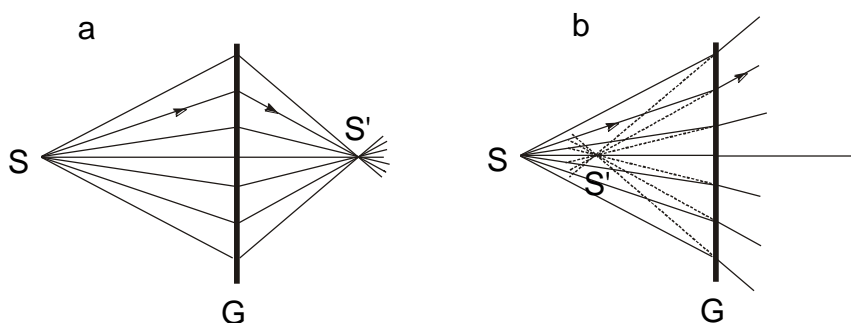
Ova teorija je naknadno, za razliku od Maxwell-ove (koja se može smatrati njenom makro-aproksimacijom) uspeła da opiše i pojave kao što su Fotoelektrični i Comptonov efekat. Međutim pojave samog prostiranja, interferencije i difrakcije svetlosti se i dalje opisuju samo elektromagnetnom teorijom. U optici se stoga komplementarno koriste elektromagnetna i kvantna teorija svetlosti izražavajući njenu "**dualističku**" prirodu.

Mnoge pojave se mogu tumačiti bez poznavanja stvarne prirode svetlosti. Tim pojavama se bave geometrijska optika i fotometrija. Ostale pojave su predmet tzv. fizičke optike i neće sada biti razmatrane.

## 12.1. Fermatov princip i osnovni zakoni geometrijske optike.

Osnovni pojam geometrijske optike je svetlosni zrak - linija duž koje se prostire svetlosna energija - talas. Osnovni zakoni se odnose na prostiranje svetlosti i njeno ponašanje na granicama sredina različitog indeksa prelamanja. Pojam svetlosnog zraka ovde treba uslovno shvatiti, praktično nije moguće dobiti snop koji bi bio makar približno identičan sa geometrijskim pojmom zraka-prave linije. Ako se zrak pokuša dobiti propuštanjem svetlosti kroz veoma mali otvor dolazi do savijanja, difrakcije svetlosti. Stoga su zakoni geometrijske optike zadovoljeni samo kada su otvori ili prepreke veći od  $\lambda$ , a time i širina zraka. Jedino se u tom slučaju ne mora voditi računa o talasnim pojavama kao što su difrakcija, interferencija ili polarizacija.

Iz tačkastog izvora svetlosni zraci izlaze u svim pravcima i divergentni su (ili homocentrični). Ako se na neki način, na površini G, promeni pravac zrakova tako da se seku u jednoj tački, ta tačka je "lik" (S') svetlosnog izvora (predmeta-S). Kada je lik dobijen u preseku samih zrakova tada je stvaran ili realan. Ako se presecaju samo produžetci zrakova u suprotnom smeru od smera prostiranja, dobija se nestvaran, virtuelan ili imaginaran lik, slika 12.3.b).



Slika 12.3. Obrazovanje lika u preseku zrakova

Realan lik se može dobiti na zaklonu, a imaginaran ne može.

Geometrijska optika u suštini proučava različite slučajeve dobijanja likova i bazira se na određenim zakonitostima. Osnovni zakoni geometrijske optike, ima ih četiri, su eksperimentalno utvrđeni, a mogu se dokazivati odnosno dobiti kao posledica zakonitosti koja se naziva Fermatov princip ili princip najkraćeg optičkog puta, i glasi:

***Svetlost se uvek prostire po najkraćem optičkom putu.***

Pod optičkim putem  $d_0$  se podrazumeva geometrijsko rastojanje  $d$  između dve tačke iste optičke sredine pomnoženo sa apsolutnim indeksom prelamanja te sredine:  $d_0 = N \cdot d$ . U homogenim sredinama Fermatov princip je jednostavan jer je  $d_0$  proporcionalno sa  $d$ . Homogene sredine su one u kojima je indeks prelamanja isti duž proizvoljnog pravca. Izotropne su one sredine kod kojih je  $N$  isto u svim pravcima.

U opštem slučaju, za proizvoljnu sredinu, Fermatov princip glasi: *Svetlost se uvek kreće onim putem između dve tačke za koji joj je potrebno najmanje vremena.* Veza između vremenskog intervala i predjenog puta  $d$  je

$$dt = \frac{d\ell}{v} = N \frac{d\ell}{c} ,$$

jer je  $v=c/N$ , odakle je:

$$t = \int \frac{N}{c} \cdot d\ell . \quad (12.6)$$

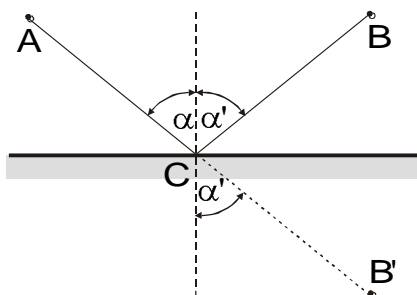
Za homogenu sredinu je  $d_0=c \cdot t = \int N \cdot d\ell = Nd$ , jer je  $N=\text{const}$ .

U opštem slučaju, dakle,  $d_0$  i  $d$  nisu jednaki, a često ni srazmerni. Pošto je  $N>1$ ,  $d_0>d$ . Jednakost važi samo za vakuum.

Osnovni zakoni geometrijske optike su sledeći:

- **I Zakon pravolinijskog prostiranja svetlosti:** U vakuumu i optički homogenim sredinama svetlosni zraci su prave linije.
- **II Zakon nezavisnosti svetlosnih zraka:** Kroz istu tačku prostora može istovremeno prolaziti više svetlosnih zraka i oni ne deluju jedan na drugi.
- **III Zakon odbijanja:** Upadni zrak zaklapa sa normalom na površinu (od koje se odbija) ugao koji je jednak uglu koji sa normalom zaklapa reflektovani zrak. Oba zraka i normala leže u istoj ravni.
- **IV Zakon prelamanja:** Svetlosni zrak prilikom prelaska iz jedne u drugu optičku sredinu (različitih gustina) menja svoj prvobitni pravac. Odnos sinusa upadnog i prelomnog ugla jednak je relativnom indeksu prelamanja za te dve sredine i zavisi od talasne dužine  $\lambda$ .

Zadržaćemo se samo na druga dva zakona.



Slika 12.4. Zakon odbijanja svetlosti

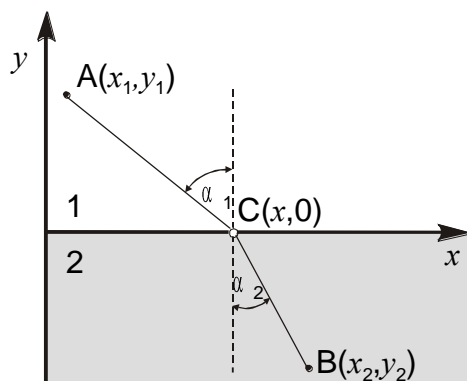
**ZAKON ODBIJANJA.** Na osnovu Fermatovog principa, u dokazu ovog zakona, se na reflektujućoj površini traži tačka O takva da put AOB bude najkraći. Konstruišimo B' takvo da su B i B' simetrične u odnosu na reflektujuću površinu. Za ma koji položaj tačke O važiće da je  $OB=OB'$  i prema tome  $AO+OB=AO+OB'$ . Najkraće rastojanje između dve tačke je prava, pa je prema tome optički put AOB odnosno  $N(AO+OB)$  najmanji ako O leži u preseku  $AB'$  i reflektujuće površine. Iz geometrijskih razloga je tada i  $\alpha'=\alpha$  i zrak OB leži u upadnoj ravni zajedno sa AO i normalom  $OO'$ , slika 12.4.

**ZAKON PRELAMANJA (Snellius-ov zakon).** I ovde se polazi u dokazivanju od Fermatovog principa. Postavimo sistem kao na slici i predpostavimo da se zrak kreće od A preko C do B i da se sve tri tačke nalaze u xOy ravni, slika 12.5.

Tačka C treba da se nalazi na x-osi tako da je optički put ACB najmanji. Taj put se prema priloženoj slici može izraziti preko koordinata tačaka A, C i B:

$$d_0 = N_1 AC + N_2 CB = N_1 \sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + N_2 \sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2} \quad (12.7)$$

Traženi položaj tačke C se dobija iz uslova minimuma optičkog puta odnosno izjednačavanjem prvog izvoda sa nulom,  $d(d_0)/dx = 0$ :



Slika 12.5. Zakon prelamanja svetlosti

$$N_1 \frac{(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2}} = N_2 \frac{(x_2-x)}{\sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2}} \quad (12.8)$$

što se prema slici može napisati kao:

$$N_1 \sin(\alpha_1) = N_2 \sin(\alpha_2) \quad (12.9)$$

odnosno:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{N_2}{N_1} = n_{12} \quad (12.10)$$

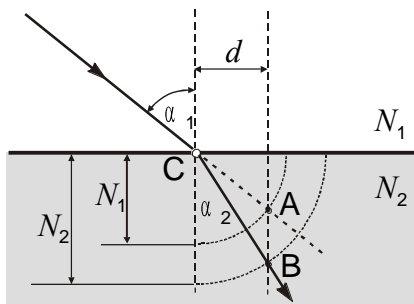
Do istog odnosa se može doći i traženjem uslova da vreme prolaska zraka od A do B bude najkraće. Ako su brzine prostiranja svetlosti u različitim sredinama  $v_1$  i  $v_2$  respektivno, biće:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2}$$

Ako se AC i CB izraze kao i gore preko Pitagorine teoreme, iz uslova  $dt/dx=0$  se dobija istovetan rezultat.

Pojam apsolutnog indeksa prelamanja smo već uveli, kao odnos brzine svetlosti u vakuumu i u posmatranoj sredini ( $N_1 = c/v_1$  ili  $N_2 = c/v_2$ ). Ovde ćemo definisati relativni indeks prelamanja, kao odnos brzina svetlosti u dve različite sredine, što je u stvari odnos apsolutnih indeksa prelamanja tih sredina:  $n_{12} = N_2/N_1$ .

Sredina u kojoj se zrak prelama pod uglom manjim od upadnog (ka normali) naziva se optički gušća.



Slika 12.6. Princip konstrukcije prelomljenog zraka

Na kraju pokažimo kako se geometrijski konstruiše prelomljeni zrak ako su nam poznati apsolutni indeksi prelamanja za dve sredine, slika 12.6. Sa centrom u tački C konstruišu se krugovi sa poluprečnicima brojno jednakim indeksima prelamanja. Normala na graničnu površinu u A-preseku kruga poluprečnika  $N_1$  i pravca upadnog zraka seče krug poluprečnika  $N_2$  u B. Prema slici je  $\sin(\alpha_1) = d/N_1$  i  $\sin(\alpha_2) = d/N_2$ , a njihov odnos je:

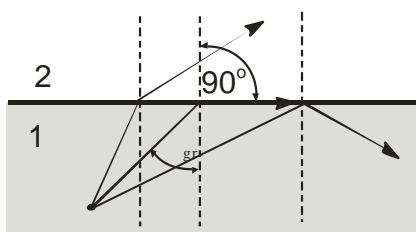
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

**TOTALNA REFLEKSIJA.** Pri prelasku iz optički gušće u redju sredinu prelomni ugao je veći od upadnog. Upadni ugao pri kome je  $\alpha_2 = 90^\circ$  se naziva granični ugao ( $\alpha_{gr}$ ). Za veće upadne uglove ( $\alpha_1$ ) zrak se u potpunosti reflektuje—totalna refleksija, slika 12.7. Vrednost graničnog ugla se dobija na sledeći način:

$$\frac{\sin \alpha_{gr}}{\sin 90} = \frac{N_2}{N_1} = n_{12}$$

odnosno:

$$\sin(\alpha_{gr}) = n_{12}$$



Slika 12.7. Totalna refleksija

Ako je redja sredina vakuum (vazduh) za koji je  $N_2=1$ , a  $N_1$  obeležimo sa N, biće:

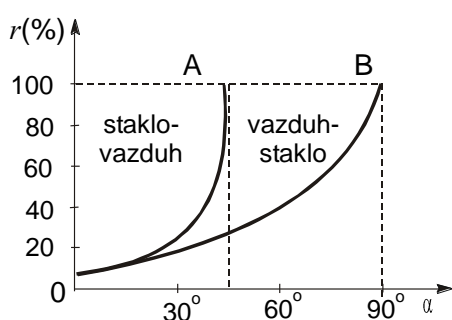
$$\alpha_{gr} = \arcsin\left(\frac{1}{N}\right) \quad (12.11)$$

U praksi se nalaženjem  $\alpha_{gr}$  za neku sredinu može odrediti njen indeks prelamanja. Tako je na osnovu podataka sa slike 11.9. određeno  $\alpha_{gr}$  za granicu staklo/vazduh, a navedena je i vrednost za granicu voda/vazduh.

Posmatrač u optički gušćoj sredini (u vodi) se predmeti iz optički redje sredine čine sažetim, jer je sve (iz ugla od  $180^\circ$ ) preslikano u konus ugla  $2\alpha_{gr}$ . Inače samo prelamanje ima niz posebno interesantnih pratećih optičkih efekata.

**INTENZITET REFLEKTOVANE SVETLOSTI.** Pri dolasku na graničnu površinu jedan deo svetlosti se odbija-reflektuje, a drugi prelama. Koji deo intenziteta se reflektuje, nije moguće odrediti na osnovu zakona odbijanja i prelamanja. To je moguće na osnovu elektromagnetne teorije svetlosti, što je van okvira ovog kursa. Ovde ćemo samo navesti da odnos intenziteta reflektovane (R) i upadne ( $I_0$ ) svetlosti  $r=R/I_0$  predstavlja koeficijent refleksije i zavisi od  $N_1$ ,  $N_2$  i upadnog ugla  $\alpha$ , kao i od polarizovanosti svetlosti. Za  $\alpha=0$  je :

$$r = \left( \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right)^2 \quad (12.12)$$

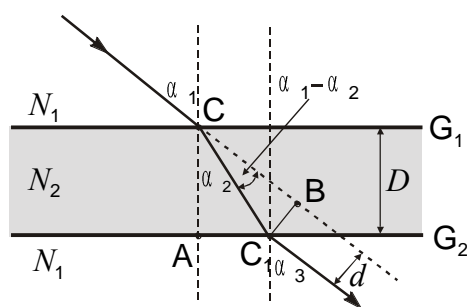


Slika 12.8. Zavisnost koeficijenta refleksije od ugla

i to za  $N_1 > N_2$ . Za  $\alpha \neq 0$ , zavisnost je znatno složenija. Na slici 12.8. je prikazan koeficijent refleksije za graničnu površinu vazduh-staklo ( $N_1 = 1,000$  i  $N_2 = 1,523$ ) i to A—za prelaz iz stakla u vazduh i B—obrnuto. Do ugla  $\alpha = 30^\circ$  krive se poklapaju i  $r = \text{const} = 5\%$ . Kriva B raste do  $r = 100\%$  na  $90^\circ$ , dok kriva A brže raste do  $100\%$  pošto je granični ugao totalne refleksije  $\alpha_{gr} = 41^\circ$ . Za slučaj sredina voda/vazduh ( $N_1 = 1,33$  i  $N_2 = 1,00$ ) granični ugao je  $48^\circ 30'$ .

## 12.2. Prelamanje kroz planparalelnu ploču.

Planparalelna ploča je uzana oblast paralelnih površina optičke sredine sa indeksom prelamanja  $N_2$ , smeštena u optičku sredinu sa indeksom prelamanja  $N_1$ , kao na slici 12.9. Na jednoj  $G_1$  i drugoj  $G_2$  graničnoj površini važiće po zakonu prelamanja odnosi:



Slika 12.9. Prelamanje svetlosti kroz planparalelnu ploču

$$N_1 \sin(\alpha_1) = N_2 \sin(\alpha_2)$$

i

$$N_2 \sin(\alpha_2) = N_1 \sin(\alpha_3)$$

odakle se da zaključiti da je  $\alpha_1 = \alpha_3$ . Dakle, upadni i izlazni zraci su međusobno paralelni, ali su pomereni za rastojanje  $d$ . Ovo rastojanje se može odrediti na sledeći način:

$$d = CC_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Kako je

$$CC_1 = \frac{D}{\cos(\alpha_2)}$$

sledi

$$d = \frac{D \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos(\alpha_2)} \quad (12.13)$$

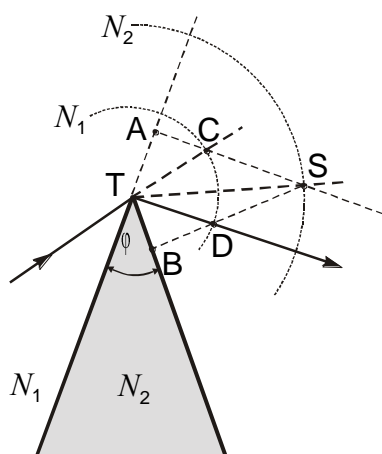
gde je D-debljina planparalelne ploče. Primenom trigonometrijskih transformacija na navedene izraze, dobija se:

$$d = D \sin(\alpha_1) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{n_{12} - \sin^2 \alpha_1}} \right\} = f(D, \alpha_1, n_{12}) \quad (12.14)$$

gde je  $n_{12}$  relativni indeks prelamanja.

### 12.3. Prelamanje svetlosti kroz prizmu.

Optička prizma je svako telo u obliku prizme, dobro ugačanih stranica i napravljeno od materijala koji je providan. Obično se razmatra prelamanje kroz prizmu čiji je presek ravnokraki trougao, pošto se ta vrsta najčešće koristi u optičkim instrumentima—spektrografima ili spektrometrima.



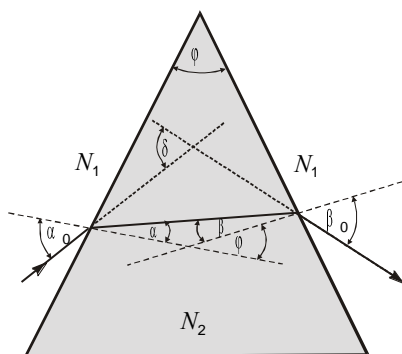
Slika 12.10. Konstrukcija prelomljenog zraka na vrhu prizme

Konstrukcija prelomljenog monohromatskog zraka može se izvesti primenom ranije korišćenog principa, za konstrukciju ugla prelamanja svetlosti, na samom vrhu prizme. Neka je  $N_2 > N_1$ , svetlost se kroz prizmu kreće sporije. Prvo se na vrhu prizme konstruišu dva kruga poluprečnika  $N_1$  i  $N_2$ . Produžetak upadnog zraka seče krug  $N_1$  u tački C u kojoj se povlači normala AC na graničnu površinu i dobija se tačka S koja određuje pravac prvog prelamanja TS. Pošto zrak zatim izlazi iz prizme, iz sredine sa većim u sredinu sa manjim indeksom prelamanja, traži se presek normale SB na drugu graničnu površinu sa krugom poluprečnika  $N_1$ , tačka D. Ova tačka određuje pravac izlaznog zraka TD.

Ovaj postupak zapravo predstavlja primenu Snellius—ovog zakona prelamanja prvo na jednu pa na drugu graničnu površinu, pri čemu one zaklapaju ugao  $\varphi$  medju sobom. Sa slike 12.10. se da zaključiti da je otklon zraka najmanji ako je duž TS normalna na bisektrisu ugla  $\varphi$ . To se može izvesti pomoću crteža na slici 12.11.

Ugao skretanja—devijacija zraka kroz prizmu je  $\delta$  i može se izraziti kao:

$$\delta = (\alpha_0 - \alpha) + (\beta_0 - \beta) = \alpha_0 + \beta_0 - (\alpha + \beta) = \alpha_0 + \beta_0 - \varphi \quad (12.15)$$



Slika 12.11. Prelamanje kroz prizmu

primenom osnovnih pravila za odnose spoljašnjih i unutrašnjih uglova odgovarajućih trouglova.

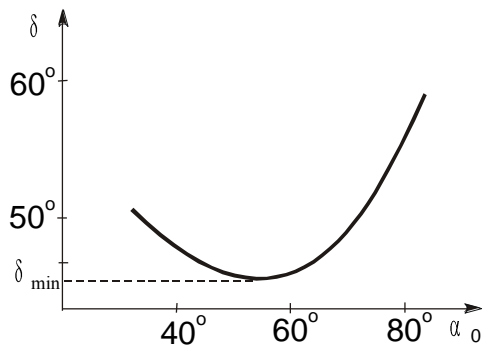
Ugao devijacije je pogodnije izraziti eliminisanjem ugla  $\beta_0$  i uvođenjem indeksa prelamanja  $n_r = n_{12}$  prizme primenom relacije za

prelamanje svetlosti na drugoj graničnoj površini:  $\sin \beta_0 / \sin \beta = n_r$ . Odavde i iz relacije  $\beta = \varphi - \alpha$  sledi  $\beta_0 = \arcsin\{n_r \sin(\varphi - \alpha)\}$ , dok se sa prve granične površine dobija:  $\alpha = \arcsin\{(1/n_r) \sin(\alpha_0)\}$ . Zamenom  $\alpha$  u izraz za  $\beta_0$  se dobija:

$$\beta_0 = \arcsin\{n_r \sin[\varphi - \arcsin(\sin \alpha_0 / n_r)]\} \quad (12.16)$$

Zamenom ovog izraza u vezu  $\delta = \alpha_0 + \beta_0 - \varphi$  dobija se konačno za devijaciju:

$$\delta = \alpha_0 - \varphi + \arcsin\{n_r \sin[\varphi - \arcsin(\sin\alpha_0/n_r)]\} \quad (12.17)$$



Slika 12.12. Zavisnost ugla skretanja od upadnog ugla

Tipičan grafik zavisnosti  $\delta$  od upadnog ugla  $\alpha_0$ , za neku konkretnu vrednost  $\varphi$  i  $n_r$  je prikazan na slici 12.12. Sa porastom upadnog ugla  $\alpha_0$  devijacija opada do  $\delta_{\min}$ , a zatim se povećava.

Analitičko određivanje ugla  $\delta_{\min}$  je jednostavnije izvesti korišćenjem i ugla  $\beta_0$  u izvodjenju i njegovom kasnijom eliminacijom. Uslov za minimum otklona je:

$$\frac{d\delta}{d\alpha_0} = 0 \quad (12.18)$$

odnosno korišćenjem ranije veze

$$\delta = \alpha_0 + \beta_0 - \varphi \quad (12.19)$$

ovaj uslov se svodi na:

$$1 + \frac{d\beta_0}{d\alpha_0} = 0 \quad (12.20)$$

Za uglove  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\alpha$  i  $\beta$  važe donosi:

$$\sin\beta_0 = n_r \sin\beta$$

$$\sin\alpha_0 = n_r \sin\alpha \quad (12.21)$$

i 
$$\alpha + \beta = \varphi$$

Odavde se diferenciranjem dobijaju sledeći odnosi:

$$\cos\beta_0 d\beta_0 = n_r \cos\beta d\beta$$

$$\cos\alpha_0 d\alpha_0 = n_r \cos\alpha d\alpha \quad (12.22)$$

i 
$$d\alpha = -d\beta$$

Na osnovu ovoga je dalje:

$$d\beta_0 = n_r \frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} d\beta = -n_r \frac{\cos\beta}{\cos\beta_0} d\alpha = -\frac{\cos\beta \cdot \cos\alpha_0}{\cos\alpha \cdot \cos\beta_0} d\alpha_0$$

odnosno

$$\frac{d\beta_0}{d\alpha_0} = -\frac{\cos\beta \cdot \cos\alpha_0}{\cos\alpha \cdot \cos\beta_0} \quad (12.23)$$

Na osnovu ranije postavljenog uslova:  $1 + \frac{d\beta_0}{d\alpha_0} = 0$  iz ove jednakosti sledi da je:

$$\frac{\cos \alpha_o}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta_o}{\cos \beta} \quad (12.24)$$

odakle je očigledno  $\alpha = \beta$  a pošto je  $\alpha + \beta = \varphi$ , to je dalje  $\alpha = \beta = \varphi/2$ , što je i trebalo pokazati.

Kao što smo videli, prilikom minimalne devijacije zrak se unutar prizme kreće normalno na simetralu ugla  $\varphi$ . Kako je iz gornjih relacija i  $\alpha_o = \beta_o$ , iz  $\delta = \alpha_o + \beta_o - \varphi$  sledi da je  $\alpha_o = \beta_o = (\varphi + \delta)/2$ .

Na osnovu ranijih izraza za  $\delta$  i  $\alpha_o$ , ovim vezama se mogu izraziti uglovi minimalnog skretanja i njihovi odnosi:

$$\delta_{\min} = 2 \arcsin(n_r \sin \frac{\varphi}{2}) - \varphi$$

$$\alpha_{o \min} = \arcsin(n_r \sin \frac{\varphi}{2}) \quad (12.25)$$

i

$$\alpha_{o \min} = \frac{\delta_{\min} + \varphi}{2}$$

Ako se indeks prelamanja  $n_r = \sin \alpha_o / \sin \alpha$  izrazi preko  $\varphi$  i  $\delta_{\min}$  za datu prizmu, biće:

$$n_r = \frac{\sin \frac{\varphi + \delta_{\min}}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\varphi + \delta_{\min}}{\varphi} \quad (12.26)$$

odnosno:

$$\delta_{\min} = (n_r - 1)\varphi \quad (12.27)$$

Pomoću ovog izraza moguće je merenjem uglova  $\varphi$  i  $\delta_{\min}$  odrediti indeks prelamanja prizme.

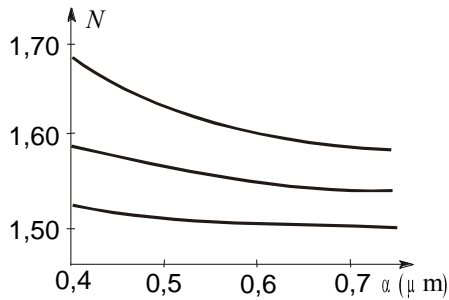
**SPEKTROMETRI.** Svetlost koja se sastoji iz niza talasa različitih frekvenci, odnosno talasnih dužina naziva se bela ili polihromatska svetlost. Prelamanje bele svetlosti kroz prizmu je uvek praćeno i njenim **razlaganjem (disperzijom)** na pojedine komponente različitih karakteristika, odnosno različitih boja. Ova pojava se koristi za dobijanje spektra svetlosti prizmom. Razlog razlaganja bele svetlosti na pojedine komponente leži u zavisnosti indeksa prelamanja sredine,  $N$ , od talasne dužine svetlosti,  $\lambda$ , što smo već istakli. Promena  $N$  sa  $\lambda$  nije velika, ali je ipak dovoljna da izazove znatno razlaganje bele svetlosti.

Navešćemo primere zavisnosti indeksa prelamanja od talasne dužine za nekoliko sredina:

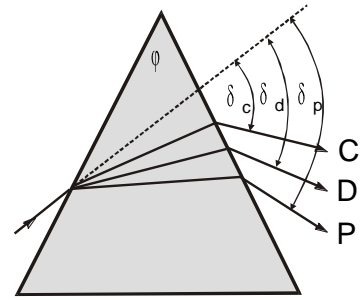
	boja	$\lambda$ (nm)	voda	alkohol	kron-staklo	flint-staklo
C	crvena	656,3 (H $\alpha$ )	1.3314	1.3609	1.5172	1.7634
D	žuta	589,3 (Na)	1.3332	1.3625	1.5133	1.7715
P	plava	486,1 (H $\beta$ )	1.3373	1.3665	1.5214	1.7723

Zavisnost indeksa prelamanja od talasne dužine je i grafički prikazana za nekoliko materijala na slici 12.13. Na slici 12.14. je šematski prikazana zavisnost ugla skretanja zraka kroz prizmu u zavisnosti od njegove boje-talasne dužine.

Razlaganje svetlosti prizmom ima značajnu primenu u spektrometriji. Navešćemo neke karakteristične veličine za opisivanje disperzije pomoću prizme.



Slika 12.13. Zavisnost indeksa prelamanja od talasne dužine



Slika 12.14. Razlaganje bele svetlosti

**Disperzija svetlosti** se izražava preko **srednje apsolutne disperzije**:

$$\Delta = N_p - N_c \quad (12.28)$$

gde su  $N_p$  i  $N_c$  indeksi prelamanja prizme za plavu i crvenu svetlost spektra; ili preko **srednje relativne disperzije**:

$$\Gamma = \frac{N_p - N_c}{N_d - 1} = \frac{\delta_p - \delta_c}{\delta_d} \quad (12.29)$$

gde je ugao skretanja izražen sa  $\delta = (N-1)\phi$ . Pošto su  $\Delta$  i  $\Gamma$  male po brojnim vrednostima u praksi se koristi i takozvana **recipročna relativna disperzija** data sa:

$$\Omega = \frac{N_d - 1}{N_p - N_c} = \frac{\delta_d}{\delta_p - \delta_c} \quad (12.30)$$

Pri određivanju indeksa prelamanja prizme, kao i pri njenom korišćenju za preciznija merenja, prizma mora biti termostatisirana jer indeks prelamanja zavisi i od temperature. Na primer indeks prelamanja za vodu za talasnu dužinu od 589.3 nm zavisnost od temperature iskazana je na sledeći način:

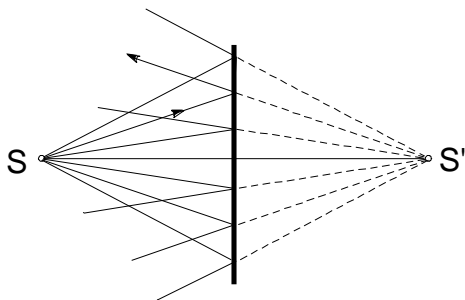
t( C)	15	25	35	45	55
N	1.3338	1.3329	1.3316	1.3301	1.3285

#### 12.4. Odbijanje svetlosti od ravnog i sfernog ogledala.

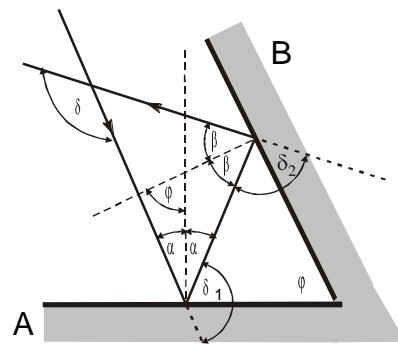
Primenom zakona odbijanja svetlosti na ravnoj površini može se zaključiti da se pri tom obrazuje imaginarni lik svetlosnog izvora u preseku produžetaka svetlosnih zrakova, slika 12.15.

Karakteristično je da je za upadni ugao  $\alpha$  otklon od prvobitnog pravca zraka jednak

:



Slika 12.15. Odbijanje od ravnog ogledala



Slika 12.16. Odbijanje od dva ogledala

$$\delta = 180 - 2\alpha. \quad (12.31)$$

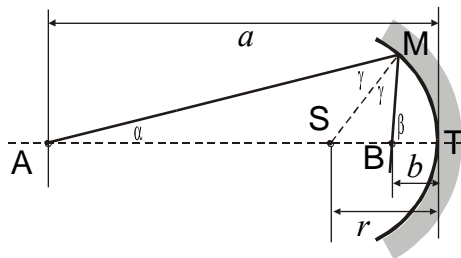
Kakav je slučaj ako se svetlosni zrak odbija od dva ogledala, A i B, koja međusobno zaklapaju ugao  $\varphi$ , kao na slici 12.16.? Tada je:  $\delta_1=180-2\alpha$  i  $\delta_2=180-2\beta$ , odnosno:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 360 - 2(\alpha + \beta) = -2(\alpha + \beta) = -2\varphi \quad (12.32)$$

Ukupno skretanje zavisi samo od ugla  $\varphi$  između ogledala i jednako je, dakle, njegovoj dvostrukoj vrednosti.

### KONKAVNA I KONVEKSNA SFERNA OGLEDALA.

Sferna ogledala su ona čija je reflektujuća površina deo sfere. Izdubljena ogledala se nazivaju konkavnim, a ispupčena konveksnim.



Razmatranje je u principu istovetno u oba slučaja. Za slučaj izdubljenog ogledala, slika 12.17, refleksija se može analizirati na način sličan kao za ravna ogledala. U tački refleksije M se povlači normala na sfernu površinu koja prolazi kroz njen centar krivine S, pri čemu je MS poluprečnik krivine. Prava koja prolazi kroz teme ogledala T i centar krivine S, zove se osa ogledala. Zrak se odbija i seče osu u tački B, na rastojanju b od temena. Kako je poluprečnik ogledala  $r=SM$ , iz trouglova ASM i BSM sledi na osnovu sinusne teoreme:

Slika 12.17. Refleksija na udubljenom ogledalu

trouglova ASM i BSM sledi na osnovu sinusne teoreme:

$$\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin \gamma}{a - r}$$

$$i \quad \frac{\sin \beta}{r} = \frac{\sin(180 - \beta)}{r} = \frac{\sin \gamma}{r - b}$$

Deljenjem ovih izraza, pri malim vrednostima uglova, se dobija:

$$\frac{a - r}{r - b} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\text{tg} \beta}{\text{tg} \alpha} = \frac{1/b}{1/a} = \frac{a}{b}$$

odnosno:  $ab - br = ar - ab$  ili  $ar + br = 2ab$ . Deljenjem sa  $abr$  sledi:

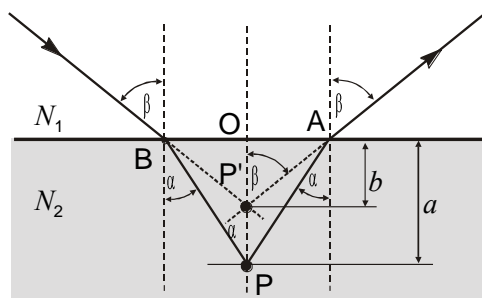
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \quad (12.33)$$

Dakle, svi svetlosni zraci koji izlaze iz jedne tačke na osi ogledala, pod malim uglovima, posle refleksije prolaze kroz jednu tačku koja takodje leži na osi, jer gornji izraz ne zavisi od uglova. Ako je tačka A veoma daleko, tačka B se naziva **ŽIŽA** ogledala. Lako je pokazati da ova relacija važi i za ispupčeno ogledalo, ako je izvor A nestvaran, tj. leži sa desne strane ogledala, a rastojanje b je negativno. Za ispupčeno ogledalo je dakle:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{2}{r} \quad (12.34)$$

Medjutim, ako se  $i$  r uzme sa negativnim predznakom, pošto je sa iste strane kao  $i$ ,  $b$ , jednačine postaju identične. Izraz (12.33) se naziva **jednačina sfernog ogledala**.

## 12.5. Obrazovanje lika pri prelamanju svetlosti na ravnoj i sfernoj površini.



Slika 12.18. Obrazovanje lika pri prelamanju kroz ravnu površinu

Neka se tačkasti predmet P nalazi u optičkoj guščoj sredini. Primenom zakona prelamanja na graničnoj površini, slika 12.18., može se geometrijski konstruisati lik P', koji je imaginaran. Udaljenost lika od granične površine se može dobiti određivanjem duži OA iz trouglova OAP i OAP', odakle je:

$$\text{btg}\beta = \text{atg}\alpha \quad (12.35)$$

gde je a udaljenost predmeta, a b udaljenost lika od granične površine. Korišćenjem Snelijusovog zakona prelamanja

$$N_2 \sin\beta = N_1 \sin\alpha \quad (12.36)$$

i deobom ova dva izraza, dobija se:

$$b = a \frac{N_2 \cos\beta}{N_1 \cos\alpha} \quad (12.37)$$

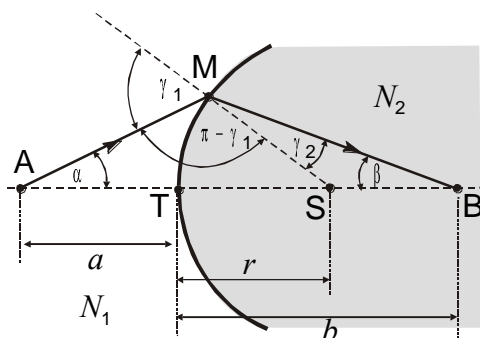
Dalje se korišćenjem trigonometrijskih transformacija  $\beta$  može eliminisati, pa se dobije:

$$b = a \frac{N_2}{N_1} \sqrt{\cos^{-2}\alpha - (N_1/N_2)^2 \text{tg}^2\alpha} \quad (12.38)$$

Ovo znači da b ipak zavisi od  $\alpha$  i da će, uzimanjem u obzir i drugih zrakova, dobijeni lik biti nejasan (astigmatičan). Isto važi i kada je lik u optički redjoj sredini.

Ako je međutim  $\alpha$  veoma malo, biće malo i  $\beta$ , pa je  $\cos\alpha \cong \cos\beta \cong 1$  i izraz za b postaje  $b = aN_2/N_1$ . U tom slučaju položaj lika ne zavisi od ugla i oštrije je (stigmatičan). Pri tome je  $b < a$  jer je  $N_2 < N_1$ . Posledica ovoga je da predmeti u vodi posmatrani iz vazduha izgledaju pliće nego što stvarno jesu. Veličina b zove se prividna dubina i za vazduh/vodu iznosi  $b = 0,75a$ , jer je  $N_1 = 1,33$  i  $N_2 = 1,00$ .

**PRELAMANJE NA SFERNOJ POVRŠINI.** Granica između dve sredine različitih indeksa prelamanja može biti i sferna površina. Prema slici 12.19., na ovu površinu takodje se može primeniti zakon o prelamanju i konstruisati lik B. Veza rastojanja lika i predmeta od temena T, sferne površine radijusa krivine r, takodje se može dobiti primenom sinusne teoreme i to na trouglove ASM i BSM. Iz trougla ASM je



Slika 12.19. Prelamanje na sfernoj površini

$$\frac{\sin(\pi - \gamma_1)}{a + r} = \frac{\sin\alpha}{r}$$

Pošto je  $\sin(\pi - \gamma_1) = \sin\gamma_1$ , sledi

$$\frac{a + r}{r} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}$$

Iz trougla BSM je

$$\frac{b-r}{r} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \beta}.$$

Za male upadne uglove,  $\alpha$ , deljenjem gornjih izraza se dobija sledeći odnos:

$$\frac{a+r}{b-r} = \frac{\sin \gamma_1 \sin \beta}{\sin \gamma_2 \sin \alpha} = n_{12} \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cong n_{12} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \cong n_{12} \frac{a}{b} = \frac{N_2}{N_1} \frac{a}{b}.$$

Posle sredjivanja se dobija

$$N_1 a b + N_1 b r = N_2 a b - N_2 a r \quad \text{odnosno} \quad N_2 a r + N_1 b r = a b (N_2 - N_1)$$

Ako ovu jednačinu podelimo sa  $a b r$  dobija se jednačina koja opisuje prelamanje zraka na sfernoj graničnoj površini:

$$\frac{N_1}{a} + \frac{N_2}{b} = \frac{N_2 - N_1}{r} \quad (12.39)$$

Ovaj izraz je dobijen za male vrednosti upadnih uglova, za zrake skoro paralelne osi površine, pa se često naziva "**jednačina paraksijalnih zraka**". Dakle, svi zraci koji izlaze iz izvora A pod malim uglom, posle prelamanja prolaze kroz tačku B. Poznavajući  $N_1$  i  $N_2$  i poluprečnik krivine  $r$ , može se za svako rastojanje  $a$  izvora od temena izračunati položaj ili rastojanje lika  $b$ .

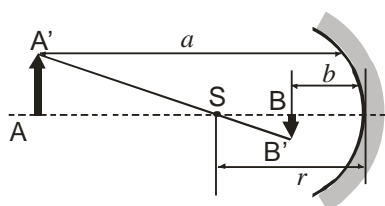
Izvedena jednačina važi i za slučaj da je izvor sa desne strane površine, s tim što će poluprečnik krivine tada biti negativan. U cilju doslednosti u obeležavanju i znacima za  $a$ ,  $b$  i  $r$  usvojena su sledeća pravila:

- rastojanje izvora (predmeta)  $a$  je pozitivno ako se meri od temena T u smeru suprotnom od smeru zraka,
- rastojanje lika je pozitivno ako se meri od temena u smeru koji je isti sa smerom zraka sa te strane površine,
- poluprečnik sferne površine ima znak kao da je centar krivine te površine na mestu lika, uz primenu pravila b),
- poprečna dimenzija lika ili predmeta je pozitivna ako se oni nalaze iznad ose.

Kao što se vidi, jednačina prelamanja zraka na sfernoj površini ne zavisi od  $\alpha$ , lik je stigmatičan. To važi samo za male uglove. Medjutim, ako je površina "korigovana" po obliku, jednačina će važiti i za veće vrednosti  $\alpha$ .

Ako je prelomna površina ravna ( $r \rightarrow \infty$ ), jednačina prelazi u  $b = -a N_2 / N_1$ , što je ranije već dobijeno za ravnu graničnu površinu. Razlika u znaku potiče otud što u izrazu (12.37) nisu primenjena pravila za određivanje znakova za  $a$  i  $b$ .

## 12.6. Uvećanje pri odbijanju i prelamanju svetlosti. Žižne daljine



Slika 12.20. Predmet i lik kod udubljenog ogledala

Ako se izvor svetlosti A nalazi na optičkoj osi ogledala i lik će ležati na istoj osi, u tački B, kao na slici 12.20.

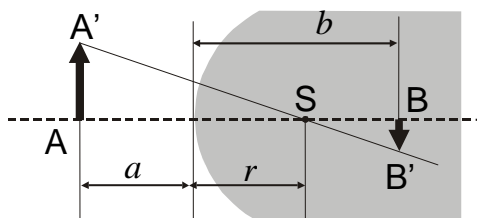
Ako se izvor pomera po krugu sa centrom u centru krivine S, od A do A', i lik će se pomerati od B do B' po krugu sa istim centrom. Za male pomeraje izvora lukovi AA' i BB' mogu se aproksimirati dužima normalnim na optičku osu. Dakle, lik duži normalne na osu je takodje normalan

na osu. Ako je duž AA' dužine  $\ell$ , tada je lik dužine  $\ell'$  pozitivan ako se nalazi iznad optičke ose. Odnos dužine lika i predmeta daje uvećanje— $u$ . Za ogledalo će, prema priloženoj slici, biti:

$$u = \frac{\ell'}{\ell} = -\frac{r-b}{a-r} = \frac{b-r}{a-r} \quad (12.40)$$

Uvećanje za sfernu graničnu površinu će, prema slici 12.21., biti:

$$u = \frac{\ell'}{\ell} = -\frac{b-r}{r+a} = \frac{r-b}{r+a} \quad (12.41)$$



a sam lik će biti:

$$\ell' = u \ell = \ell \frac{r-b}{r+a} \quad (12.42)$$

Slika 12.21. Predmet i lik kod sferne granične površine

Ovi odnosi se mogu, eliminisanjem rastojanja lika  $b$ -koje je i tako nepoznato, korišćenjem ranije izvedenih jednačina ogledala i sfernih graničnih površina, izraziti samo preko  $a$  i  $r$ .

ZA OGLEDALO se iz jednačine (12.33) za  $b$  može dobiti  $b=ar/(2a-r)$  i zamenom  $u$  izraz za uvećanje sfernog ogledala (12.40) dobija:

$$u = -\frac{r}{2a-r} \quad (12.43)$$

ZA SFERNU GRANIČNU POVRŠINU se iz jednačine prelamanja zraka (12.39) može izraziti  $b$  kao:  $b = arN_2/\{aN_2-(a+r)N_1\}$ , pa se zamenom  $u$  izraz za uvećanje na sfernoj graničnoj površini dobija:

$$u = \frac{rN_1}{rN_1 - a(N_2 - N_1)} \quad (12.44)$$

Na ovaj način uvećanje je izraženo preko veličina koje karakterišu kako samu površinu ( $r$ ), tako i sredine koje ona razdvaja ( $N_1$  i  $N_2$ ) Preko njih se za svako rastojanje  $a$  može naći uvećanje.

## JEDNAČINE OGLEDALA I SFERNE GRANICE IZRAŽENE PREKO ŽIŽNE DALJINE

Lik predmeta koji se nalazi u beskonačnosti naziva se "žiža lika",  $F'$ , a tačka na optičkoj osi  $F$  čiji je lik u beskonačnosti zove se "žiža predmeta". Udaljenje ovih tačaka od temena ogledala ili sferne granične površine može se dobiti iz njihovih jednačina, a nazivaju se žižne daljine i označavaju se respektivno sa  $f'$  i  $f$ .

Za ogledalo se iz njegove jednačine respektivnom zamenom  $b=f'$  i  $a=\infty$ , odnosno  $b=\infty$  i  $a=f$  dobija

$$f' = \frac{r}{2}, \quad \text{odnosno} \quad f = \frac{r}{2}. \quad (12.45)$$

Dakle u slučaju sfernog ogledala žiže lika i predmeta se nalaze na istom rastojanju  $f=f'$  od temena, jednakom polovini poluprečnika krivine ogledala. Jednačina ogledala izražena preko žižne daljine je prema tome:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (12.46)$$

Za sferne prelomne površine je za  $a=\infty$  i  $b=f'$  žiža lika data izrazom:

$$f' = \frac{rN_2}{N_2 - N_1} \quad (12.47)$$

Za lik u beskonačnosti je  $b=\infty$  i  $a=f$ , pa je žiža predmeta:

$$f = \frac{rN_1}{N_2 - N_1} \quad (12.48)$$

Iz ovih relacija sledi veza medju žižama lika i predmeta:

$$\frac{N_2}{f'} = \frac{N_1}{f} \quad (12.49)$$

Rastojanja žiža predmeta i lika za sfernu graničnu površinu su različita i njihov odnos je jednak odnosu apsolutnih indeksa prelamanja sredina koje ta površina razdvaja.

Jednačina sferne granične površine izražena preko žižnih daljina može se pisati kao:

$$\frac{N_1}{a} + \frac{N_2}{b} = \frac{N_1}{f} = \frac{N_2}{f'} \quad (12.50)$$

## 12.7. Optička sočiva. Debelo i tanko sočivo. Optička moć.

Sočivo je u opštem slučaju optički homogena i izotropna materijalna sredina ograničena sa dve sferne površine koje se nalaze na istoj optičkoj osi. U posebnom slučaju jedna od površina može imati beskonačno veliki poluprečnik krivine, odnosno može biti ravna.

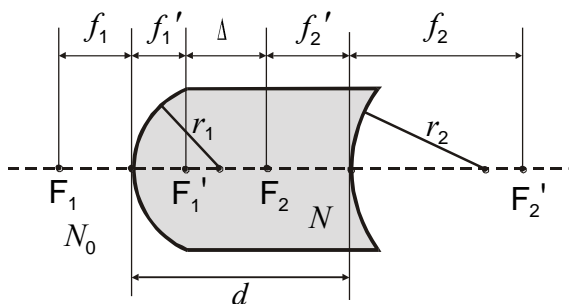
Na crtežu na sl. 12.22. su označene glavne karakteristike jednog debelog optičkog sočiva. Oznake su uobičajene. Debljina sočiva  $d$  je rastojanje izmedju temena sfernih površina. Rastojanje izmedju žiže lika prve i žiže predmeta druge površine označeno je sa  $\Delta$  i naziva se "optički interval" sočiva. Ove žiže su definisane kao u prethodnom izlaganju.

Sa slike se može videti da izmedju žižnih daljina, debljine i optičkog intervala sočiva važi sledeća relacija:

$$d = f_1' + \Delta + f_2$$

odnosno

$$\Delta = d - f_1' - f_2 \quad (12.51)$$



Slika 12.22. Karakteristike sočiva

Na osnovu jednačina za dve sferne površine, koje čine sočivo, može se naći izraz za ukupnu žižnu daljinu sočiva. Ovde ga, zbog složenosti, nećemo izvoditi, već samo navesti konačan oblik:

$$f = -\frac{f_1' \cdot f_2}{\Delta} \quad (12.52)$$

Zamenom vrednosti za  $f_1$ ,  $f_2$  i  $\Delta$  iz (12.48) i (12.51), dobićemo žižnu daljinu sočiva izraženu preko njegovih karakteristika :

$$f = -\frac{n}{n-1} \frac{r_1 \cdot r_2}{d(n-1) + n(r_2 - r_1)} \quad (12.53)$$

gde je  $n=N/N_0$ . Iz ove jednačine, zbog njene simetričnosti, sledi da je  $f=f'$  odnosno žižne daljine lika i predmeta za debelo sočivo su jednake. Ovo je prema slici izvedeno za slučaj da su obe površine izdubljene na istu stranu. U praksi je češći slučaj da je jedna površina ispupčena a druga izdubljena. U tom slučaju poluprečnik krivine ( $r_2$ ) menja znak, pa je žižna daljina:

$$f = f' = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{n(r_1 + r_2) - d(n-1)} \quad (12.54)$$

Za sočiva se često definiše optička moć ili optička jačina sočiva –  $D$ , kao recipročna vrednost žižne daljine:

$$D = \frac{1}{f} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n(r_1 + r_2) - d(n-1)}{r_1 \cdot r_2} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] - \frac{(n-1)^2}{n} \frac{d}{r_1 \cdot r_2} \quad (12.55)$$

U slučaju kada je  $d$  malo - sočivo se naziva "tankim" i njegova optička moć je:

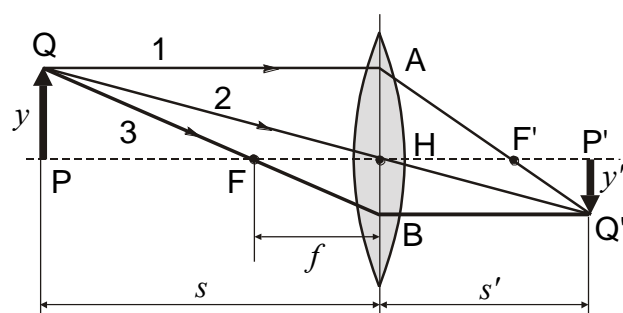
$$D = \frac{1}{f} = (n-1) \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] = (n-1) \cdot \rho \quad (12.56)$$

gde je  $\rho = 1/r_1 + 1/r_2$  takozvana ispupčenost sočiva, a  $f$  se računa od sredine sočiva.

## 12.8. Jednačine i uvećanja tankog i debelog sočiva.

Položaj lika i uvećanje sočiva mogu se odrediti ako je poznata njegova žižna daljina ( $r_1$ ,  $r_2$  i indeks prelamanja su već uključeni preko žižnih daljina). Kao što smo već naveli, jednačina koja daje položaj lika naziva se jednačina sočiva, a odnos veličina lika i predmeta se naziva uvećanje sočiva. Te zavisnosti se dobijaju geometrijskim putem.

ZA TANKO SOČIVO postupa se prema slici 12.23. Zrak označen sa (1) paralelan osi određuje  $F'$ , zrak (2) ne skreće, a zrak (3) kroz  $F$  je posle sočiva paralelan njegovoj osi. Iz sličnosti trouglova  $QAB$  i  $FHB$  sledi:



Slika 12.23. Tanko sočivo

$$\frac{y - y'}{s} = -\frac{y'}{f} \quad (12.57)$$

pri čemu je  $y'$  uzeto sa znakom minus, jer se lik nalazi ispod ose sočiva. Slično se za drugu stranu iz sličnosti trouglova  $ABQ'$  i  $AHF'$  može dobiti:

$$\frac{y - y'}{s'} = -\frac{y}{f} \quad (12.58)$$

Sabiranjem i sredjivanjem ovih izraza

dobija se:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (12.59)$$

što predstavlja **Gausovu jednačinu tankog sočiva**. Iz nje se može dobiti  $s'$ , ako se znaju  $s$  i žižna daljina  $f$ . Uvećanje se dobija deobom gornjih jednačina:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (12.60)$$

i naziva se poprečno linearno uvećanje.

ZA DEBELO SOČIVO postupak je isti, sa tim što se rastojanja  $s$  i  $s'$  uzimaju od glavnih ravni sočiva. To su ravni na kojima se seku produžetci odgovarajućih upadnih i prelomljenih zrakova koji prolaze kroz odgovarajuću žižu, kao na slici 12.24. Tačke  $H$  i  $H'$  se nazivaju glavne tačke sočiva. Glavne ravni su obično unutar sočiva. Slično se određuju i glavne ravni za sisteme od više sočiva, a na osnovu određivanja žiža, koje su preko njih i definisane.

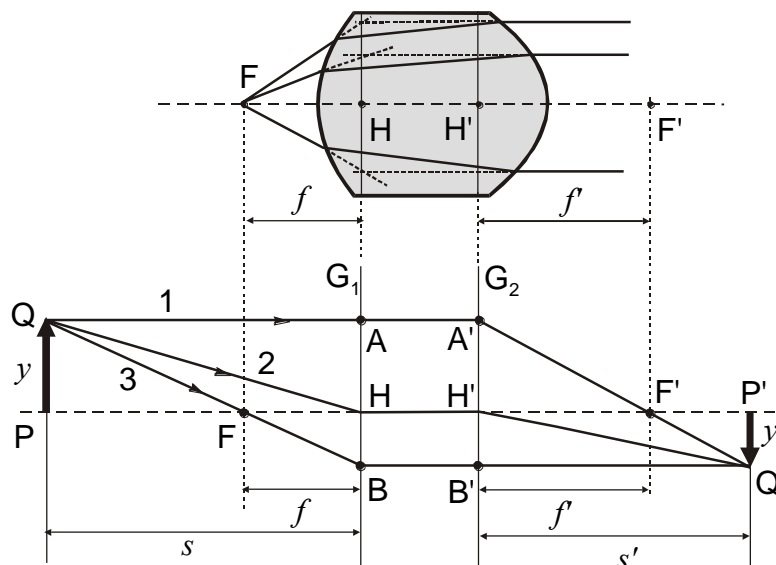
Iz sličnosti trouglova  $ABQ$  i  $BHF$ , kao i  $A'B'Q'$  i  $A'H'F'$  je

$$\frac{y - y'}{s} = -\frac{y'}{f} \quad \text{odnosno} \quad \frac{y - y'}{s'} = \frac{y}{f'}$$

Sabiranjem, odnosno deljenjem ovih izraza se za jednačinu sočiva i njegovo uvećanje respektivno dobijaju izrazi:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \text{i} \quad \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (12.61)$$

uz napomenu da su za razliku od tankog sočiva  $s$  i  $s'$  računati ne od centra sočiva, već od glavnih ravni sočiva.



Slika 12.24. Debelo sočivo

## 12.9. Sistem dva sočiva.

Dva tanka sočiva žižnih daljina  $f_1$  i  $f_2$ , koja imaju zajedničku optičku osu, slika 12.25, ponašaju se kao jedno debelo sočivo. Žižna daljina takvog sistema je, dakle, data izrazom:

$$f = f' = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta} \quad (12.62)$$

pri čemu žižna daljina može biti i pozitivna i negativna, odnosno sistem se može ponašati kao sabirno ili rasipno sočivo.

Većina optičkih uređaja sadrži kombinaciju od dva sočiva. Najjednostavniji su sistemi sa nultim optičkim intervalom, a zovu se još i teleskopski (durbinski) sistemi. U tim sistemima se ravan lika prvog sočiva poklapa sa ravni predmeta drugog (ravan lika ili predmeta je žižna ravan). Žižna daljina takvog sistema je, dakle, beskonačna. Snop zraka koji ulazi u sistem kao paralelan izlazi opet kao paralelan.

Uvećanje za takav sistem se definiše kao odnos ugla  $\alpha'$  pod kojim se vidi lik i ugla  $\alpha$  pod kojim se vidi predmet:

$$u = \frac{\alpha'}{\alpha} \cong \frac{\text{tg}\alpha'}{\text{tg}\alpha} = \frac{f_1}{f_2} \quad (12.63)$$

Uvećanje je dakle utoliko veće ukoliko je žižna daljina objektiva (sočivo bliže objektu)  $f_1$  veća, a žižna daljina okulara (sočivo bliže oku)  $f_2$  manja.

Optička moć sistema dva sočiva se nalazi iz izraza za žižnu daljinu debelog sočiva ( $f = -f_1 \cdot f_2 / \Delta$ ) i izraza za optički interval ( $\Delta = d - f_1' - f_2$ ):

$$D = \frac{1}{f} = \frac{d - f_1 - f_2}{f_1 \cdot f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad (12.64)$$

Za sisteme za koje se sočiva dodiruju,  $d=0$ ,  $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$ , će biti

$$D = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = D_1 + D_2 \quad (12.65)$$

optička moć je jednaka zbiru optičkih moći pojedinih sočiva.

Ako se žižna daljina izrazi u metrima, tada se jedinica optičke moći naziva "dioptrija". Sočivo ima optičku moć od jedne dioptrije ako mu je  $f=1$  m.

## 12.10. Greške sočiva.

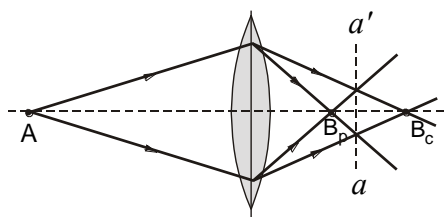
U opštem slučaju svetlosni zraci koji padaju na sočivo nisu paraksijalni, tj. nisu paralelni glavnoj optičkoj osi sočiva. Usled toga lik je na različite načine izobličen, odnosno optički sistem koji ga stvara unosi grešku - **aberaciju**. Navešćemo samo osnovne greške koje su najizrazitije kod optičkih sistema. Pri tome treba naglasiti da to nisu greške u izradi sočiva, već su posledica fizičkih (hromatska aberacija) i geometrijskih zakonitosti prelamanja svetlosti (sferna aberacija, astigmatizam, koma, krivina polja i distorzija).

1) **HROMATSKA ABERACIJA**. Disperzija svetlosti staklom od koga je sočivo napravljeno je funkcija talasne dužine svetlosti. Zbog toga se zraci bele svetlosti posle sočiva neće seći u jednoj tački. Pošto se zrak sa većim  $\lambda$  manje prelama, i obrnuto, to će za svaku talasnu dužinu praktično postojati po jedan lik. Bliže sočivu biće lik plave boje - Bp, a dalje od njega crvene boje - Bc. Između ta dva lika nalaziće se likovi svih ostalih boja.. Na nekoj ravni aa' lik neće, dakle, biti jedna tačka, već

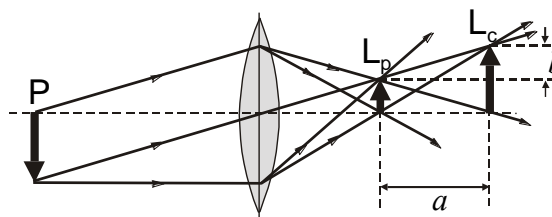
obojen kružić. Ako se ta ravan nalazi u  $B_p$  taj kružić će biti crven sa plavom tačkom u sredini. U  $B_c$  će biti plav krug sa crvenom tačkom u sredini, slika 12.26.

Za tačku van ose razlikuju se "aksijalna" i "poprečna" hromatska aberacija. Prema slici 12.27., za lik P i dato sočivo razlikuju se sledeći pojmovi:

- L<sub>p</sub>-lik u plavoj oblasti
- L<sub>c</sub>-lik crvene svetlosti  $\lambda_c > \lambda_p$
- a-aksijalna hromatska aberacija
- b-poprečna hromatska aberacija.



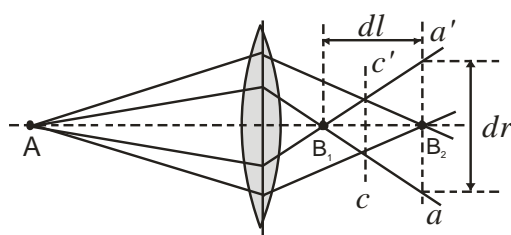
Slika 12.26. Hromatska aberacija



Slika 12.27. Aksijalna i poprečna aberacija

Hromatska aberacija se otklanja kombinovanjem sabirnog i rasipnog sočiva načinjenih od stakla različitih vrsta, na primer kron i flint stakla. Pošto kron staklo ima manju relativnu disperziju, a flint veću, njihova kombinacija može da ima skoro kompenzovanu hromatsku aberaciju. Ovakva kombinacija sočiva se naziva "**ahromat**". Ahromat međutim ne može da se postigne za svaku prisutnu talasnu dužinu u spektru svetlosti. Obično se postižu dobre osobine za dve talasne dužine. Kod vizuelnih optičkih instrumenata (lupa, mikroskop) to su 656,3 i 486,1 nm. Kod fotoaparata to su 589,3 i 434 nm.

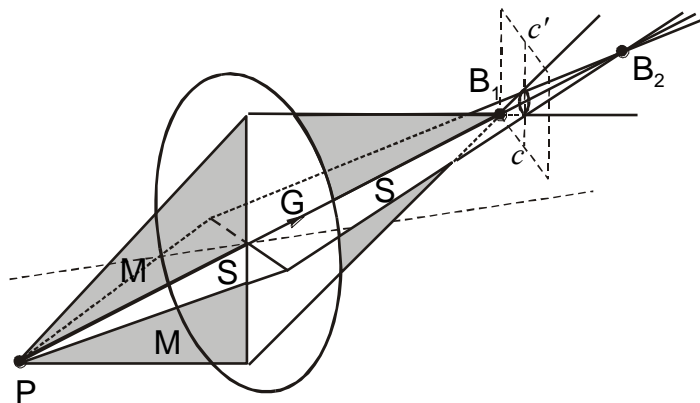
2) **SFERNA ABERACIJA**. Ova greška je posledica činjenice da se zraci koji prolaze kroz sočivo na različitim rastojanjima od ose ne presecaju u jednoj tački. Zraci koji su udaljeniji od ose daju lik bliže sočivu, i obrnuto, kao na slici 12.28. Ta pojava je posledica činjenice da se odstupa od paraksijalne aproksimacije u kojoj je izvedena jednačina sočiva. Govoreći o prelamanju na sfernoj površini videli smo da jednačina prelamanja za veće  $a$  zavisi od upadnog ugla zraka.



Slika 12.28. Sferna aberacija

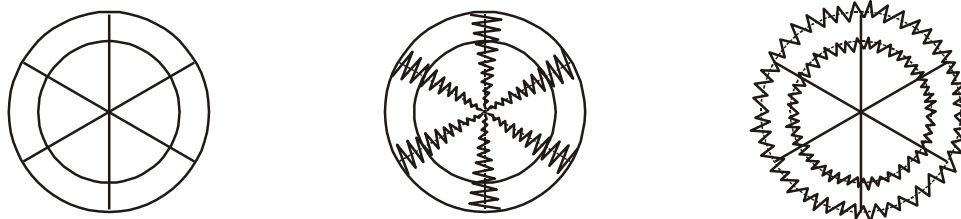
Rastojanje  $d \ell = B_1 B_2$  se zove "uzdužna sferna aberacija". Na ravni  $aa'$  postavljenoj u mestu presecanja zrakova koji su bliže osi pojaviće se, kako je to ilustrovano na priloženoj slici kružić prečnika  $dr$  koji daje veličinu "transverzalne sferne aberacije". Postoji ravan  $CC'$  gde je lik najoštriji, to je tzv. ravan najmanje aberacije. Delimično otklanjanje ove aberacije postiže se korišćenjem samo centralnog dela sočiva uz pomoć dijafragme sa manjim otvorom koja otklanja divergentne zrake. Bolje otklanjanje se postiže kombinovanjem više sočiva pogodnog oblika, odnosno izradom sabirnog sočiva u obliku "meniksa"-udubljenog prema predmetu. Ovo je jedina geometrijska aberacija koja se javlja i za tačku koja leži na osi sočiva.

3) **ASTIGMATIZAM.** Ova greška se ispoljava kod likova predmeta (tačkaka) udaljenih od ose sočiva, slika 12.29. To je posledica sferne aberacije koja van ose daje lik ne u vidu kruga već eliptične slike. Ako se tačkasti predmet P nalazi van ose, njegov lik neće biti jasan. U tom slučaju se na osnovu priložene slike mogu definisati odgovarajuće veličine koje karakterišu ovu pojavu, a to su:  $B_1$ -primarni, **meridijalni** lik; zatim  $B_2$ -sekundarni ili **sagitalni** lik;  $CC'$ -ravan najmanjeg astigmatizma;  $M$ -meridijalna ravan;  $S$ -sagitalna ravan i  $G$ -glavni zrak. Pri tome zraci koji leže u vertikalnoj ravni (koja



Slika 12.29. Astigmatizam

koja sadrži predmet i lik i prolazi kroz osu) daju lik bliže sočivu, dok "horizontalni" daju lik dalje. Zato se na zaklonu u  $B_1$ , gde se presecaju vertikalni (ili meridijalni) zraci bitu neoštri delovi lika koji dolaze od horizontalnih (ili sagitalnih) zrakova. Za tačkasti izvor likovi su eliptični svuda sem u  $B_1$ ,  $B_2$  i  $CC'$  gde su kružnog oblika. Položaj likova kod rasipnog sočiva je obrnut-bliži sočivu je sagitalni lik.

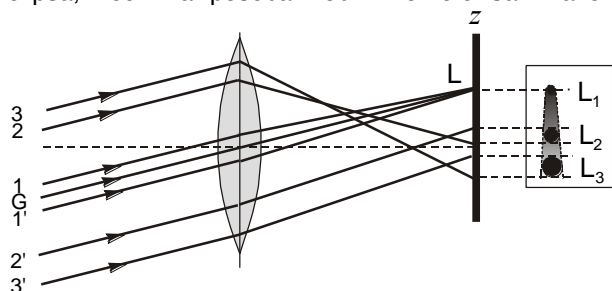


Slika 12.30. Predmet, meridijalni i sagitalni lik

Astigmatizam, odnosno razlika u jasnosti slike zbog oblika sočiva najbolje se vidi na primeru aksijalno simetričnog predmeta, slika 12.30.

Astigmatizam se otklanja kombinovanjem većeg broja sočiva (najmanje tri), kao kod fotografskog objektiv. Takva kombinacija se naziva "**astigmat**".

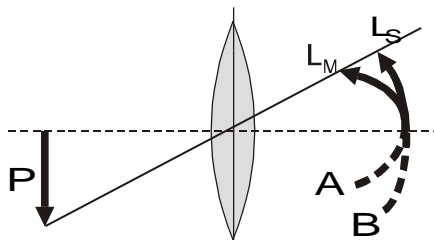
4) **KOMA.** Nastaje, kao i astigmatizam, za tačke predmeta koje su van ose. Za razliku od astigmatizma, koji širi lik u pravcu ose sočiva, koma ga širi odnosno čini nejasnim u ravni normalnoj na osu sočiva. Takodje je posledica nemogućnosti da se formira lik u istoj tački od zrakova koji prolaze kroz centar sočiva i van njega. Lik tačkastog predmeta nije ni tačka, ni krug, ni elipsa, već ima poseban oblik komete sa izraženim repom (otuda i naziv). Postoji čak i kada je sferna aberacija otklonjena. Zraci bliski glavnom zraku  $G$  koji prolazi kroz teme ili centar sočiva daju tačkasti lik- $L$ . Ostali zraci doprinose stvaranju krugova različitih prečnika ( $2$  i  $2'$ ,  $3$  i  $3'$ ) i raznih položaja. Konačan lik je zbog toga u vidu komete, slika 12.31.



Slika 12.31. Koma

Efekat kome se može takodje umanjiti i to izborom odgovarajućih krivina površina sočiva.

5) **ISKRIVLJENOST POLJA**. Kada je predmet u ravni normalnoj na optičku osu, njegov lik, formiran kombinacijom sočiva kod kojih su sve razmotrene aberacije svedene na minimum, neće u opštem slučaju biti u ravni, već na nekoj zakrivljenoj površini. Ova aberacija (pojava) naziva se iskrivljenost polja. Meridijalne i sagitalne tačke ( $L_M$  i  $L_S$ ) lika leže na zakrivljenim površinama primarnih (A) i sekundarnih likova (B), slika 12.32.

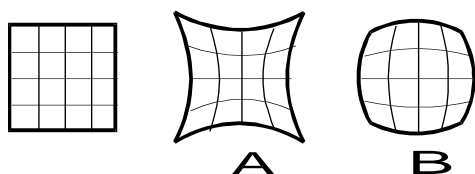


Slika 12.32. Iskrivljenost polja

Površina likova najmanje deformacije je negde između ovih površina. Pogodno je odabrati kombinaciju kod koje su površine A i B iste krivine, ali suprotno orijentisane, odnosno jedna konkavna a druga konveksna. Tada je površina najmanje deformacije ravan, i to normalna na osu sočiva. Problem je što tada astigmatizam postaje značajan.

Ovu aberaciju važno je otkloniti kod fotoobjektiva, dok kod vizuelnih instrumenata nije tako bitna. Najuspešnije se otklanja pomoću blende, korišćenjem samo centralnog dela sočiva.

6) **DISTORZIJA** je pojava različitog uvećanja raznih segmenata predmeta u zavisnosti od udaljenosti od ose sočiva. Ovo se dakle ne odnosi na oštrinu lika (kao prve četiri navedene aberacije) već na njegovu deformisanost sl. 12.33. Nastaje usled promene poprečnog uvećanja sa promenom udaljenosti tačaka predmeta od ose sočiva. Ako se uvećanje povećava od ose lik je konveksan prema osi, slučaj A, obrnuto je konkavan, slučaj B. Ova distorzija je naročito štetna kod fotoobjektiva. Može se umanjiti postavljanjem blende u ravni simetrije sočiva.



Slika 12.33. Distorzija

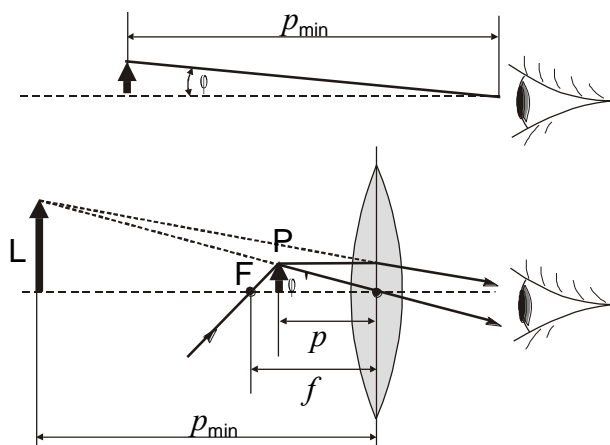
Sve aberacije nije moguće otkloniti istovremeno. Obično su najštetnije sferna aberacija i koma. Najjednostavnije ih je smanjiti postavljanjem manje dijafragme ispred sočiva i postizanjem paraksijalnosti zrakova oko centra sočiva. Medjutim na taj način se gubi na intenzitetu svetlosti, a moguća je i pojava difrakcije svetlosti, ako je otvor dijafragme mali.

## 12.11. Optički instrumenti.

To su sistemi sastavljeni od različitih optičkih elemenata (ogledala, sočiva, planparalelnih ploča, prizmi) kojima se, dobijanjem odgovarajućih likova, proširuju granice neposrednog vizuelnog opažanja predmeta. Takvi instrumenti su: lupa, mikroskop, teleskop, kamera, projekcioni aparat, spektroskop, itd.

Prva tri, koja ćemo i ovde opisati, služe da daju uvećane slike-likove predmeta koje golim okom teško opažamo, bilo zato što su mali, bilo što su udaljeni.

**LUPA.** Prirodna veličina predmeta određena je veličinom njegovog lika na mrežnjači, odnosno uglom  $\varphi$  pod kojim se predmet vidi. Približavanjem predmeta ugao se povećava, ali samo do "granice jasnog vida" -  $p_{min}$ , oko 25 cm od oka. To je granica do koje očno sočivo može da menja svoju žižnu daljinu odnosno zakrivljenost - što se naziva akomodacija oka. Stavljanjem sabirnog sočiva ispred oka predmet može da se približi odnosno da se poveća vidni ugao na  $\varphi'$ , slika 12.34. Takvo sočivo je lupa. Lik koji se dobije je imaginaran i nalazi se na  $p_{min}$  ili na većem rastojanju. Položaj lika L zavisi od udaljenja predmeta-p, koji se obično postavlja između sočiva i njegove žiže.



Slika 12.34. Lupa

Uvećanje se definiše kao odnos uglova  $\varphi'$  pod kojim se predmet vidi i  $\varphi$  pod kojim bi se video da je na  $p_{\min}$  od oka. Za male uglove je:

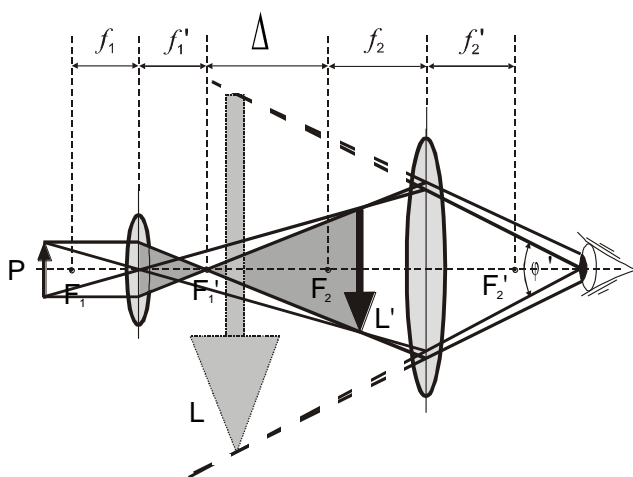
$$u = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{P/p}{P/p_{\min}} = \frac{p_{\min}}{p} \quad (12.66)$$

Najpodesnije je da je  $p$  blisko žiži  $f$ , pa je tada uvećanje:

$$u = \frac{p_{\min}}{f} \quad (12.67)$$

Kako je  $p_{\min} \cong 25$  cm, uvećanje zavisi isključivo od žižne daljine lupe. Na primer lupa sa  $f=0,5$ mm bi imala uvećanje od oko 500 puta. Medjutim, takvu lupu je prvo veoma teško napraviti zbog malog dijametra, a sa druge strane takvo sočivo bi imalo veoma izražene aberacije. Bez korekcija na aberacije može se napraviti lupa sa uvećanjem oko 5 puta ( $f=5$  cm). Lupa kao sistem sočiva sa korekcijama aberacija može da dostigne uvećanje do oko 25 puta ( $f= 1$  cm). Za veća uvećanja koristi se mikroskop.

**MIKROSKOP** se sastoji od dva sabirna sočiva, objektiv i okulara, na međusobnom rastojanju većem od zbira njihovih žižnih daljina, koja su postavljena aksijalno na krajevima cevi, "tubusa", kao na slici 12.35.



Slika 12.35. Mikroskop

Predmet se postavlja nešto dalje od žiže objektiv i daje obrnut i uvećan realan lik  $L'$  - koji se okularom posmatra kao lupom. Konačno se dobija ponovo uvećan imaginaran lik, kao na slici. Žižne daljine celog sistema su:

$$f = -\frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta}$$

$$i \quad f' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}$$

Uvećanje je kao i kod lupe dato odnosom uglova  $\varphi'$  i  $\varphi$ , odnosno

njihovih tangensa:

$$u = \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{P}{p_{\min}}, \quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{L'}{f_2'} \cong \frac{L'}{f_2}$$

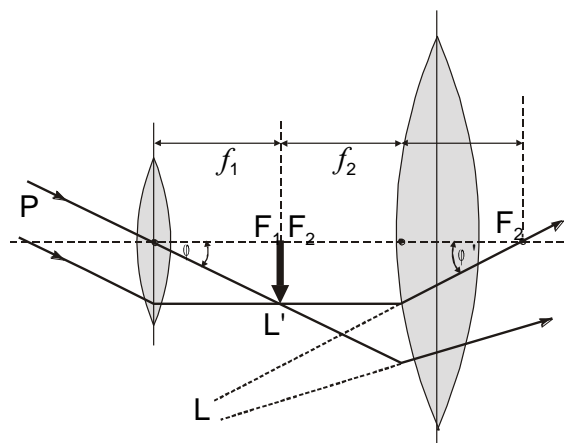
gde je  $L'$  lik koji daje objektiv, a  $f_2$  žižna daljina okulara. Kako je  $L'$  skoro u žiži okulara, iz sličnosti osenčenih površina je dalje  $L'/P \cong \Delta/f_1$ , pa se konačno za uvećanje dobija:

$$u = \frac{\Delta \cdot p_{\min}}{f_1 \cdot f_2} \quad (12.68)$$

Veličina  $\Delta$  je obično 15-20 cm,  $f_1$  nekoliko milimetara, a  $f_2$  je nekoliko centimetara. Može se postići uvećanje od 2500-3000 puta, medjutim maksimalno korisno uvećanje je oko 1000 puta, kao

što ćemo kasnije videti. Mikroskopi se takodje dosta koriste za fazno-kontrastnu, interferencionu, fluorescentnu i polarizacionu mikroskopiju.

**TELESKOP** služi za posmatranje veoma udaljenih predmeta. Razlikuju se "refrakcioni"-sastavljeni od sočiva i "refleksioni"- teleskopi sastavljeni od ogledala i sočiva. Ovde ćemo razmotriti prvi.



Slika 12.36. Teleskop

Objektiv i okular su složena sabirna sočiva postavljena tako da im se unutrašnje žiže poklapaju. Objektiv daje realan, umanjen i obrnut lik  $L'$  koji se praktično nalazi u žiži jer je predmet veoma udaljen. Okular daje imaginarnan lik koji se vidi pod većim uglom  $\varphi'$  nego da se predmet posmatra neposredno, slika 12.36. Iz osenčenih trouglova je:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{L'}{f_2} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{L'}{f_1}$$

što za uvećanje teleskopa daje sledeći izraz:

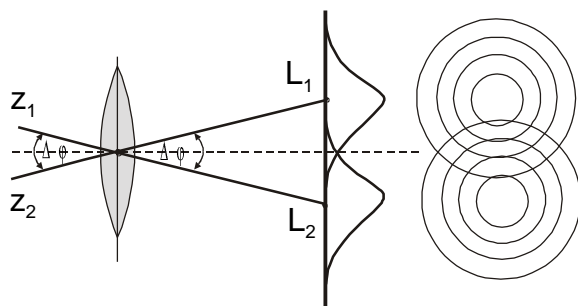
$$u = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{f_1}{f_2} \quad (12.69)$$

i može biti znatno, ali opet u granicama "korisnog uvećanja".

## 12.12. Moć razdvajanja i granice uvećanja optičkih instrumenata.

Osnovna svrha uvećanja optičkim instrumentima je da se učine vidljivim detalji predmeta koji se neposrednim posmatranjem ne mogu zapaziti. Uvećanja zavise od žižnih daljina i mogu se praktično učiniti proizvoljno velikim. Međutim posle neke granice daljim se uvećanjem ne dobija ništa u razaznavanju detalja jer lik postaje neoštar-razliven. To je posledica talasne prirode svetlosti koja se u geometrijskoj optici ignoriše.

Ekspirimenti pokazuju da lik tačkastog izvora nije tačka, već svetli kružić, malog ali konačnog prečnika (tzv. centralni maksimum) oivičen nizom koncentričnih prstenova koji su naizmenično svetli i tamni. To je u stvari difrakciona slika tačkastog izvora koja nastaje difrakcijom talasa na kružnom otvoru ili kućištu objektivu, kao posledica važenja Hajgens-ovog principa. Osvetljenost ili intenzitet kružića opada od centra ka periferiji. Ova pojava je izraženija za manje prečnike instrumenta.



Slika 12.37. Moć razdvajanja

Ako su dve tačke predmeta tako blizu da im se difrakcioni likovi preklapaju, tada se oni neće videti odvojeno. Sposobnost optičkog sistema da daje odvojene likove dva bliska tačkasta izvora opisuje se veličinom koja se naziva moć razlaganja-R:

$$R = \frac{1}{\Delta\varphi_{\min}} \quad (12.70)$$

gde je  $\Delta\varphi_{\min}$  minimalno ugaono rastojanje izmedju dve tačke predmeta čiji se likovi  $L_1$  i  $L_2$  dobijaju odvojeno, slika 12.37. Daljim porastom uvećanja instrumenta likovi susednih tačkaka počinju da se preklapaju i dobijena slika postaje nejasna.

Ugaona širina ( $\theta$ ) poluprečnika difrakcionog kružića ja za kružne otvore data sa

$$\sin\theta = 1,22 \frac{\lambda_o}{D} \quad \text{ili za malo } \theta \ (\lambda_o \ll D) \quad \theta = 1,22 \frac{\lambda_o}{D} \quad (12.71)$$

gde je  $\lambda_o$  talasna dužina upadne svetlosti, a D prečnik otvora, odnosno sočiva. Pošto je  $\theta \propto 1/D$  za refrakcione teleskope se objektivni izradjuju prečnika po nekoliko metara.

Prema Rejljevom kriterijumu likovi dva tačkasta izvora se još mogu razdvojiti ako je rastojanje medju njima veće ili jednako poluprečniku difrakcionog kružića. Dakle, uslov za razdvojenost likova je:

$$\Delta\varphi \geq \theta \quad \text{odnosno} \quad \Delta\varphi \geq 1,22 \frac{\lambda_o}{D} \quad (12.72)$$

odakle sledi:

$$R \leq \frac{D}{1,22 \cdot \lambda_o} \quad (12.73)$$

Na osnovu ovih relacija i definicija može se odrediti maksimalno uvećanje koje je još na granici razdvajanja likova pojedinih tačaka. Veća uvećanja postaju štetna.

Dijametar zenice oka pri normalnom osvetljenju je oko 2 mm. Za zelenu boju svetlosti ( $\lambda_o = 500 \text{ nm}$ ) za koju je oko najosetljivije, utvrđeno je  $\Delta\varphi_{\min} \cong 0,3 \times 10^{-3} \text{ rad} \cong 1'$ . (Interesantno je da ovom ugaonom rastojanju otprilike odgovara i rastojanje dva štapića odnosno čepića u mrežnjači oka). Dakle, oko može da razdvoji dve tačke na 100 m udaljenosti ako su razmaknute najmanje 3 cm. ( $0,03/100 = 0,3 \times 10^{-3}$ ).

Teleskop objektiv od 1 m ima  $\Delta\varphi_{\min} = 0,13''$  i dve tačke na razmaku od 3 cm može da vidi na 50 km. Odavde sledi i maksimalno uvećanje koje treba da bude toliko da se lik vidi pod uglom ne manjim od  $1'$ , a to je  $1'/0,13'' = 460$  puta. Vidimo takodje da kod teleskopa moć razlaganja zavisi od prečnika objektiv D, a sa druge strane, uvećanje zavisi samo od žižne daljine. Moć razdvajanja ograničava uvećanje.

I kod mikroskopa "vidljivost" ne zavisi samo od uvećanja, već i od moći razdvajanja, koja je ovde zbog položaja predmeta različita nego kod teleskopa. Teorijski se za mikroskop dobija da je minimalno rastojanje izmedju dve tačke koje se mogu razdvojiti dato sa:

$$d_{\min} = 1,22 \frac{\lambda_o}{2 \cdot n \cdot \sin \alpha} \quad (12.74)$$

gde je n indeks prelamanja sredine izmedju predmeta i okulara,  $2\alpha$  je ugao konusa svetlosnog snopa koji pada na objektiv iz tačke predmeta na osi sočiva. Veličina  $n \cdot \sin \alpha$  se naziva numerička apertura objektiv i obeležava se sa NA. U cilju povećanja moći razdvajanja mikroskopa, tj. smanjenja  $d_{\min}$ , izmedju predmeta i objektiv se stavlja prozračno imerziono ulje sa  $n=1,5$ . Tada je za  $\sin \alpha=1$ ,  $d_{\min}=0,4\lambda_o$ , što za  $\lambda_o=500 \text{ nm}$  daje  $d_{\min}=0,2 \text{ } \mu\text{m}$ . Manja rastojanja se ne mogu razdvojiti. Ako pretpostavimo da se lik nalazi na 25 cm (granica jasnog vida), tada se iz podatka za  $\Delta\varphi_{\min}$  oka ( $1'$ ), relacije (12.74) i izraza za poprečno uvećanje  $u_p=x/d_{\min}$ , gde je x linearni razmak izmedju centara difrakcionih likova, da zaključiti da je uvećanje od oko 400 puta uskladjeno sa moći razdvajanja i predstavlja tzv. "normalno" uvećanje mikroskopa. Maksimalno korisno uvećanje može biti 2-4 puta veće od normalnog, odnosno 800-1600 puta. Veća uvećanja su čak i štetna po oštrinu lika.

Dakle, efekti difrakcije nisu bitni za obična sočiva, medjutim za vrhunsku optiku to je limitirajući faktor u postizanju velikih uvećanja i kvalitetnog i oštrog lika.

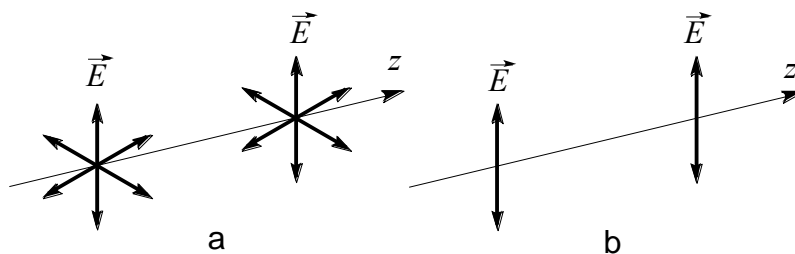
## ELEMENTI TALASNE OPTIKE

## 13.1. Polarizacija svetlosti.

Da bi se objasnile pojave kao što su polarizacija, interferencija i difrakcija, ne može se koristiti model zrakova geometrijske optike, već talasna optika.

Kod svetlosti, kao transverzalnog talasa, vektor jačine električnog (i magnetnog) polja osciluje normalno na pravac prostiranja talasa. Postoji, međutim, bezbroj ravni koje sadrže pravac prostiranja i u kojima je moguće oscilovanje vektora polja. Vektor jačine polja i pravac prostiranja određuju ravan oscilovanja. Ako je oscilovanje asimetrično, različito u različitim ravnima, govorimo o efektima polarizacije svetlosti.

Ako se oscilovanje vrši samo u jednoj ravni, takav talas, odnosno svetlost je linearno ili ravanski polarizovana, sl. 13.1.b. Talas pojedinačnog emitera (foton iz atoma ili molekula) je linearno polarizovan. Prirodna svetlost iz makroskopskog izvora, zbog haotične orijentisanosti pojedinačnih emitera sadrži talase svih mogućih orijentacija, pa je u takvoj svetlosti zastupljeno oscilovanje vektora  $\vec{E}$  u svim pravcima podjednako. U tom slučaju vrh vektora  $\vec{E}$  opisuje krug, kao na slici, a. Takva svetlost se naziva kružno ili cirkularno polarizovana, ili čak nepolarizovana.



Slika 13.1. Ravanski i cirkularno polarizovana svetlost

Moguća je i delimična orijentisanost vektora  $\vec{E}$ , kada njegov vrh opisuje elipsu, to je eliptički polarizovana svetlost. Dalje, vrh vektora  $\vec{E}$  može da rotira sa vremenom udesno (smer kazaljke na satu) ili ulevo, pa je u zavisnosti od toga svetlost desno ili levo kružno ili eliptično polarizovana.

Polarizovana svetlost se može dobiti na dva načina:

1. iz izvora čiji emiteri (atomi) su na neki način prinudjeni da emituju svetlost koja je polarizovana;
2. "filtriranjem" prirodnih izvora svetlosti, tako da se izdvoje samo oni talasi u kojim  $\vec{E}$  osciluje na određen način.

Prvi način se redje koristi jer je složeniji i praćen je specifičnim efektima (Štarkov, Zemanov efekat). Na primer, zagrejan gas ili plazma u magnetnom polju emituje delimično polarizovanu svetlost. Neki laseri takodje daju polarizovanu svetlost.

Najčešće se koristi drugi postupak u kome se iz snopa nepolarizovane svetlosti izdvajaju talasi u kojim  $\vec{E}$  osciluje samo u određenom pravcu i to propuštanjem kroz "polarizatore"-supstance ili sisteme koji reflektuju ili propuštaju samo oscilacije u određenoj ravni-ravni polarizacije. Oscilacije normalne na tu ravan se delimično ili potpuno zadržavaju. Polarizator upotrebljen za proučavanje već polarizovane svetlosti se naziva "analizator".

Polarizatori se dele na tri osnovne grupe:

-**REFLEKSIONI** se zasnivaju na zavisnosti koeficijenta refleksije od stanja polarizovanosti svetlosti. Ovaj koeficijent je različit za razne položaje ravni polarizacije u odnosu na ravan refleksije.

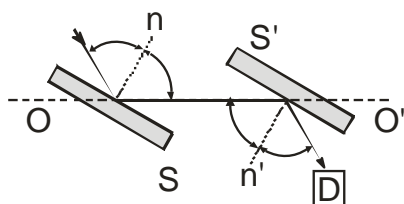
-**DVOJNOPRELAMAJUĆI** se zasnivaju na optičkoj anizotropiji monokristala, koja se ogleda u tome da je indeks prelamanja određenih supstanci različit za različite orijentacije ravni polarizacije.

-**DIHROIZAM** se zasniva na zavisnosti koeficijenta apsorpcije od položaja ravni polarizacije. Za određenu orijentaciju koeficijent je mali, dok je za ostale veći.

Pored ovih pojava polarizacija može da bude izazvana i rasejanjem svetlosti. Na primer plava svetlost iz rasejanja sunčevog zračenja na gornjim slojevima atmosfere je delimično polarizovana.

### 13.2. Polarizacija pri refleksiji. Brusterov i Malusov zakon.

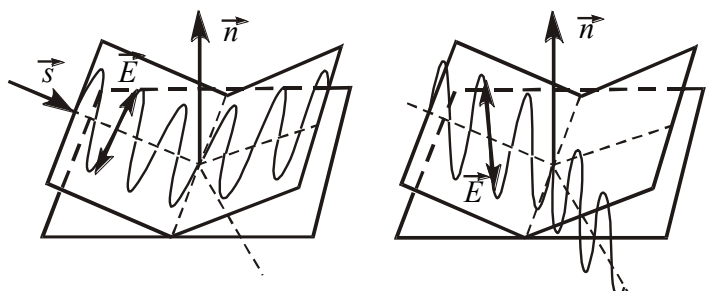
Pri refleksiji na graničnoj površini između dva dielektrika (nemetala) dobija se linearno polarizovana svetlost. Na granici provodnika (metala) dobija se eliptično polarizovana svetlost.



Slika 13.2. Polarizacija pri refleksiji

Ako su površine granica vazduh-dielektrik, S i S', međusobno paralelne, svi upadni i odbojni uglovi su međusobno jednaki. Zrak se kreće kao na sl. 13.2. Ako se površina S' obrće oko ose OO', upadni ugao zraka na nju je i dalje isti, ali se menja položaj upadne ravni definisan upadnim zrakom i normalom n, jer se menja položaj n'. Pri tom, intenzitet svetlosti na detektoru D se menja. Najveći je kada je S paralelno sa S' a najmanji kada su S i S' međusobno normalne.

To je posledica polarizacije svetlosti na površini S. Koeficijent refleksije je najveći za talase za koje je vektor E normalan na upadnu ravan određenu vektorima  $\vec{s}$  i  $\vec{n}$ , slika 13.3.a). Talas koji leži u upadnoj ravni se ne reflektuje, već se pretežno refraktuje-prelama u drugu sredinu. Intenziteti reflektovane i refraktovane svetlosti, pored toga, zavise i od indeksa prelamanja i upadnog ugla  $\alpha$ . Za dati indeks prelamanja postoji jedan kritični ugao  $\alpha_b$ , pri kome se reflektuje isključivo svetlost sa vektorom  $\vec{E}$  normalnim na upadnu ravan, dakle reflektovana svetlost je 100% polarizovana. Taj ugao se naziva Brusterov ugao (1812). Pri istim uslovima refraktovana svetlost je polarizovana sa 30%, a reflektovani i refraktovani zrak zaklapaju ugao od 90 stepeni. Ako je prelomni ugao  $\beta$ , tada je  $\alpha_b + \beta = 90$  i  $\sin \beta = \sin(90 - \alpha_b) = \cos \alpha_b$ . Primenom ovog odnosa i Snelijusovog zakona prelamanja dobija se za kritični ugao:



Slika 13.3. Odbijanje i prelamanje pri različitim položajima vektora  $\vec{E}$

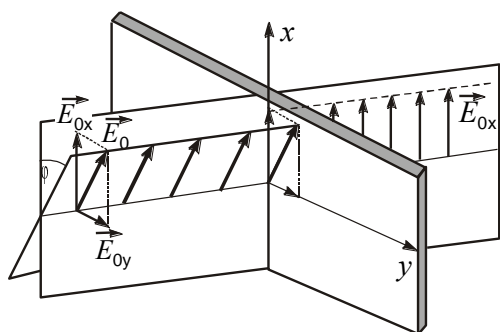
$$\alpha_b = \arctg \frac{n_2}{n_1} \quad (13.1)$$

što predstavlja **Brusterov zakon**.

Za graničnu površinu vazduh/voda je  $\alpha_b = 53^\circ$ , što znači da je Sunčeva svetlost reflektovana sa površine vode potpuno linearno polarizovana kada je Sunce  $37^\circ$  iznad horizonta.

Intenzitet linearno polarizovane monohromatske svetlosti dobijene na Brusterovom uglu, je veoma mali. Za granicu vazduh/staklo iznosi samo 15% od intenziteta upadne svetlosti dok se 85% refraktuje.

Malusov zakon daje zavisnost propuštene ili reflektovane svetlosti na analizatoru u zavisnosti od njegove orijentacije prema ravni polarizacije svetlosti. Neka je ta orijentacija odredjena uglom  $\varphi$ . Od vektora  $\vec{E}_0$  se na polarizatoru propušta samo njegoja komponenta  $E_{0x}$ . Kako je intenzitet svetlosti (energija) srazmeran kvadratu amplitude talasa, to će intenzitet propuštene svetlosti biti:



Slika 13.4. Ilustracija Malusovog zakona

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \varphi \quad (13.2)$$

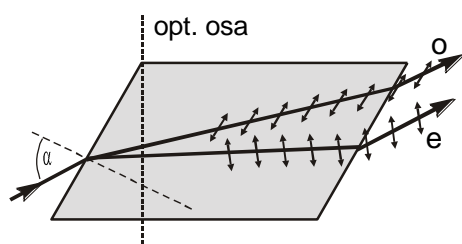
pri čemu je  $I_0$  intenzitet svetlosti koji se propušta pod uglom  $\varphi=0$ , slika 13.4. Ovaj jednostavan izraz predstavlja **Malusov zakon**.

Za slučaj, pak, nepolarizovane svetlosti, gde su zastupljene sve orijentacije vektora  $\vec{E}$ , biće propuštena srednja vrednost od  $\cos^2 \varphi$  u intervalu  $2\pi$ , što je  $1/2$ , pa je  $I=I_0/2$ , bez obzira na  $\varphi$ .

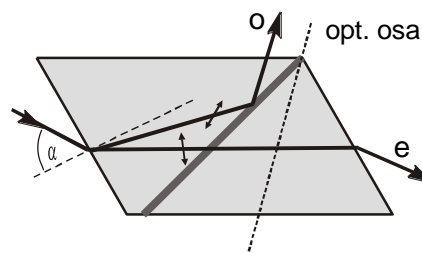
### 13.3. Polarizacija svetlosti dvojnim prelamanjem. Dihroizam.

Ovaj efekat se javlja kod optički anizotropnih supstanci, kod kojih indeks prelamanja zavisi od pravca prostiranja svetlosti u odnosu na geometriju kristalne rešetke. (To su uglavnom kristali, izuzev onih sa kubnom rešetkom). Neke supstance su prirodno anizotropne, dok se kod drugih ta pojava može indukovati spoljnjim uticajima.

Optički anizotropni kristali mogu biti jednoosni (kao što su kalcit  $\text{CaCO}_3$  i kvarc  $\text{SiO}_2$ ) i dvoosni. Kod njih postoje optičke ose duž kojih je brzina svetlosti ista bez obzira na stanje njene polarizovanosti. Za sve druge pravce, normalno na ovu ili ove ose, brzina prostiranja, odnosno indeks prelamanja zavisi od polarizacije. Ako je svetlost polarizovana tako da je vektor polja  $E$  normalan na osu kristala, takav zrak je "**običan**" ( $v_o = c/n_o$ ), a ako je paralelan osi, takav zrak se naziva "**neobičan**" ( $v_e = c/n_e$ ). Ako je  $v_e > v_o$ ,  $n_e < n_o$  kristal je negativno, u suprotnom je pozitivno anizotropan. Razlike  $n_e$  i  $n_o$  idu od 1-10%. Za  $\text{CaCO}_3$  je na primer  $n_o=1,658$  a  $n_e=1,486$ . Ako se svetlost prostire duž ose kristala, svi vektori  $\vec{E}$  su normalni na osu i brzina je uvek ista:  $v_o=c/n_o$ .



Slika 13.5. Razdvajanje zraka u anizotropnoj sredini



Slika 13.6. Nikolova prizma

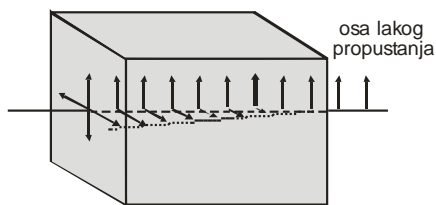
Posledica optičke anizotropije je dvojno prelamanje svetlosti. Snop prirodne svetlosti se pri prolasku kroz anizotropnu sredinu razdvaja na obični i neobični, koji su prelomljeni pod međusobno različitim uglovima. Na slici 13.5. prikazano je prelamanje na planparalelnoj ploči pozitivnog anizotropnog kristala, za zrak koji nije usmeren duž optičke ose i sa normalom na površinu kristala zaklapa proizvoljan ugao  $\alpha$ . Običan i neobičan zrak se prelamaju pod različitim uglovima i posle

drugog prelamanja izlaze međusobno paralelni, razmaknuti i uzajamno normalno polarizovani. Ovi zraci su, međutim, međusobno veoma malo razmaknuti i teško ih je razdvojiti. Njihovo razdvajanje se obično vrši pomoću polarizacionih prizmi, od kojih je najpoznatija Nikolova prizma. Napravljena je od monokristala kalcita-CaCO<sub>3</sub> u obliku romboedra ograničenog sa šest sličnih paralelograma sa uglovima od 102 i 78 stepeni. Ovaj kristal je presečen na poseban način i presek je slepljen pomoću smole od kanada-balsama sa indeksom prelamanja takvim da se obični zrak-(o) totalno reflektuje, dok neobični prolazi. Zrak (o) se obično apsorbuje nekim zastorom, a dobija se neobični zrak (e) koji je linearno polarizovan, slika 13.6.

Optička anizotropija se može postići i veštačkim putem i to:

- nehomogenim mehaničkim deformacijama čvrstih tela,
- dejstvom električnog ili magnetnog polja (Kerov i Koton-Mutonov efekat).

Ove pojave mogu da imaju i svoje praktične primene. Kod nehomogenih deformacija prolazak polarizovane svetlosti zavisi od stepena deformisanosti. Ovaj efekat se obrnuto može koristiti za ispitivanje deformisanosti materijala na osnovu propuštanja polarizovane svetlosti kroz njega. Kod Kerovog efekta deliće tečnosti (nitrobenzol) se orijentišu električnim poljem i ona postaje optički anizotropna. Uključenje i isključenje spoljašnjeg polja može da dozvoli ili spreči prolazak polarizovane svetlosti. Ovo se koristi kao brz prekidač, recimo u laserskoj tehnici.



Slika 13.7. Polaroid

**Dihroizam** je posebna pojava polarizacije svetlosti i zasniva se na osobini nekih kristala da različito apsorbuju svetlost polarizovanu u različitim ravnima, što se naziva selektivnom apsorpcijom. U takvim sredinama definisana je takozvana "osa lakog propuštanja" i svetlost sa vektorom električnog polja  $\vec{E}$  paralelnim sa tom osom lakše prolazi kroz kristal, dok se normalna komponenta brzo apsorbuje. Ovo, kao što je ilustrovano na sl. 13.7, daje polarizovanu svetlost. Takvi materijali su recimo turmalin i polaroidi, od kojih se najčešće koristi jod-kinin sulfat (herapatit) u svakodnevnoj upotrebi za izradu filmova za polaroid kamere.

#### 13.4. Obrtanje ravni polarizacije. Optička aktivnost.

Neki kristali i tečnosti mogu da zakrenu ravan polarizacije oko pravca prostiranja svetlosti. Ova pojava se naziva **optička aktivnost**. Ugao zakretanja zavisi od dužine optičkog puta svetlosti u njima, od prirode supstance, temperature i talasne dužine svetlosti. Zavisnost od prirode supstance se izražava specifičnom moći rotacije  $\{\alpha\}^{\lambda t}$ , što predstavlja ugao zakretanja po jedinici dužine puta za datu talasnu dužinu i temperaturu. Na primer, pločica kvarca debljine 1 mm, na 20 °C, za žutu svetlost od 589,3 nm zakreće ravan polarizacije za 22°. Ukupno zakretanje se izražava kao:

$$\varphi = \{\alpha\}^{\lambda t} \cdot c \cdot s \quad (13.3)$$

gde je s-dužina puta i c koncentracija, ako su u pitanju rastvori. Zakretanje ravni polarizacija može biti ulevo ili udesno i najveće je duž optičke ose kristala.

Optička aktivnost je posledica kristalne strukture ili asimetrije molekula tečne sredine. Može se objasniti kao "kružno dvojno prelamanje" pri čemu vektor električnog polja jednog talasa različito rotira od drugog, ako se linearno polarizovan talas izrazi preko dva kružna talasa u fazi.

Optička aktivnost se kod većine supstanci može izazvati veštačkim putem i to ako se stave u jako magnetno polje i to tako da se svetlost prostire duž linija sila polja. Ova pojava se naziva Faradejev efekat. Pri tome je ugao rotacije dat sa:

$$\varphi = V \cdot s \cdot B \quad (13.4)$$

gde je s dužina puta svetlosti, B intenzitet indukcije magnetnog polja i V je specifična magnetna rotacija ili tzv. Verdeov koeficijent.

### 13.5. Interferencija svetlosti.

Kako uopšte za talase, tako i za svetlost važi princip superpozicije. Kada dva svetlosna talasa dospeju u određenu tačku ukuukupan vektor jačine polja biće jednak vektorskom zbiru pojedinačnih. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da su talasi linearno polarizovani i da im se ravni polarizacije poklapaju. U tom slučaju možemo izostaviti vektorske oznake. Takodje pretpostavimo da su talasi koherentni, odnosno da su im kružne učestanosti iste. Jednačinu talasa u tački  $x_j$  možemo pisati u obliku:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \cdot \cos(\omega t - kx_i + \varphi_i) = \vec{E}_{0i} \cdot \cos(\omega t + \alpha_i) \quad (13.5)$$

gde je sa  $\alpha_i = -kx_i + \varphi_i$  označena faza oscilovanja u posmatranoj tački prostora. Na taj način pitanje superpozicije se svodi na sabiranje oscilacija u istom pravcu i sa istom učestanošću, što smo već sreli. Sabiranje se vrši pomoću tzv. verzorskog dijagrama rotirajućih vektora. Rezultujuća amplituda se dobija primenom kosinusne teoreme:

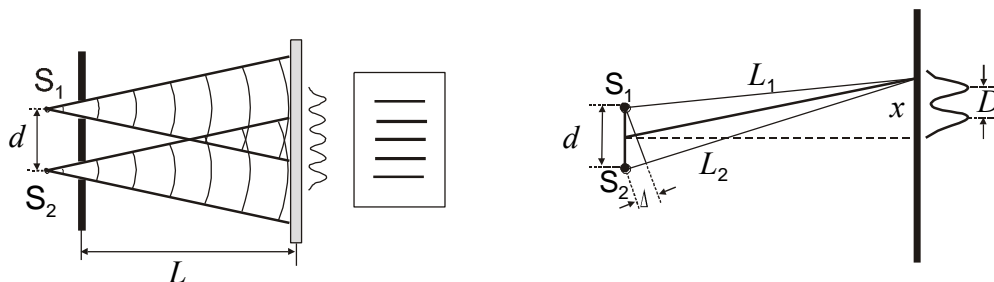
$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (13.6)$$

odnosno

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (13.7)$$

obzirom da je  $I$  srazmerno sa  $E_0^2$ . Dakle, intenzitet u proizvoljnoj tački prostora zavisi od kosinusa fazne razlike talasa u njoj. Za koherentne talase fazna razlika je stalna sa vremenom, tako da se sabiranjem dobija raspodela intenziteta talasa u prostoru koja se u toku vremena ne menja. Takva superpozicija se naziva interferencija. Manifestuje se obrazovanjem svetlih i tamnih pruga, prstenova ili drugih figura na zaklonu.

Ako su svetlosni zraci nekoherentni, nepolarizovani ili im se ravni polarizacija ne poklapaju, srednja vrednost  $\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$  sa vremenom je nula,  $I = I_1 + I_2$  je konstantno svuda u prostoru i nema interferencione slike.



Slika 13.8. Interferencija svetlosti

Koherentni talasi se mogu dobiti razdvajanjem zrakova svetlosti iz istog izvora refleksijom, refrakcijom ili difrakcijom pri čemu je  $\omega_1 = \omega_2$  i  $\varphi_1 = \varphi_2$ . U principu ovi zraci mogu da prolaze kroz različite sredine, pa je potrebno naći vezu između optičke putne i fazne razlike talasa. Fazna razlika je:

$$\delta = \omega \left( \frac{L_2}{v_2} - \frac{L_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (N_2 L_2 - N_1 L_1) = \frac{\omega}{c} \Delta = \frac{2\pi \Delta}{\lambda_0} \quad (13.8)$$

gde su korišćene standardne relacije između navedenih veličina, a sa  $\Delta = (N_2 L_2 - N_1 L_1)$  je označena optička putna razlika. Sa  $L$  su označene dužine puta u jednoj i drugoj sredini. Oznaka  $\lambda_0$  je talasna dužina svetlosti u vakuumu.

Uslov za maksimume intenziteta je  $\delta=k \cdot 2\pi$  ( $k=0,1,2,\dots$ ), a za minimume je  $\delta=(2k+1)\pi$ , odnosno kombinovanjem sa gornjim izrazom sledi:

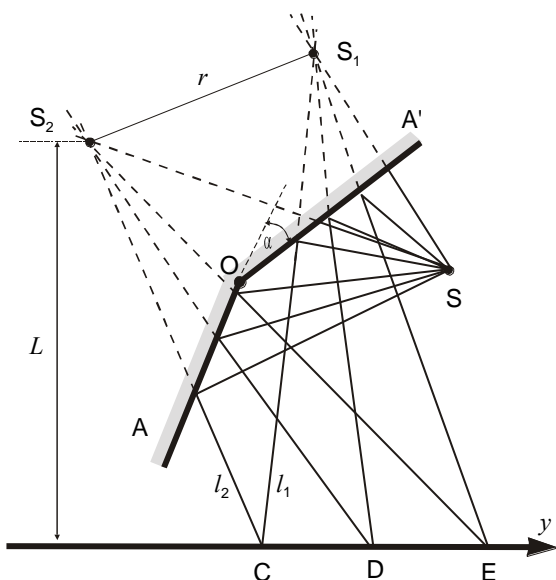
$$\Delta_{\max} = \pm k\lambda_0 \quad \text{i} \quad \Delta_{\min} = (k+1/2)\lambda_0 \quad \text{sa } k=0,1,2,\dots \quad (13.9)$$

Razmotrimo detaljnije slučaj interferencije dva cilindrična koherentna talasa, kao na slici. Na zaklonu će se dobiti niz svetlih i tamnih pruga. Kolika će biti rastojanja između susednih pruga? Za  $d \ll L$  je  $x/L = \Delta/d$  i  $x = L\Delta/d$ . Dva susedna maksimuma su na putnoj razlici  $\Delta = \lambda_0$ , slika 13.8., pa je rastojanje među njima:

$$x = D = L \cdot \lambda_0 / d \quad (13.10)$$

Širina pruga zavisi od stepena monohromatičnosti svetlosnih zrakova i od veličine pukotina-odnosno izvora  $S_1$  i  $S_2$ , i u vezi je sa difrakcijom svetlosti.

### 13.5.1. Interferencija pomoću ogledala. Frenelova interferencija.

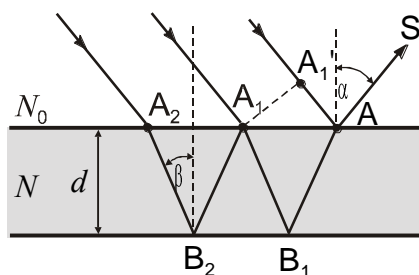


Slika 13.9. Frenelova interferencija maksimuma  $L\lambda/r$ .

Jedan od načina da se dobiju koherentni talasi je upotreba dva ogledala nagnuta međusobno pod veoma malim uglom, tzv. Frenelova ogledala, kao što je to prikazano na slici 13.9. Od izvora svetlosti S se dobijaju koherentni izvori  $S_1$  i  $S_2$  na rastojanju  $r$ . Uslov za interferenciju se ovde svodi samo na određivanje putne razlike  $l_2 - l_1$ . Maksimum intenziteta se dobija za tačke koje zadovoljavaju uslov da je putna razlika jednaka  $k\lambda$ , a minimum za  $(2k-1)\lambda$ , gde je  $k=0,1,2,\dots$ . Veličina  $k$  predstavlja tzv. red interferencionog lika. Za tačku D, na sredini između  $S_1$  i  $S_2$  putna razlika je nula i tu je intenzitet maksimalan. Levo i desno od njega smenjiće se naizmenično minimumi i maksimumi intenziteta. Lako je pokazati da su interferencioni maksimumi u tačkama  $y_k = kL\lambda/r$  i da je rastojanje između susednih

### 13.5.2. Interferencija na tankim slojevima.

Boje tankih providnih slojeva, kao što je mehur od sapunice ili sloj ulja na vodi, posledica su interferencije svetlosti odbijene sa obe površine sloja (donje i gornje). Do posmatrača u tački S dolazi



Slika 13.10. Interferencija na tankom sloju

zrak reflektovan u tački A, ali i onaj reflektovan od donje površine u tački  $B_1$ , kao i onaj iz tačke  $B_2$ . Svi ovi zraci su prešli različite puteve i to u različitim sredinama. Za dva susedna zraka putna razlika je:

$$\delta = N(A_1B_1 + B_1A) - N_0(A_1A') \quad (13.11)$$

Sa slike 13.10 je  $A_1B_1 + B_1A = 2d/\cos\beta$  i  $A_1A' = 2d \cdot \text{tg}\beta \cdot \sin\alpha$ . Kako je prema zakonu

prelamanja  $N_0 \sin \alpha = N \sin \beta$  uslov za maksimum intenziteta svetlosti je:

$$\delta = 2Nd \frac{1 - \sin^2 \beta}{\cos \beta} = 2Nd \cos \beta = k\lambda \quad (k=0,1,2,\dots)$$

Medjutim, zbog činjenice da se pri refleksiji talasa na granici optički redja/optički gušća sredina faza talasa menja za  $\lambda/2$ , a u suprotnom ne, gornji uslov se svodi na:

$$\delta = 2Nd \cos \beta = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \quad (13.12)$$

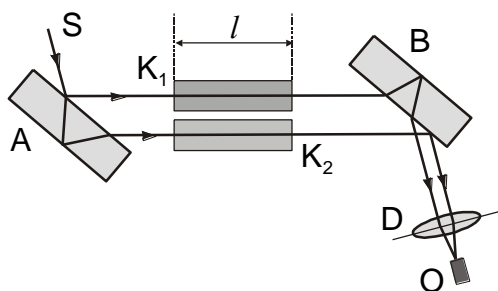
Dakle interferenciona slika zavisi od debljine sloja, ali i od talasne dužine svetlosti, što za posledicu ima obojenu interferencionu sliku.

### 13.6. Interferometri.

Pojava interferencije se praktično koristi za izradu izuzetno tačnih mernih instrumenata-interferometara. Navešćemo neke.

#### ŽAMENOV (JAMEN) INTERFEROMETAR

Na osnovu promene optičkog puta svetlosti u zavisnosti od promene indeksa prelamanja mogu se vršiti precizna merenja pritiska, temperature i vlažnosti vazduha. Dve visoko obradjene staklene ploče A i B postavljene su paralelno jedna u odnosu na drugu. Zraci odbijeni na prvoj i drugoj površini ploče A, medjusobno razdvojeni, prolaze kroz identične kivete  $k_1$  i  $k_2$  ispunjene gasom sa poznatim  $N_1$  i nepoznatim  $N_2$  indeksima prelamanja. Posle odbijanja na ploči B i fokusiranja sočivom D se na okularu O dobijaju interferencione pruge, slika 13.11. Iz putne razlike:



Slika 13.11. Žamenov interferometar

$$\delta = (N_2 - N_1) \cdot \ell \quad (13.13)$$

i uslova za pojavu maksimuma  $k$ -tog reda se dobija odnos:

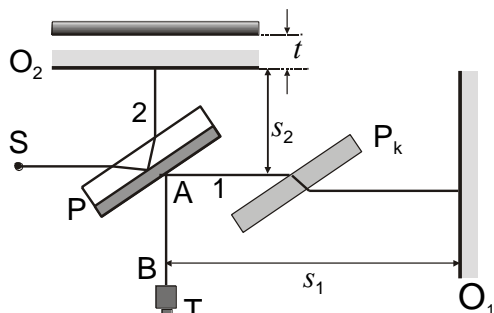
$$N_2 = N_1 + k \frac{\lambda}{\ell} \quad (13.14)$$

Promena razlike  $N_2 - N_1$  izaziva promenu interferencionih pruga. Na primer za  $\ell = 5$  cm,  $\lambda = 500$  nm i za najmanju merljivu promenu položaja interferencionih pruga za 10% od njihove širine, dobija se najmanja merljiva promena razlike indeksa prelamanja od približno  $10^{-6}$ . Sa tom tačnošću dakle može da se registruje i promena pritiska, temperature ili vlažnosti koja je izazvala promenu indeksa prelamanja.

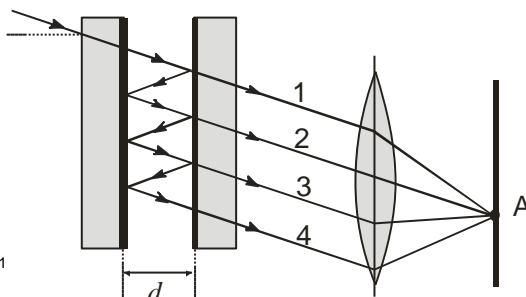
#### MAJKELSONOV (MICKELSON) INTERFEROMETAR

Služi za veoma tačno merenje dužine, posebno malih rastojanja, sa tačnošću do  $10^{-8}$  mm. Snop svetlosti iz izvora S se na polupropusnoj planparalelnoj ploči P deli na dva uzajamno normalna zraka, reflektovani i refraktovani. Ovi se odbijaju o ogledala  $O_1$  i  $O_2$  i usmeravaju putem AB ka posmatraču gde se dobija interferenciona slika. Kompenzaciona pločica Pk služi da kompenzuje putnu razliku snopova pošto snop (2) prolazi tri puta kroz P a snop (1) samo jedan put. Ogledalo  $O_2$  može precizno da se pomera (za nekoliko desetina cm) čime se menja interferenciona slika na

zaklonu. Brojanjem promene broja interferencionih pruga- $m$  za dato  $\lambda$  dobija se pomeraj  $t=m\lambda/2$  sa tačnošću od  $0,1-0,001\lambda$ . Na ovaj način je utvrđen i etalon jedinice za dužinu, metra.



Slika 13.12. Majkelsonov interferometar



Slika 13.13. Fabri-Peroov interferometar

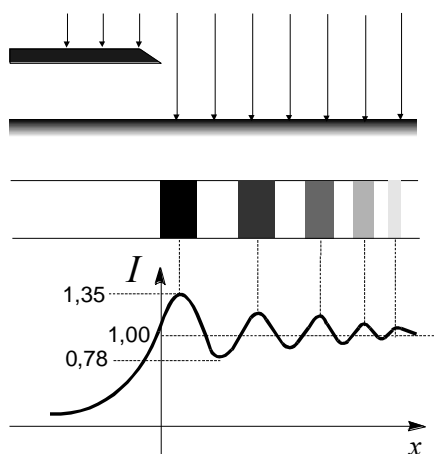
### FABRI-PEROOV (FABRY-PEROT) INTERFEROMETAR

Zasniva se na interferenciji većeg broja zrakova (ne samo dva) i primenjuje se u interferencionoj spektrometriji, pošto ima veliku moć razlaganja. Sastoji se od dve paralelne staklene ploče na malom međusobnom rastojanju- $d$ . Ove ploče su sa unutrašnjih strana prevučene tankim polupropusnim slojem srebra koeficijenta refleksije oko 90%. Za fiksirano  $d$ , u zavisnosti od  $\lambda$ , na zaklonu se pojavljuje interferencionna slika. Pruge se javljaju za  $2dN\cos\alpha=k\lambda$  ( $k=0,1,2\dots$ ). Preciznim merenjem rastojanja interferencionih pruga (krugova) i poznavanjem  $d$  i  $N$  uz pomoć Fabri-Peroovog etalona mogu se meriti talasne dužine svetlosti sa velikom tačnošću.

### 13.7. Difrakcija svetlosti.

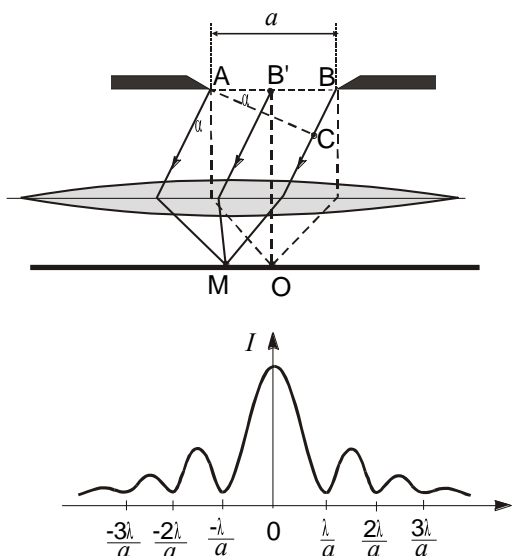
Sve što je ranije rečeno o difrakciji talasa, važi i za svetlosne talase. Na oštroj ivici ili veoma malom otvoru se zbog talasne prirode svetlosti i važenja Hajgensovog principa svetlosni snop savija i ne daje oštru sliku ivica. Granica tamnog i osvetljenog dela nije jasna i sadrži niz svetlih i tamnih pruga čiji se intenzitet i razmak smanjuju udaljavanjem od ivice. Ove pruge se nazivaju Fresnelove zone, slika 13.14. Na grafiku je prikazana zavisnost intenziteta svetlosti od rastojanja od ivice zaklona. Za razliku od interferencije ovde se radi o jednom jedinom izvoru svetlosti.

U zavisnosti od oblika ivice, odnosno veličine i broja otvora na kojima se difrakcija posmatra, rezultat difrakcije će biti različit.



Slika 13.14. Fresnelove zone

DIFRAKCIJA RAVNIH TALASA NA PUKOTINI. Na slici 13.15. je prikazan slučaj difrakcije ravnih talasa na pukotini širine  $a$ . Zraci koji dolaze u tačku O, u slučaju monohromatske svetlosti imaju istu fazu i tu je svetla pruga. Tamne pruge će se javiti levo i desno gde je putna razlika središnjeg zraka i zrakova sa ivice pukotine jednaka  $\lambda/2$



Slika 13.15. Difrakcija na pukotini

$$\frac{a}{2} \sin \alpha = \frac{\lambda}{2}$$

ili

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{a}$$

odnosno tamne pruge će biti i za

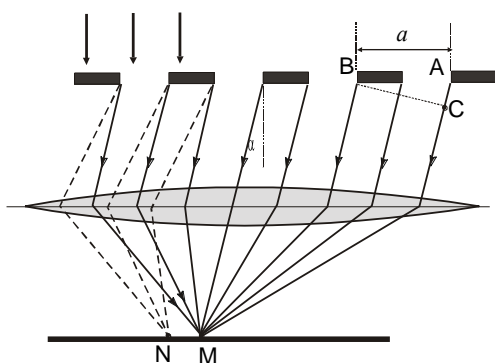
$$\sin \alpha = k \frac{\lambda}{a} \quad (k=1,2,3..)$$

Svetle pruge će se javiti u tačkama za koje je putna razlika jednaka celobrojnom umnošku talasne dužine, odnosno  $\sin \alpha = 2k\lambda/a$ .

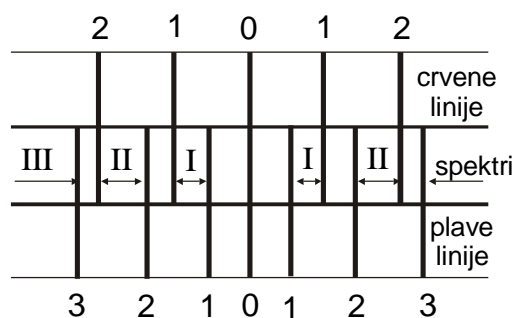
Raspored intenziteta interferencionih pruga na zaklonu dat je na donjem delu slike. Intenziteti osvetljenosti na položajima maksimuma viših redova opada rapidno i to, u odnosu na intenzitet centralnog maksimuma  $E_0$ , prema relaciji:

$$E = E_0 \frac{\sin(\pi a \sin \alpha / \lambda)^2}{(\pi a \sin \alpha / \lambda)^2} \quad (13.15)$$

**DIFRAKCIONA REŠETKA** predstavlja neprovidnu ploču sa velikim brojem uskih paralelnih pukotina na kojima se javlja difrakcija. Izradjuju se oštirim dijamantom na staklu ili posebnim fotopostupkom, a mogu da imaju i po nekoliko stotina zarezova po milimetru. Rastojanje izmedju dva susedna zareza se naziva konstanta rešetke. Po Huygens-ovom principu svaka tačka pogodjena talasom postaje novi izvor talasa. Putna razlika zrakova sa dva susedna otvora (A i B) iznosi  $\delta = AC = a \sin \alpha$ .

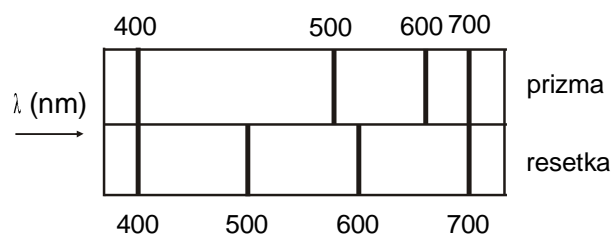


Slika 13.16. Difrakciona rešetka



Slika 13.17. Niz spektara dobijen difrakcionom rešetkom

Svetle pruge bi se javile tamo gde je putna razlika  $a \sin \alpha = k\lambda$  ( $k=1,2,3..$ ), kao u gore navedenom slučaju. Interesantna je pojava kada na rešetku pada bela svetlost. Kako se ona sastoji iz talasa sa različitim talasnim dužinama, za svaku od njih svetla pruga će biti na drugom mestu; za crvenu svetlost je  $\sin \alpha_1 = k\lambda_c/a$ , a za plavu  $\sin \alpha_2 = k\lambda_p/a$ . Dakle svetlost će biti razložena na svoje spektre i to će se za svako  $k$  ( $k=1,2,3..$ ) dobiti po jedan spektar, koji respektivno predstavljaju



Slika.13.18. Upoređivanje razlaganja prizme i rešetke

spektar I, II, III, itd. reda, kao na slici 13.17. Širina spektra, odnosno razlaganje se povećava sa redom spektra (sve dok ne počnu da se preklapaju). Difrakciona rešetka se koristi u optičkim instrumentima kao disperzioni element (kao i prizma) i služi za razlaganje bele svetlosti u spektar.

Prednost rešetke u odnosu na prizmu je bolje razlaganje, kao i bolja linearnost za različite delove spektra. Bolja linearnost znači da rešetka jednako dobro

razlaže svetlost svih talasnih dužina, za razliku od prizme, što je ilustrovano na slici 13.18.

Osnovne karakteristike svakog spektralnog-disperzionog elementa su njegova **disperzija-D** i **moć razlaganja-R**. Disperzija je ugaono ili linearno rastojanje između dve spektralne linije čije se  $\lambda$  razlikuje za jedinicu (1 nm). Moć razlaganja je minimalna razlika talasnih dužina  $d\lambda$  pri kojoj se dve linije spektra, zraci dve različite talasne dužine, registruju odvojeno.

U savremenim spektrometrima se, zbog veće moći razlaganja, za razlaganje svetlosti češće koriste difrakcione rešetke, nego prizme.

## XIV

### OSNOVE TEORIJE RELATIVNOSTI

#### 14.1. Teorija relativnosti. Osnovni postulati.

Godine 1905 Albert Ajnštajn (Einstein) je, sa 26 godina, objavio SPECIJALNU TEORIJU RELATIVNOSTI izazivajući najrazličitije reakcije fizičara. Godine 1917 je objavio i OPŠTU TEORIJU RELATIVNOSTI koja u osnovi gravitaciju tumači ne preko sila već preko zakrivljenosti svemirskog prostora i vremena, ali o njoj za sada nećemo govoriti.

Teorija relativnosti govori o prirodi prostora i vremena. Dosta se o njoj govorilo i govori i ima reputaciju složenog problema. Matematički ona uopšte nije komplikovana. Onaj ko zna da reši kvadratnu jednačinu je više nego kvalifikovan da je tretira. Problem u razumevanju teorije relativnosti leži u činjenici da se za njeno shvatanje moraju kritički preispitati naša ustaljena shvatanja prostora i vremena i posebno brzine, kao njihovog odnosa. Naše životno iskustvo je ograničeno na predmete oko nas, koji se uglavnom "sporo" pomeraju, krećući se malim brzinama u odnosu na brzinu svetlosti. Nemamo iskustva šta se događa kada se brzine predmeta povećaju. Dokle to povećanje može da ide i šta se pri tom dešava? Da li i tada važe zakoni klasične fizike? Slično ovome pitanju je, recimo, iskustvo sićušne bakterije u jako viskoznom fluidu. Ona na primer o gravitaciji "nema pojma".

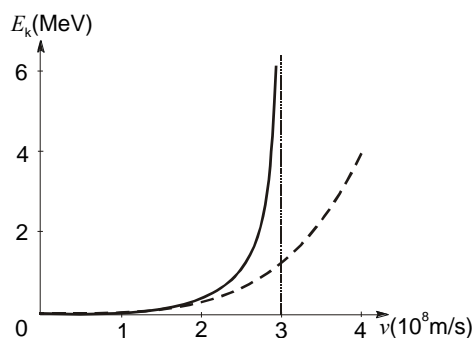
Iako na prvi pogled kontraverzna, teorija relativnosti je preživela sve eksperimentalne i teorijske testove i danas je opšte prihvaćena. Klasična dinamika, koju smo do sada izučavali je u stvari samo granični slučaj teorije relativnosti kada su brzine kretanja tela veoma male.

Teorija relativnosti se zasniva na dva osnovna postulata:

- **I Postulat relativnosti kretanja.** Fizički zakoni su isti za posmatrače u svim inercijalnim referentnim sistemima. Ne postoji preferentni referentni sistem.
- **II Postulat o brzini svetlosti.** Brzina svetlosti u vakuumu,  $c$ , ima istu vrednost u svim pravcima i u svim inercijalnim referentnim sistemima.

Još je Galilej govoreći o transformacijama sistema podrazumevao da su zakoni MEHANIKE isti u svim inercijalnim sistemima (na primer II Njutnov zakon). Ajnštajn je samo proširio tu ideju na SVE FIZIČKE zakone, posebno ističući zakone elektromagnetizma i optike. Ovaj postulat ne tvrdi da su sve merene fizičke veličine iste u svim inercijalnim sistemima, naprotiv većina nije ista. Fizički zakoni tj. odnosi medju fizičkim veličinama su isti.

Drugi postulat govori da u prirodi postoji granična brzina  $c$  ( $c=299,792,458$  m/s  $\cong 3 \times 10^8$  m/s), kojom se prostire svetlost kao fizička pojava bez mase, a da svaka čestica sa konačnom masom može da bude ubrzana do blizu ove brzine, ali da ne može da je dostigne ili premaši. Ovo je i eksperimentalno proveravao W. Bertazzi 1964. godine. On je ubrzavao elektrone do različitih brzina i



Slika 14.1. Zavisnost energije od brzine

merio im kinetičku energiju pomoću nezavisne kalorimetrijske metode. Postizao je brzine do 0,999 999 999 95 od  $c$ , ali nije mogao da je premaši, mada je energija rapidno rasla - brže od zakona kinetičke energije  $mv^2/2$ . Znači da se i masa menjala pri velikim brzinama, što je u klasičnoj mehanici neshvatljivo.

Rezultati ovog eksperimenta su prikazani na slici 14.1. Ma kako da se povećavala kinetička energija elektrona, njegova brzina nije mogla da dostigne vrednost  $c$ . Na istom grafiku je isprekidanom linijom prikazao kako bi to bilo u klasičnoj mehanici.

Drugi test postulata o brzini svetlosti učinjen je pomoću elementarne čestice pion- $\pi_0$  u CERN-u 1964. godine. Ova čestica je neutralna, bez mase i sa veoma kratkim vremenom raspada na dva fotona odnosno  $\gamma$  zraka u konkretnom slučaju. Ovakav pion je ubrzan do 0,99975 c u odnosu na laboratoriju. Tada je emitovao svetlost. Po klasičnoj mehanici brzina emitovane svetlosti bi trebalo da bude 1,99975 c, međutim merenja pokazuju da je ona vrlo bliska c-kao i kod svetlosti koja se emituje sa izvora koji miruje. Znači svetlost se prostire nekom svojom brzinom, bez obzira na sistem (napomenimo da svetlost i nije objekat koji se kreće, već poremećaj koji se prenosi kroz prostor).

Prema tome ove pojave zahtevaju redefinisane dosadašnjeg koncepta o prostoru i vremenu. Ako je brzina konstantna, to znači da prostor i vreme nisu i da se od sistema do sistema menjaju. Prvi zaključak je da vreme nije isto u svim sistemima (nasuprot Galilejevim transformacijama), a drugi da se prostor i vreme ne mogu razdvojiti, te se moraju zajedno posmatrati kao jedan nov četvorodimenzionalni prostorno-vremenski sistem. U tako definisanom sistemu vreme postaje relativno, a pojam simultanosti događaja gubi smisao. Svaki sistem je svet za sebe. Svaka tačka u prostoru prema tome ima svoje sopstveno vreme.

## 14.2. Relativnost vremena i prostora (dužine). Transformacione jednačine.

Relativnost simultanosti ili jednovremenosti događaja je tesno povezana sa relativnošću vremena. Različiti posmatrači će mereći interval vremena između dva sukcesivna događaja izmeriti različite vrednosti. Ovo ćemo ilustrovati uz pomoć slike 14.2.

Neka je posmatrač A u vagonu koji se uniformno kreće brzinom  $\vec{v}$  u pravcu x-ose u odnosu na stanicu, a posmatrač B na samoj stanici. Neka se meri vreme od uključivanja baterijske lampe preko odbijanja svetlosti od ogledala na tavanici vagona do njenog dolaska nazad na detektor koji se nalazi na samoj lampi. Posmatrač A će izmeriti vreme dato izrazom:

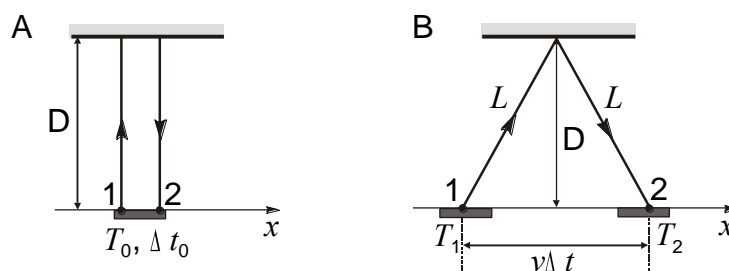
$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c} \quad (14.1)$$

gde je D rastojanje od izvora svetlosti do ogledala. Ovo vreme se naziva **pravo vreme**. Posmatrač B na stanici mora podrazumevati istu brzinu svetlosti, ali za njega pošto se vagon pomerio, svetlost predje veći put -  $2L$ . Za njega je:

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad (14.2)$$

U skladu sa gornjom tvrdnjom on mora imati dva časovnika za različite položaje izvora pri emisiji i detektoru pri detekciji svetlosti, jer su to sada dve različite tačke njegovog prostora, a rekli smo da svaka tačka ima svoje vreme. Rastojanje L je određeno Pitagorinom teoremom, pa je:

$$\frac{c\Delta t}{2} = L = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + D^2} = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t_0}{2}\right)^2} \quad (14.3)$$



Slika 14.2. Dilatacija vremena

Kvadriranjem ovog izraza i sredjivanjem se za vremenski interval u nepokretnom sistemu dobija:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (14.4)$$

pri čemu se  $\beta = v/c < 1$  naziva **parametar brzine**. Zapazimo da je uvek  $\Delta t > \Delta t_0$ . Ova pojava se naziva **DILATACIJA VREMENA**. Takodje se može pisati da je:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (14.5)$$

gde je:

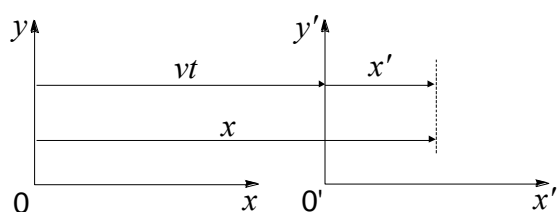
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1 \quad (14.6)$$

takozvani **Lorenzov faktor**. Za male brzine ovaj faktor je približno jednak 1, a za veće drastično raste. Za  $\beta$  preko 0,5 Lorencov faktor se mora obavezno uključivati u transformacione relacije odnosno mora se primenjivati teorija relativnosti. Dilatacija vremena je do sada i eksperimentalno potvrđena u nizu oglada.

Interesantno je ovde navesti tzv. Paradoks blizanaca. Ako jedno od blizanaca putuje brzim svemirskim brodom, za njega vreme sporije teče ( $\Delta t_0$ ) po relaciji za dilataciju vremena. Za blizanca na Zemlji (nepokretnog) proteći će  $\gamma \Delta t_0$  vremena. Kada se vrati na Zemlju putujući blizancac će biti  $\gamma$  puta mlađi od svog brata. Paradoks se sastoji u pitanju: nije li moguće zameniti sisteme, pa da situacija bude obrnuta, odnosno da blizancac na Zemlji ostane mlađi. U tom slučaju se dolazi do logičke kontradikcije da svaki blizancac zatekne onog drugog mlađim. Zaključak je da se sistemi ne mogu relativizirati. Razlozi za to su nesimetrija transformacionih jednačina i redosled ubrzanja i usporenja pokretnog sistema. Rezultat zamišljenog eksperimenta sa blizancima bi bio da će blizancac na Zemlji zaista biti stariji, što je i praktično potvrđeno nekim eksperimentima sa nošenjem atomskog sata u svemir. Za dva obilaska oko Zemlje uočena je vremenska razlika od 273 ns.

Dakle, kretanje sistema utiče na tok vremena. Vreme nije apsolutno, ne teče u svim inercijalnim sistemima jednako i zavisi od sistema u kome se određuje.

Na osnovu navedenih razmatranja da se zaključiti da se svaki događaj mora posmatrati u jednom koordinatnom sistemu na određenom mestu (x,y,z) i u određenom vremenskom trenutku t,



Slika 14.3. Lorencove transformacije

dok se ovaj isti događaj u pokretnom inercijalnom sistemu dešava na drugom mestu (x',y',z') i drugom trenutku t'. Radi jednostavnosti, pošto su u pitanju inercijalni sistemi, moguće je sisteme izabrati tako da im se pravci x-osa poklapaju sa pravcem brzine relativnog kretanja pokretnog sistema u odnosu na nepokretni, slika 14.3.

Matematičke relacije izmedju koordinata i vremena jednog događaja u dva inercijalna sistema za koje važe Ajnštajnovi postulati formulisao je Lorentz. Ove relacije su poznate kao **Lorentzove transformacije** i izražene su na sledeći način:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') & x' &= \gamma(x - vt) \\ y &= y' & y' &= y \\ z &= z' & z' &= z \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) & t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned} \quad (14.7)$$

gde je  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$  i  $\beta = v/c$ , a  $c$ -je brzina svetlosti u vakuumu. Za slučaj  $v \ll c$  ove jednačine prelaze u Galilejeve transformacije, izrazi (4.4). Dakle, za male relative brzine Njutnova mehanika je prva aproksimacija opštije relativističke mehanike.

Iz uslova da položaj i vreme jednog događaja budu realne, a ne imaginarne, veličine u svim inercijalnim sistemima, sledi da je  $v < c$ , odnosno brzina svetlosti u vakuumu je maksimalna brzina kretanja tela ili prostiranja nekog dejstva.

U Lorentzovim transformacijama koordinate i vreme čine jednu celinu, što zahteva da se vreme tretira kao četvrta koordinata. U tom cilju se uvodi apstraktni četvorodimenzioni prostor (sa koordinatama  $x, y, z$  i  $ct$ ) i taj novi Rimannov prostor ima osobine različite od klasičnog Euklidskog prostora.

Lorentzove transformacije imaju za posledicu niz značajnih zaključaka koji se ne mogu sresti u Njutnovo mehanici.

**Jednovremenost događaja u raznim inercijalnim sistemima.** Neka se u inercijalnom sistemu  $O$  u tačkama sa koordinatama  $x_1$  i  $x_2$  dogode dva događaja u trenutku  $t_1=t_2=t$ , dakle istovremeno. Ako se događaji posmatraju u sistemu  $O'$ , na osnovu Lorentzovih transformacija će se za vremenski interval između posmatranih događaja dobiti izraz:

$$t'_1 - t'_2 = \gamma v \frac{x_1 - x_2}{c^2} \quad (14.8)$$

U zavisnosti od vrednosti koordinata  $x_1$  i  $x_2$ , izraz na desnoj strani može biti pozitivan ili negativan, što znači da se jedan događaj desio pre ili posle drugog, a ne istovremeno. Naravno, ovo se odnosi na događaje između kojih ne postoji uzročna veza. U suprotnom, uvek će se uzročni događaj desiti pre posledičnog.

**Dilatacija vremena** je pojava koju smo već sreli, relacija (14.5). Naravno, isti izraz se može dobiti i iz Lorentzovih transformacija i  $t_0$  egzaktnije nego ranije. Uočimo u sistemu  $O$  vremenski interval između dva sukcesivna događaja  $\Delta t = \Delta t_0 = t_2 - t_1$ , koji se dešavaju u istoj tački prostora  $x_1 = x_2 = x$ , na primer dva uzastopna prolaska matematičkog klatna kroz ravnotežni položaj. U pokretnom sistemu  $O'$ , na osnovu Lorentzovih transformacija, odgovarajući vremenski interval će biti:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t_0$$

Ova relacija je identična sa (14.5), s tim što je vremenski interval u sistemu  $O'$  označen sa primom. Dakle, vremenski interval se produžava za  $\gamma$  u pokretnom sistemu, odnosno u njemu vreme teče sporije. Vreme  $t_0$  ili  $\tau$  se naziva sopstveno vreme.

**Kontrakcija dužine** je takodje pojava karakteristična za relativističku mehaniku. Neka je  $L_0 = x_2 - x_1$  dužina nekog tela u sistemu  $O$  u kome ono miruje. Ova dužina se naziva sopstvena dužina tela. Postavlja se pitanje, koliku dužinu treba pripisati ovom telu u pokretnom sistemu  $O'$ . Prema Lorentzovim transformacijama koordinata, obrazovanjem razlike  $x_2 - x_1$ , pri uslovu istovremenosti  $t'_1 = t'_2$ , dobiće se:

$$x_2 - x_1 = L_0 = \gamma \cdot (x_2' - x_1') = \gamma \cdot L \quad (14.9)$$

Dužina  $L = x_2' - x_1'$  predstavlja dužinu tela posmatranog iz pokretnog sistema i naziva se relativna dužina tela. Pošto je  $\gamma \geq 1$  onda je  $L_0 \geq L$ , odnosno posmatrano iz pokretnog sistema dužina tela se skraćuje u pravcu kretanja sistema za faktor  $\gamma$ . Ova pojava se naziva **kontrakcija dužine**.

U pravcima normalnim na pravac kretanja dimenzije tela ostaju neizmenjene. Posledica toga je da sferno telo u nepokretnom sistemu ima oblik elipsoida u pokretnim sistemima. Ovo skraćivanje

dužine tela u pokretnom sistemu ne treba shvatati kao suštinsku promenu prirode tela, radi se samo o tome kako izgleda dužina tela posmatrana iz raznih sistema.

**Relativističko slaganje brzina.** Neka se sistem S' kreće u odnosu na S brzinom u. Za ova dva sistema će važiti transformacione jednačine  $\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\Delta t')$  i  $\Delta t = \gamma(\Delta t' + u\Delta x'/c^2)$ . Ako ova dva izraza podelimo, a zatim i brojilac i imenilac desne strane podelimo sa  $\Delta t'$ , sledi:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\Delta t' + u\Delta x'/c^2} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + u}{1 + u(\Delta x'/\Delta t')/c^2} \quad (14.10)$$

U graničnom slučaju  $\Delta x/\Delta t = v$  je brzina u S i  $\Delta x'/\Delta t' = v'$  je brzina u pokretnom sistemu S'. Konačno dobijamo izraz za relativističku transformaciju brzine:

$$v = \frac{v' + u}{1 + uv'/c^2} \quad (14.11)$$

Odavde se za klasični slučaj može dobiti Galilejeva transformacija brzine ako se apsolutna brzina ne ograniči, tj. za slučaj  $c \rightarrow \infty$ .

Slične transformacije mogu se izvesti i za ubrzanje. Takodje je zanimljiv Doppler-ov efekat u relativističkoj mehanici, ali se ovde nećemo zadržavati na tome.

**Primer I:** Dva svemirska broda, svaki prave dužine od  $L_0 = 230$  m, se mimoilaze. Posmatrač na kraju jednog broda izmeri da drugi prodje pored njega za  $3,57 \mu\text{s}$ . Kolika je njihova relativna brzina? Posmatrač se kreće zajedno sa brodom i za njega je izmereno vreme pravo  $\Delta t_0 = 3,57 \mu\text{s}$ . On medjutim meri prividnu dužinu  $L = v\Delta t_0 = \beta c\Delta t_0$ . Kako je medjutim  $L = L_0/\gamma = L_0(1 - \beta^2)^{1/2}$  izjednačavanjem ovih izraza, kvadriranjem i sredjivanjem se dobija:

$$\beta = \frac{L_0}{\sqrt{(c\Delta t_0)^2 + L_0^2}} = 0,21 \quad \text{ili} \quad 21\% \text{ od } c.$$

**Primer II:** U inercijalnom sistemu S plava sijalica se upali a  $5,35 \mu\text{s}$  za njom i crvena i to na rastojanju od  $\Delta x = 2,45$  km. Pokretni sistem se kreće brzinom sa  $\beta = 0,85$  u smeru porasta x koordinate. Koliko je rastojanje i vremenski interval izmedju ova dva događaja u pokretnom sistemu? Kako je  $v = \beta c$  iz transformacionih jednačina sledi

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t)$$

i

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \beta\Delta x/c)$$

Pošto je  $\Delta x = 2450$  m,  $\Delta t = 5,35 \times 10^{-6}$  s i  $\gamma = 1,928$  sledi:

$$\Delta x' = 1,928 \times (2450 - 0,855 \times 3 \times 10^8 \times 5,35 \times 10^{-6}) = 2078 \text{ m} = 2,08 \text{ km}$$

i

$$\Delta t' = 1,928 \times (5,35 \times 10^{-6} - 0,855 \times 2450 / (3 \times 10^8)) = -3,15 \mu\text{s}$$

Znak (-) označava da se u pokretnom inercijalnom sistemu prvo vidi paljenje crvene sijalice, ali je interval izmedju njih kraći. U navedenom primeru događaji su nezavisni. Ako je medjutim u pitanju uzročno-posledični odnos, uvek će se uzročni događaj desiti pre posledičnog.

### 4.3. Kinematika specijalne teorije relativnosti.

U skladu sa prethodnim izlaganjem **Minkovski** je definisao prostor relativističke mehanike. Po njemu taj prostor je četvorodimenzionalan (što nije jednostavno zamisliti) i sadrži u sebi trodimenzioni Euklidski prostor, a četvrta njegova dimenzija je vreme. Ove četiri dimenzije, koordinate, obrazuju jedinstven četvorodimenzioni "svet" ili prostorno-vremenski kontinuum. U njemu je svaki tačkasto-trenutni događaj određen sa četvorodimenzionim vektorom položaja:

$$\vec{R}_k = (R_1, R_2, R_3, R_4) = (x, y, z, ict) \quad (i^2 = -1) \quad (14.12)$$

odnosno:

$$\vec{R}_k = R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} + R_3 \vec{k} + R_4 \vec{\ell} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} + ict \vec{\ell} = \vec{r} + ict \vec{\ell} \quad (14.13)$$

Kretanje "svetske tačke" opisuje trajektoriju koja se naziva "svetska linija". Kretanje se odvija u sopstvenom vremenu  $t_0 = \tau$ , pa je  $\vec{R}_k(\tau)$  dato sa:

$$R_1 = R_1(\tau); R_2 = R_2(\tau); R_3 = R_3(\tau) \text{ i } R_4 = R_4(\tau) \quad (14.14)$$

Rastojanje izmedju dva događaja uključuje i vremensku promenu, pa je u S sistemu:

$$\Delta R_k^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2 (t_2 - t_1)^2 \quad (14.15)$$

ili

$$dR_k^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

a u sistemu S' će biti:

$$dR_k'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \quad (14.16)$$

Korišćenjem Lorentzovih transformacija lako se može pokazati da je  $dR_k'^2 = dR_k^2$ , što znači da je prostorno-vremenski interval koji razdvaja dva događaja invarijantan u svim sistemima (dilatacija vremena se kompenzuje kontrakcijom dužine).

Brzina i ubrzanje u relativističkoj mehanici se definišu po analogiji sa klasičnom mehanikom. Vektor brzine je:

$$\vec{V}_k = \frac{d\vec{R}_k}{d\tau} \quad (k=1,2,3,4) \quad (14.17)$$

gdje je  $\tau$  sopstveno ili pravo vreme ( $t_0$ ) sistema. U skladu sa time možemo pisati:

$$\vec{V}_k = \frac{d\vec{R}_k}{d\tau} = \frac{d\vec{R}_k}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{dt} (\vec{r} + ict\vec{\ell}) \cdot \gamma = \gamma(\vec{v} + ic\vec{\ell}) \quad (14.18)$$

ili

$$\begin{aligned} V_1 &= \gamma \cdot v_x \\ V_2 &= \gamma \cdot v_y \\ V_3 &= \gamma \cdot v_z \\ V_4 &= \gamma \cdot ic \end{aligned} \quad (14.19)$$

Ove komponente četvorodimenzionog vektora brzine nisu međusobno nezavisne. Povezane su preko klasične brzine u izrazu za  $\gamma$ , odnosno  $\beta = v/c$ . Intenzitet četvorodimenzione brzine je:

$$(\vec{V}_k)^2 = \gamma^2 v^2 + \gamma^2 i^2 c^2 = \gamma^2 c^2 (v^2/c^2 + i^2) = \gamma^2 c^2 (v^2/c^2 - 1) = i^2 c^2 = -c^2 \quad (14.20)$$

što znači da je jednak u svim sistemima, tj. da je invarijantna veličina.

Četvorodimenziono ubrzanje se definiše na sličan način:

$$\vec{A}_k = \frac{d\vec{V}_k}{d\tau} = \frac{d\vec{V}_k}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (14.21)$$

i njegove komponente se mogu jednostavno izraziti.

Pošto je intenzitet  $\vec{V}_k$  konstantan, ovaj vektor se može menjati samo po pravcu što znači da je ubrzanje uvek normalno na brzinu, odnosno njihov skalarni proizvod jednak je nuli.

#### 14.4. Dinamika specijalne teorije relativnosti.

U klasičnoj mehanici, na osnovu Galilejevih transformacija, imali smo da je u nepokretnom i pokretnom sistemu  $\vec{a} = \vec{a}'$ ,  $m = m' = \text{const}$  i  $\vec{F} = \vec{F}'$ . Ako na telo deluje stalna sila  $\vec{F}$ , može se (za  $\vec{v}_0 = 0$ ) pisati

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = \frac{\vec{v}}{t}, \quad \text{odnosno} \quad \vec{v} = \left(\frac{\vec{F}}{m}\right) \cdot t \quad (14.22)$$

Ovo znači da bi sa vremenom u takvom slučaju brzina neograničeno rasla. Međutim to je u suprotnosti sa teorijom relativnosti. Znači da ove relacije u četvorodimenzionom prostoru više ne važe. Mora se redefinisati pojam impulsa i pojam sile.

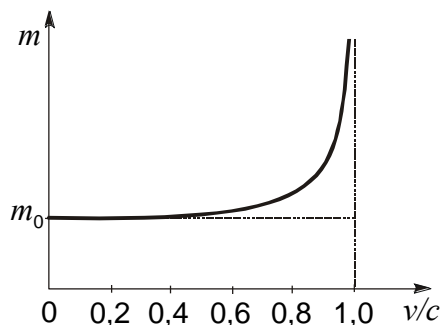
Impuls se u četvorodimenzionom prostoru određuje na sledeći način:

$$\vec{P}_k = m_0 \vec{V}_k = m_0 (\vec{v} + ic\vec{\ell}) \gamma = \vec{p} + imc\vec{\ell} \quad (14.23)$$

Vektor  $\vec{P}_k$  je kolinearan sa  $\vec{V}_k$ , a  $m_0$  je invarijantna masa tela, u odnosu na sistem u kome telo miruje ( $v=0$ ) i naziva se **masa mirovanja** ili sopstvena masa tela. Komponente ovog četvorodimenzionog impulsa su dakle:

$$\begin{aligned} P_1 &= m_0 V_1 = \gamma m_0 v_x = m v_x = p_x \\ P_2 &= m_0 V_2 = \gamma m_0 v_y = m v_y = p_y \\ P_3 &= m_0 V_3 = \gamma m_0 v_z = m v_z = p_z \\ P_4 &= m_0 V_4 = \gamma m_0 ic = imc \end{aligned} \quad (14.24)$$

Masa tela u relativističkoj mehanici nije konstanta i iznosi:



Slika 14.2. Zavisnost mase od brzine

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (14.25)$$

Ova masa,  $m$ , se naziva relativistička masa i zavisi od brzine, te nije invarijantna veličina. Zavisnost mase od brzine prikazana je na slici 14.4.

Dakle prve tri komponente vektora  $\vec{P}_k$  su projekcije običnog trodimenzionog impulsa na ose  $x$ ,  $y$  i  $z$ , a četvrta nema analogni klasični smisao. Ona je imaginarna.

Relativistička jednačina kretanja se dobija diferenciranjem vektora  $\vec{P}_k$  po sopstvenom vremenu:

$$\frac{d\vec{P}_k}{d\tau} = \frac{d(m_0 \vec{V}_k)}{d\tau} = m_0 \frac{d(\vec{V}_k)}{d\tau} = m_0 \vec{A}_k = \vec{F}_k \quad (14.26)$$

gde je  $\vec{F}_k = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k} + F_4 \vec{\ell} = \vec{F} + F_4 \vec{\ell}$ , tzv. sila Minkovskog. Izrazimo ovu silu u inercijalnom sistemu.

$$\vec{F}_k = \frac{d\vec{P}_k}{d\tau} = \frac{d\vec{P}_k}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{P}_k}{dt},$$

dakle

$$\frac{d\vec{P}_k}{dt} = \frac{\vec{F}_k}{\gamma} \quad (14.27)$$

odnosno

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} = \frac{d\vec{P}_x}{dt} = \frac{d(mv_x)}{dt} = \frac{F_1}{\gamma} = F_x$$

$$\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \frac{d\vec{P}_y}{dt} = \frac{d(mv_y)}{dt} = \frac{F_2}{\gamma} = F_y$$

(14.28)

$$\frac{d\vec{P}_3}{dt} = \frac{d\vec{P}_z}{dt} = \frac{d(mv_z)}{dt} = \frac{F_3}{\gamma} = F_z$$

$$\frac{d\vec{P}_4}{dt} = \frac{d(\text{mic})}{dt} = \frac{F_4}{\gamma}$$

Sila  $\vec{F}_k$  se razlikuje od  $\vec{F}$  za faktor  $1/\gamma$  i za komponentu  $F_4$ . Ova komponenta se može odrediti množenjem  $\vec{F}_k$  skalarno sa  $\vec{V}_k$  imajući u vidu da su ova dva vektora međusobno ortogonalna. Biće:

$$V_1 F_1 + V_2 F_2 + V_3 F_3 + V_4 F_4 = 0 \quad (14.29)$$

odnosno:

$$F_4 = -(V_1 F_1 + V_2 F_2 + V_3 F_3) / V_4 = \gamma i (\vec{v} \cdot \vec{F}) / c \quad (14.30)$$

gde su  $\vec{v}$  i  $\vec{F}$  vektori brzine i sile u trodimenzionom prostoru. Sila Minkovskog je dakle:

$$\vec{F}_k = \gamma \{ F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} + i(\vec{v} \cdot \vec{F}) \vec{\ell} / c \} \quad (14.31)$$

#### 14.5. Relativistički izraz za energiju. Proporcionalnost mase i energije.

Zamenjujući izraz za  $F_4$  u četvrtu projekciju relativističke jednačine kretanja  $dP_4/dt = d(\text{mic})/dt = F_4/\gamma$  dobijamo:

$$\frac{d(\text{mic})}{dt} = \frac{i\vec{v} \cdot \vec{F}}{c} \quad (14.32)$$

Množenjem ovog izraza sa  $c/i$  sledi:

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = \frac{dA}{dt} \quad (14.33)$$

Izraz  $mc^2$  ima dimenzije energije, pa se može pisati:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (14.34)$$

što predstavlja ukupnu energiju slobodnog tela koje se kreće brzinom  $v$  u odnosu na neki inercijalni sistem. Ona zavisi od  $v$ ,  $E=E(v)$ . Za  $v=0$  je  $E_0=m_0c^2$  i naziva se energija mirovanja ili sopstvena energija tela. To znači da i masi  $m_0$ , koja miruje odgovara neka energija  $E_0$ , dakle i masa je samo oblik energije.

Relacija (14.34) se može pisati i kao:

$$E = \gamma E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (14.35)$$

Pošto je ukupna energija slobodnog tela,  $E$ , jednaka zbiru njegove kinetičke energije,  $E_k$  i energije mirovanja  $E_0$ , biće:

$$E_k = E - E_0 = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right\} = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad (14.36)$$

Kada  $v \rightarrow 0$  i  $E_k \rightarrow 0$ , što je saglasno i klasičnoj mehanici. Zakon održanja energije za slobodno telo u teoriji relativnosti glasi:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \text{const} \quad (14.37)$$

Ako telo nije slobodno već se nalazi u potencijalnom polju neke konzervativne sile, tada je relativistički zakon održanja energije, na osnovu relacije  $dA=d(mc^2)=-dU$ :

$$m_0 c^2 (\gamma - 1) + U = \text{const} = C \quad (14.38)$$

Konstantni članovi su ovde u stvari  $C+m_0c^2=C_1$ . Za razliku od klasične mehanike u relativističkoj je slobodna energija tela uvek pozitivna i povezana je sa masom mirovanja tela. Relativistička masa sa jedne strane određuje ukupnu energiju slobodnog tela, a sa druge, inercijalna svojstva tela, tako da svaka promena energije tela izaziva i promenu njegove mase po relaciji:

$$dm = \frac{dE}{c^2} \quad (14.39)$$

Ova relacija se naziva **zakon proporcionalnosti mase i energije**. U ovom slučaju postaje očigledna ranija tvrdnja da masu tela kao meru njegove inertnosti treba razlikovati od količine supstance u telu. Pri velikim brzinama, njegova količina supstance ostaje stalna dok mu se masa povećava.

**Odnos između energije i impulsa.** Smisao četvrtе komponente vektora impulsa slobodne čestice može se izvesti iz izraza za energiju:

$$P_4 = imc = i(mc^2)/c = iE/c \quad (14.40)$$

Ukupan impuls će biti:

$$\vec{P}_k = m_0 \vec{V}_k = \vec{p} + (i/c)E\vec{\ell} \quad (14.41)$$

te se  $\vec{P}_k$  još naziva vektor energije-impulsa. Obzirom da je intenzitet četvorodimenzionalne brzine  $(V_k)^2 = -c^2$  i da je invarijantan kvadrat impulsa će biti:

$$P_k^2 = m_0^2 V_k^2 = -m_0^2 c^2 \quad (14.42)$$

Na osnovu izraza za ukupan impuls je:

$$p^2 + (i/c)^2 E^2 = -m_0^2 c^2 \quad (14.43)$$

odnosno:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \quad (14.44)$$

Ako čestica nije slobodna, već je u polju konzervativne sile, tada je:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} + U \quad (14.45)$$

-----

U savremenoj eksperimentalnoj fizici, posebno u nuklearnoj, teorija relativnosti je nedvosmisleno potvrđena. Štaviše, tumačenje niza fenomena ne bi moglo biti razjašnjeno bez nje. Svojom pojavom specijalna teorija relativnosti odigrala je značajnu ulogu u povezivanju, otkrivanju i razjašnjavanju fundamentalnih zakona fizike.

## L I T E R A T U R A:

1. Žiiižić B.: Kurs opšte fizike, fizička mehanika, Naučna knjiga, Beograd, 1983.
2. Friš S., Timoreva E.: Kurs opšte fizike, Deo I, GIT, Moskva, 1965.
3. Sears F. W.: Mehanika, Naučna knjiga, Beograd, 1962.
4. Strelkov S. P.: Mehanika, Nauka, Moskva 1965.
6. Resnik R.: Introduction to Special Relativity, John Wiley, New Yourk, 1968.
5. Savelev I. V.: Kurs opšte fizike, Nauka, Moskva 1970.